TD4 : Théorème d'Abel.

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Exercice 1.
Montrer que les fonctions suivantes sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) := \frac{\sin(x)}{x}, \quad f_2(x) := \frac{\cos(x)-1}{x^2}, \quad f_3(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 2.
Soit a_n une suite réelle qui converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

a/ Montrer que le rayon de convergence est $R = \infty$.
b/ On suppose $\alpha = 0$. Montrer que $f(x) = o(\mathrm{e}^x)$ dans la limite $x \to \infty$.
Indice : on pourra écrire $\sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty}$ *et montrer que* $\mathrm{e}^{-x} f(x)$ *converge vers* 0.
c/ Dans le cas général, montrer que $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x) = \alpha$.

Avec Abel

Exercice 3.
Calculer les sommes suivantes : $I_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad I_2 := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

Exercice 4.
On rappelle que $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Soit $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$, puis que S admet un prolongement par continuité en $x = 1$ avec $S(1) = \frac{\pi^2}{6}$.
b/ Montrer que pour tout $x \in (-1, 1)$, on a $xS'(x) = -\log(1-x)$.
c/ En déduire que

$$\int_0^1 \frac{|\log(u)|}{1-u} \mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5.
Soit $f(x) := \frac{1}{1+x}$, et soit $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$.
a/ Montrer que pour tout $x \in (-1, 1)$, on a $f(x) = S(x)$.
b/ Montrer que f est continue en $x = 1$, mais que S n'est pas défini en $x = 1$.

Autrement dit, la «réciproque» du théorème d'Abel est fausse dans le cas général.

Exercice 6.
On veut calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.
a/ On note $j \in \mathbb{C}$ le complexe $j := -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ vérifiant $1 + j + j^2 = 0$ (donc $j^3 = 1$). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{jx} + \mathrm{e}^{j^2 x} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}.$$

b/ En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}(\mathrm{e} + \mathrm{e}^j + \mathrm{e}^{j^2}) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e} + \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Des problèmes plus difficiles

Exercice 7. théorème de Tauber "positif"

a/ Soit $f(x)$ une fonction développable en série entière sur $(-1, 1)$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est positif. On pose $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
a1/ Rappeler pourquoi pour tout $x \in (-1, 1)$, on a $f(x) = S(x)$.
a2/ Montrer que f est croissante sur $[0, 1)$.

b/ On suppose que f est continue en 1, avec $f(1) = \ell$. Montrer que la suite $S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ est croissante et majorée par ℓ, donc converge. *Indice : on pourra regarder la suite de fonctions* $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.

c/ En déduire que S est prolongeable par continuité, et que $S(1) = \ell$.

Exercice 8.
On étudie la série
$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n}.$$
a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$.
b/ Montrer que, moralement, on a $S(x) = -\mathrm{Re}\,(\log(1 - jx))$.

Malheureusement, on ne pas (encore) l'extension complexe (holomorphe) du log. Il faut donc faire autrement.

c/ Montrer que
$$S'(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{j}{1-jx}\right) = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$
d/ En déduire que $S(x) = -\frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right)$.
e/ Montrer que
$$\frac{1}{3n} - \frac{1}{2(3n+1)} - \frac{1}{2(3n+2)} = \frac{9n+4}{2n(3n+1)(3n+2)}.$$
En déduire que
$$\log(3) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)}.$$

Exercice 9. Expression bien parenthésée
On dit qu'une expression de type "((()()()))" est *bien parenthésée* si ... elle est bien parenthésée... Par exemple "(()())()" est bien parenthésée, mais ")(" et "())(())" ne sont pas bien parenthésées. On note C_n le nombre d'expressions bien parenthésées ayant n paires de parenthèses, avec la convention $C_0 = 1$.

a/ Montrer que $C_1 = 1$, puis que (on pourra s'intéresser à la première parenthèse ouvrante)
$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$
b/ On pose $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ et R son rayon de convergence. Montrer que $C_n \le 4^n$, puis que $R \ge \frac{1}{4}$.
c/ Montrer que pour tout $|x| < \frac{1}{4}$, on a
$$S(x) = 1 + xS^2(x).$$
d/ En déduire que pour tout $|x| < \frac{1}{4}$, on a
$$S(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - (1-4x)^{1/2}\right).$$
e/ On rappelle que pour tout $|x| < 1$, on a $(1-x)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n$. Montrer que
$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2n+1}x^n.$$
f/ En déduire que
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad \text{(nombre de Catalan).}$$

Exercice 10. Si Abel était toujours vrai...
Soit
$$S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots .$$
a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$.
b/ Calculer le développement en série entière de $f(x) := \frac{-1}{(1+x)^2}$ (on pourra calculer une primitive de f).
c/ Montrer que, pour tout $|z| < 1$, on a
$$S(z) + f(z) = 4S(z^2).$$
d/ En déduire que, **si** $S(1)$ **convergeait vers** $S \in \mathbb{R}$ (ce qui n'est pas le cas), alors forcément $S = -\frac{1}{12}$. En déduire que formellement,
$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$