TD3 : Fonctions et séries entières.

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Identification de séries entières

Exercice 1.
Exprimer chacune des séries entières suivantes avec les fonctions usuelles (on précisera le rayon de convergence des séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^{3n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$$

Indice : pour la dernière, on pourra remarquer que $n^2 = n(n+1) - n$...

Exercice 2.
Même question avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right) x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n!} x^n.$$

Exercice 3.
Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a, et soit $S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
Soit R_S le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} S_n z^n$.

a/ Montrer que $R_S \leq R_a$. *Indice : on pourra écrire $a_n = S_n - S_{n-1}$.*
b*/ Montrer que $\min\{1, R_a\} \leq R_S$. *Indice : on pourra calculer $\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum z^n\right)$.*

Exercice 4.
Soit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, \quad \text{avec} \quad S_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de la série entière est $R = 1$.
b/ Montrer que pour tout $|x| < R$, on a

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).$$

c/ Exprimer f avec des fonctions usuelles.

Séries génératrices

Exercice 5.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de la série est $R = 1$, et que

$$F_k(x) = \frac{1}{1 - x^k}.$$

b/ Montrer que $A(x) := F_1(x)F_2(x)F_5(x)$ est une série entière de rayon de convergence 1.
On écrit $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
c/ De combien de manières différentes peut-on payer n euros avec des pièces de 1 et de 2 et des billets de 5 ?

Exercice 6. (Fibonacci)
a/ Montrer que

$$f(x) := \frac{x}{1 - x - x^2} \quad \text{vérifie} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\varphi_+ - x} - \frac{1}{\varphi_- - x}\right), \quad \text{avec} \quad \varphi_\pm := \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

b/ En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle qu'on précisera.
c/ On écrit $f = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$. Montrer que pour tout x petit, on a $(1-x-x^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n\right) = x$. En déduire que

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{(Suite de Fibonacci).}$$

d/ Montrer que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{\varphi_+}\right)^n - \left(\frac{1}{\varphi_-}\right)^n\right) \qquad = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \text{(Formule de Binet).}$$

Exercice 7. (Involutions)
On dit que $p : [1, 2, \cdots, n] \to [1, 2, \cdots, n]$ est une *involution* si $p \circ p = \mathrm{id}$ (pour tout $1 \le k \le n$, $p(p(k)) = k$).
On note I_n le nombre d'involutions de $[1, 2, \cdots, n]$ et on pose $I_0 = 1$.
a/ Montrer qu'une involution est bijective. En déduire qu'une involution est une permutation, et que $I_n \le n!$.
b/ Montrer que

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

c/ Soit $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$. Montrer que la série a un rayon de convergence $R \ge 1$.
d/ Montrer que pour tout $x \in (-1, 1)$, on a

$$f'(x) = f(x) + xf(x).$$

e/ Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$. En déduire que

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k (n-2k)!k!}.$$

Autres exercices

Exercice 8. (Étude au bord d'une série entière)
Soit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence est $R = 1$.
b/ Montrer que la série est bien définie pour $x = -1$.
c/ Montrer que pour tout $M > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in (1-\delta, 1)$, on a $f(x) > M$.
Indice : on pourra considérer des sommes partielles, qui sont continues en x.
En déduire que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
d/ Montrer que

$$g(x) := (1-x)f(x) = \sin(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n.$$

a un rayon de convergence au moins égale à 1.
e/ Montrer que la série définissant g est normalement convergente sur $[-1, 1]$, puis que $g(1) = 0$.
f/ En déduire que $f(1-t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 9. (Fonction non développable en série entière)
Soit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2 x}.$$

a/ Montrer que la série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ainsi que toutes ses dérivées.
b/ En déduire que f est C^∞, et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| f^{(k)}(0) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} \mathrm{e}^{-n}.$$

c/ Montrer que la fonction $g(t) := t^{2k}\mathrm{e}^{-t}$ sur $\mathbb{R}^+$ atteint son maximum en $t = 2k$. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} \ge \left(\frac{4k}{\mathrm{e}^2}\right)^k.$$

d/ Montrer que f n'est pas développable en série entière.
e*/ À votre avis, que se passe-t-il ? *Indice : on pourra regarder ce qui se passe dans le plan complexe...*