TD3 : Fonctions et séries entières. Corrections

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Identification de séries entières

Exercice 1.
Exprimer chacune des séries entières suivantes avec les fonctions usuelles (on précisera le rayon de convergence des séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^{3n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n.$$

Indice : pour la dernière, on pourra remarquer que $n^2 = n(n+1) - n$...

Solution

• On a (cf le cours)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad R = 1.$$

• En dérivant la formule précédente, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad R = 1.$$

(le rayon de convergence ne change pas en prenant la dérivée).

• Pour commencer, on remarque que nr^n est bornée ssi $r < 1$, donc $R = 1$. De plus, pour $|x| < 1$, on a, en remarquant que le terme pour $n = 0$ est nul,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad R = 1.$$

(on aurait pu aussi soustraire les deux égalités précédentes pour avoir le résultat).

• La suite $(3n+1)r^{3n}$ est bornée ssi $r < 1$, donc $R = 1$. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^{3n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} n(x^3)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n = 3\frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \frac{1}{1-x^3}. \qquad R = 1.$$

• La suite n^2r^n est bornée ssi $r < 1$, donc $R = 1$. Pour commencer, en dérivant la deuxième expression, on trouve

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2}. \qquad R = 1.$$

Exercice 2.
Même question avec

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n!}x^n.$$

Solution

• On trouve facilement $R = 1$. On remarque que $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\log(1-x).$$

• La suite $\frac{1}{(2n)!}r^{4n}$ est toujours bornée (elle converge vers 0), donc $R = \infty$. On rappelle le DSE de cosh, de la forme

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \text{ce qui donne} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \cosh(x^2).$$

• La suite $\frac{1}{n+1}(4r)^n$ est bornée ssi $4r < 1$, donc $R = \frac{1}{4}$. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n+1} = \frac{1}{4x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^{n+1}}{n+1} = \frac{-1}{4x} \log(1-4x).$$

• On trouve $R = \infty$. En écrivant $\cos(n) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right)$, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n!} x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{n!} x^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} x)^n}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} x)\right).$$

En écrivant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}1} = \cos(1) + \mathrm{i}\sin(1)$, on peut continuer avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n!} x^n = \mathrm{e}^{\cos(1)x} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin(1)x}\right) = \mathrm{e}^{\cos(1)x} \cos\left[\sin(1)x\right].$$

Exercice 3.
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a, et soit $S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
Soit R_S le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} S_n z^n$.

a/ Montrer que $R_S \leq R_a$. *Indice : on pourra écrire* $a_n = S_n - S_{n-1}$.
b*/ Montrer que $\min\{1, R_a\} \leq R_S$. *Indice : on pourra calculer* $\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum z^n\right)$.

Solution

a/ Les séries $\sum S_n x^n$ et $\sum S_{n-1} x^n$ ont le même rayon de convergence R_S. En prenant la différence, on trouve que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R_a \geq R_S$.

b/ On a, en utilisant le produit de Cauchy.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = \sum_{N=0}^{\infty} x^N \left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right) = \sum_{N=0}^{\infty} S_N x^N.$$

Par ailleurs le rayon de convergence de $\sum_m x^m$ est $R = 1$. D'après le cours, on en déduit que $R_S \geq \min\{1, R_a\}$.

Exercice 4.
Soit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, \quad \text{avec} \quad S_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de la série entière est $R = 1$.
b/ Montrer que pour tout $|x| < R$, on a

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).$$

c/ Exprimer f avec des fonctions usuelles.

Solution

a/ On a que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log(n)$. En particulier, $S_n r^n \sim \log(n) r^n$ est bornée ssi $r < 1$. Donc $R = 1$.

b/ C'est la définition du produit de Cauchy.

c/ En identifiant, on trouve

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = -\log(1-x)\frac{1}{1-x}.$$

Séries génératrices

Exercice 5.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de la série est $R = 1$, et que

$$F_k(x) = \frac{1}{1-x^k}.$$

b/ Montrer que $A(x) := F_1(x)F_2(x)F_5(x)$ est une série entière de rayon de convergence 1.
On écrit $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
c/ De combien de manières différentes peut-on payer n euros avec des pièces de 1 et de 2 et des billets de 5 ?

Solution

a/ La suite r^{kn} est bornée ssi $r < 1$. Donc $R = 1$. De plus, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^k)^n = \frac{1}{1-x^k} =: F_k(x).$$

b/ A est un produit de Cauchy de trois séries entières de rayon $R = 1$, donc A est une série entière de rayon de convergence $R_A \geq 1$. En $x = 1$, on trouve $A(1) = \infty$, donc $R = 1$.

c/ Le coefficient a_n compte le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1, 2 et 5 euros. En effet, on trouve

$$a_n = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_5 = 0 \\ n_1 + 2n_2 + 5n_5 = n}}^{\infty} 1.$$

Exercice 6. (Fibonacci)
a/ Montrer que

$$f(x) := \frac{-x}{x^2+x-1} \quad \text{vérifie} \quad f(x) = \frac{-x}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\varphi_+} - \frac{1}{x-\varphi_-}\right), \quad \text{avec} \quad \varphi_\pm := \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

b/ En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle qu'on précisera.
c/ On écrit $f = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$. Montrer que pour tout x petit, on a $(x^2+x-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n\right) = -x$. En déduire que

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{(Suite de Fibonacci)}.$$

d/ Montrer que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{\varphi_+}\right)^n - \left(\frac{1}{\varphi_-}\right)^n\right) \qquad = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \text{(Formule de Binet)}.$$

Solution

a/ On fait une décomposition en éléments simples. Concernant l'équation du second degré $x^2+x-1=0$, ou trouve le discriminant $\Delta = \sqrt{1^2+4} = \sqrt{5}$, donc

$$x^2+x-1 = (x-\varphi_+)(x-\varphi_-), \qquad \text{avec} \quad \varphi_\pm := \frac{1}{2}\left(-1 \mp \sqrt{5}\right).$$

On cherche donc a, et b tel que

$$\frac{-x}{x^2+x-1} = -x\left(\frac{a}{x-\varphi_+} + \frac{b}{x-\varphi_-}\right) = -x\left(\frac{a(x-\varphi_-)+b(x-\varphi_+)}{x^2+x-1}\right).$$

Par identification, on trouve que $a=-b$, puis que $a(\varphi_+ - \varphi_-) = 1$, et donc $a = 1/\sqrt{5}$.

b/ La fonction f est une fraction rationnelles de pôles φ_+ et φ_-. Ces deux pôles sont non nuls, donc f est DSE, avec un rayon de convergence égale au plus petit module de ces pôles. Dans notre cas, on a $|\varphi_+| < |\varphi_-|$, donc $R = |\varphi_+| = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

c/ On a $(x^2+x-1)F(x) = -x$. Pour $|x| < R$, F est égale à sa série entière, donc

$$\forall x < R, \qquad (x^2+x-1)\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = -x.$$

En utilisant le produit de Cauchy, on trouve

$$-x = x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(F_{n-2}+F_{n-1}-F_n)x^n,$$

avec la convention $F_{-1} = F_{-2} = 0$. En identifiant les deux séries entières, on trouve

$$(n=0): \ F_0 = 0, \qquad (n=1): \ F_1 - F_0 = 1 \quad \text{donc} \quad F_1 = 1, \qquad \forall n \geq 2, \ F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.$$

Les premiers termes sont donc $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, etc., On reconnaît la suite de Fibonacci usuelle.

d/ On a par ailleurs que, pour $|x| < R$,

$$\frac{-x}{x-\varphi_+} = \frac{x}{\varphi_+}\frac{1}{1-\frac{x}{\varphi_+}} = \frac{-x}{\varphi_+}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\varphi_+}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\varphi_+}\right)^n \quad \text{et de même} \quad \frac{-x}{x-\varphi_-} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\varphi_-}\right)^n.$$

En soustrayant ces deux égalités, et en divisant par $\sqrt{5}$, on trouve, avec la question a/, que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\varphi_+}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\varphi_-}\right)^n\right).$$

En identifiant les coefficients de ces deux séries entières, on trouve

$$\forall n \geq 1, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\varphi_+^n} - \frac{1}{\varphi_-^n}\right).$$

Exercice 7. (Involutions)

On dit que $p : [1,2,\cdots,n] \to [1,2,\cdots,n]$ est une *involution* si $p \circ p = \mathrm{id}$ (pour tout $1 \leq k \leq n$, $p(p(k)) = k$). On note I_n le nombre d'involutions de $[1,2,\cdots,n]$ et on pose $I_0 = 1$.

a/ Montrer qu'une involution est bijective. En déduire qu'une involution est une permutation, et que $I_n \leq n!$.

b/ Montrer que

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

c/ Soit $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!}x^n$. Montrer que la série a un rayon de convergence $R \geq 1$.

d/ Montrer que pour tout $x \in (-1,1)$, on a

$$f'(x) = f(x) + xf(x).$$

e/ Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$. En déduire que

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

Solution

a/ On a $p \circ p = 1$, donc p est une fonction bijective, d'inverse p. Une fonctions bijective de $[1,\cdots,n]$ dans lui-même est une permutation. Il y a $n!$ telles bijections, donc $I_n \leq n!$.

b/ Soit p une involution de $[1,\cdots,n+1]$, et soit $k = p(n+1)$. Deux cas sont possible.

— Si $k = n+1$, alors p laisse fixe le point $n+1$. En particulier, p est une involution de $[1, \cdots, n]$. Il y a I_n telles involutions.

— Si $k < n+1$, alors $p(k) = p(p(k)) = n+1$. Sur l'ensemble $[1, \cdots, n+1] \setminus \{k, n+1\}$, qui comprend $n-1$ éléments, p est une involution. Pour tout $1 \le k < n+1$, il y a I_{n-1} telles involutions. Il y a n valeurs possibles pour k.

Au final, on obtient

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

c/ On introduit la série entière $f(x) = \sum I_n/n!x^n$. Comme $I_n < n!$, la suite $(I_n/n!1^n)$ est bornée, donc $R \ge 1$.

d/ Pour $|x| < R$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = f(x) + xf(x).$$

e/ f est solution de l'équation différentielle $f'(x) = (1+x)f(x)$. Pour $0 \le x < 1$, on a $f(x) > 0$ (car c'est une somme de termes positifs). Donc

$$\frac{f'}{f} = (1+x), \qquad \text{et en intégrant} \qquad \ln f(x) - \ln f(0) = x + \frac{1}{2}x^2.$$

Comme $I_0 = 1$, on a $f(0) = 1$. En passant à l'exponentielle, on trouve

$$f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Le terme de droite est DSE comme produit de Cauchy de fonctions DSE. On trouve

$$\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \frac{x^{2\ell}}{2^\ell} = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} x^{k+2\ell} \frac{1}{k!\ell!2^\ell}.$$

Avec le changement de variable $n = k + 2\ell$ et $\ell = \ell$ (donc $k = n - 2\ell$), on obtient

$$f(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(n-2\ell)!\ell!2^\ell} \right).$$

En identifiant les termes dans les développements en série entière, on obtient

$$\frac{I_n}{n!} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(n-2\ell)!\ell!2^\ell}.$$

Autres exercices

Exercice 8. (Étude au bord d'une série entière)

Soit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence est $R = 1$.

b/ Montrer que la série est bien définie pour $x = -1$.

c/ Montrer que pour tout $M > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in (1-\delta, 1)$, on a $f(x) > M$.

Indice : on pourra considérer des sommes partielles, qui sont continues en x.

En déduire que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

d/ Montrer que

$$g(x) := (1-x)f(x) = \sin(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) x^n.$$

a un rayon de convergence au moins égale à 1.
e/ Montrer que la série définissant g est normalement convergente sur $[-1,1]$, puis que $g(1)=0$.
f/ En déduire que $f(1-t)=o\left(\frac{1}{t}\right)$.

Solution

a/ Si $r<1$, on a $|\sin(1/\sqrt{n})r^n|\le r^n$, qui et bornée (elle tend vers 0), donc $R\ge 1$. De plus, en $r=1$, on a $\sin(1/\sqrt{n})\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$, qui est une suite bornée, mais une série non sommable, donc $R=1$.

b/ Pour tout n, on a $0<\frac{1}{\sqrt{n}}<\pi$, donc $\sin(1/\sqrt{n})>0$. En $x=-1$, la série $\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\sin(1/\sqrt{n})$ est alternée, donc converge.

c/ Soit $f_N(x):=\sum_{x=1}^N\sin(\frac{1}{\sqrt{N}})x^n$ la série partielle. La fonction f_N est continue (somme finie de fonctions continues), et $f_N(1)=\sum_{x=1}^N\sin(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

Soit M fixé quelconque. La série $\sum\sin(\frac{1}{\sqrt{N}})$ est constitué de termes positifs, et diverge vers $+\infty$. Donc il existe N_0 tel que $f_{N_0}(1)\ge M+1$. Par continuité de f_{N_0}, il existe $\delta>0$ tel que $f_{N_0}(x)>M$ pour tout $1-\delta<x\le 1$.

De plus, pour $x>0$, la suite $N\mapsto f_N(x)$ est croissante (on ajoute des termes positifs). En particulier,

$$\forall x\in(1-\delta,1),\qquad f(x)>f_{N_0}(x)>M.$$

Ceci étant vrai pour tout $M\ge 0$, on a $\lim_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$.

d/ Pour $|x|<1$, on a

$$\begin{aligned}g(x)=f(x)-xf(x)&=\sum_{n=1}^\infty\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n-\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^{n+1}=\sum_{n=1}^\infty\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n-\sum_{n=2}^\infty\sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}})x^n\\&=\sin(1)x+\sum_{n=2}^\infty\left(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})-\sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}})\right)x^n.\end{aligned}$$

g est la somme de deux SE de rayons $R=1$, donc a un rayon de convergence $R_g\ge 1$.

e/ On a

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\left(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})-\sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}})\right)x^n\right|=\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})-\sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}}),$$

qui est une série convergente (c'est une série télescopique). La série définissant g est donc normalement convergente sur $[-1,1]$. En particulier, $g(1)$ est bien défini, et

$$g(1)=\sin(1)+\sum_{n=2}^\infty\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})-\sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}})=0.$$

f/ On a $g(x)=(1-x)f(x)$, donc

$$\frac{f(1-t)}{t}=g(1-t)\xrightarrow[t\to 0]{}0.$$

Dans la dernière limite, on a utilisé que g était une fonction continue sur $[-1,1]$ (convergence normale), avec $g(0)=0$. Ceci montre que $f(1-t)=o(1/t)$.

Exercice 9. (Fonction non développable en série entière)
Soit

$$f(x):=\sum_{n=0}^\infty e^{-n}e^{in^2x}.$$

a/ Montrer que la série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, ainsi que toutes ses dérivées.
b/ En déduire que f est C^∞, et que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad\left|f^{(k)}(0)\right|=\sum_{n=0}^\infty n^{2k}e^{-n}.$$

c/ Montrer que la fonction $g(t):=t^{2k}e^{-t}$ sur $\mathbb{R}^+$ atteint son maximum en $t=2k$. En déduire que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad\frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}\ge\left(\frac{4k}{e^2}\right)^k.$$

d/ Montrer que f n'est pas développable en série entière.
e*/ À votre avis, que se passe-t-il ? *Indice : on pourra regarder ce qui se passe dans le plan complexe...*

Solution

a/ On a

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}(\mathrm{i}n^2)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2 x},$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{-n}(\mathrm{i}n^2)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2 x} \right| = \mathrm{e}^{-n} n^{2k},$$

qui est une série sommable. Donc la série définissant $f^{(k)}$ est normalement convergente.

b/ En particulier, $f^{(k)}$ est une fonction de classe C^∞. De plus, on a

$$\left| f^{(k)}(0) \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}(\mathrm{i}n^2)^k \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} n^{2k}.$$

c/ Soit $g(t) := t^{2k}\mathrm{e}^{-t}$. g est une fonction C^∞, positive sur $\mathbb{R}^+$, avec $g(0) = 0$, et $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$. Elle atteint donc son maximum sur $\mathbb{R}^+$. On a

$$g'(t) = \left[(2k)t^{2k-1} - t^{2k} \right] \mathrm{e}^{-t},$$

qui ne s'annule que pour $t = 2k$. C'est le seul point critique de g sur $\mathbb{R}^+$, donc le maximiseur. En ce point, on a

$$g(2k) = (2k)^{2k}\mathrm{e}^{-2k}.$$

En minorant la somme en n par le terme $n = 2k$, on a

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}\mathrm{e}^{-n} \geq \frac{1}{k!}(2k)^{2k}\mathrm{e}^{-2k} = \frac{k^k}{k!} \left(\frac{4k}{\mathrm{e}^2} \right)^k.$$

On obtient le résultat en remarquant que $k! \leq k^k$.

d/ Pour tout $r > 0$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k \right| \geq \left(\frac{4k}{\mathrm{e}^2} x \right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Pour la dernière limite, on a remarqué que pour k assez grand, on a $\frac{4k}{\mathrm{e}^2}x \geq 1$. On en déduit que la suite n'est jamais bornée, donc le rayon de convergence est $R = 0$. Ainsi, f n'est pas DSE.

e/ On peut regarder $f(-\mathrm{i}x)$ avec $x > 0$. On obtient

$$f(-\mathrm{i}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{n^2 x},$$

qui n'est jamais sommable pour $x > 0$. Autrement dit, la série qu'on considère est sommable sur $\mathbb{R}$, mais pas $\mathbb{C}$ (ni sur aucune boule de $\mathbb{C}$). La fonction f n'est pas DSE, car elle a des problèmes sur $\mathbb{C}$.