TD4 : Théorème d'Abel. Corrections

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Exercice 1.

Montrer que les fonctions suivantes sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) := \frac{\sin(x)}{x}, \quad f_2(x) := \frac{\cos(x) - 1}{x^2}, \quad f_3(x) := \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Solution

On remarque que les opérations consistent à «retirer» les premiers termes du développement en série entière. On trouve par exemple

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}.$$

Ainsi, f_1 et f_2 sont deux séries entières de rayon $R = \infty$ (le vérifier). En particulier, f_1 et f_2 sont C^∞. Pour f_3, on a

$$f_3(x) = \frac{1}{x^2} \left(\underbrace{1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}_{\exp(x)} - \underbrace{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}_{\cos(x)} - \underbrace{x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{\sin(x)} \right).$$

Les partie en 1 et en x s'annule. Le reste peut "absorber" le x^{-2} devant. f_3 est donc une série entière avec $R = \infty$, et en particulier est une fonction C^∞.

Exercice 2.

Soit a_n une suite réelle qui converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

a/ Montrer que le rayon de convergence est $R = \infty$.
b/ On suppose $\alpha = 0$. Montrer que $f(x) = o(e^x)$ dans la limite $x \to \infty$.
Indice : on pourra écrire $\sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty}$ *et montrer que* $e^{-x} f(x)$ *converge vers* 0.
c/ Dans le cas général, montrer que $\lim_{x\to\infty} e^{-x} f(x) = \alpha$.

Solution

a/ Pour tout $r > 0$, on a $\frac{a_n}{n!} r^n \sim \dfrac{\alpha}{n!} r^n$, qui tend vers 0, donc est une suite bornée. On en déduit que $R = \infty$.

b/ Soit $\varepsilon > 0$, et soit N_0 tel que $|a_n| \le \varepsilon$ pour tout $n \ge N_0$. Soit M un majorant de $|a_n|$ (c'est une suite bornée, car elle converge vers 0). On a

$$|f(x)| \le \sum_{n=0}^{N_0} \frac{|a_n|}{n!} |x|^n + \varepsilon \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} |x|^n \le M \sum_{n=0}^{N_0} |x|^n + \varepsilon e^x.$$

En multipliant par $\exp(-x)$, et en faisant la limite $x \to \infty$, on trouve $\lim_{x\to\infty} e^{-x} |f(x)| \le \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout ε, on a $e^{-x} f(x) = o(1)$ lorsque $x \to \infty$, c'est à dire $f(x) = o(e^x)$.

c/ On pose $b_n = a_n - \alpha$, de sorte que (b_n) est une suite qui tend vers 0. On pose $g(x) = \sum \frac{b_n}{n!} x^n$. D'après la question a/, g est une SE de rayon de convergence $R = \infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) = f(x) - \alpha e^x, \qquad \text{et donc} \quad e^{-x} f(x) = e^{-x} g(x) + \alpha.$$

D'après la question b/, on a $e^{-x} g(x) \to 0$. Donc $e^{-x} f(x) = \alpha$ lorsque $x \to \infty$.

Avec Abel

Exercice 3.

Calculer les sommes suivantes : $I_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\quad I_2 := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

Solution

• On a

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad R = 1.$$

En $R = 1$, la série $\sum (-1)^n (2n+1)^{-1}$ est alternée, donc converge. D'après la théorème d'Abel, arctan se prolonge par continuité en $x = 1$ (on le savait déjà, car arctan est continue en 1 avec $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, avec

$$\arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \qquad \text{donc} \quad I_1 = \frac{\pi}{4}.$$

• On cherche une série entière pour I_2. On a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

On reconnaît une série télescopique, et on a

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{3}{4}.$$

Cependant, l'exercice nous suggère de trouver la somme avec Abel... on introduit donc la série entière (on peut vérifier que son rayon de convergence est $R = 1$)

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(-x\log(1-x) - \frac{1}{x}\left[-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\log(1-x)\frac{1-x^2}{x} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\log(1-x)\frac{(1-x)(1+x)}{x} + 1 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

En $R = 1$, la série $\sum \frac{1}{n^2-1}$ est convergente (car $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$). D'après le théorème d'Abel, la fonction f se prolonge par continuité en $x = 1$, avec $f(1) = I_2$. En utilisant le fait que la fonction $(1-x)\log(1-x)$ tend vers 0 lorsque $x \to 1$, on trouve

$$I_2 = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Exercice 4.

On rappelle que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Soit $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$, puis que S admet un prolongement par continuité en $x = 1$ avec $S(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

b/ Montrer que pour tout $x \in (-1, 1)$, on a $xS'(x) = -\log(1-x)$.

c/ En déduire que

$$\int_0^1 \frac{|\log(u)|}{1-u} \mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution

a/ La suite $\frac{r^n}{n^2}$ est bornée ssi $r \leq 1$, donc $R = 1$. En $R = 1$, la série converge. D'après le théorème d'Abel, la fonction S se prolonge par continuité en $x = 1$, avec $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b/ On a

$$xS'(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

De plus, on a $S(0)=0$. Donc

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{-\log(1-t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{|\log(1-t)|}{t}\mathrm{d}t.$$

c/ L'intégrande définissant S est positive. D'après le théorème de Convergence Monotone (cf plus tard), on a

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{x\to 1} S(x)=\lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{|\log(1-t)|}{t}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{|\log(1-t)|}{t}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{\log(u)}{1-u}\mathrm{d}u.$$

On a fait le changement de variable $u=1-t$ dans la dernière intégrale.

Exercice 5.
Soit $f(x):=\frac{1}{1+x}$, et soit $S(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$.
a/ Montrer que pour tout $x\in(-1,1)$, on a $f(x)=S(x)$.
b/ Montrer que f est continue en $x=1$, mais que S n'est pas défini en $x=1$.

Autrement dit, la «réciproque» du théorème d'Abel est fausse dans le cas général.

Solution

a/ C'est dans le cours. Pour $|x|<1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x}$, et le rayon de convergence est $R=1$.

b/ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En particulier, f est continue en $x=1$ avec $f(1)=\frac{1}{2}$. La suite $(-1)^n$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement.

Exercice 6.
On veut calculer $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n)!}$.
a/ On note $j\in\mathbb{C}$ le complexe $j:=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ vérifiant $1+j+j^2=0$ (donc $j^3=1$). Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{jx}+\mathrm{e}^{j^2x}=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n)!}x^{3n}.$$

b/ En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n)!}=\frac{1}{3}(\mathrm{e}+\mathrm{e}^j+\mathrm{e}^{j^2})=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Solution

a/ On a

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{jx}+\mathrm{e}^{j^2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x^n+(jx)^n+(j^2x)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left(1+j^n+j^{2n}\right).$$

En écrivant $n=3k+r$ avec $r\in 0,1,2$, on a

$$1+j^n+j^{2n}=1+j^{3k+r}+j^{6k+2r}=1+j^r+j^{2r}=\begin{cases}3 & \text{si}\quad r=0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi, il n'y a que les termes avec $n=3k$ qui survivent dans la somme. On obtient

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{jx}+\mathrm{e}^{j^2x}=\sum_{k=0}^{\infty}3\frac{x^{3k}}{(3k)!}.$$

b/ La série $\sum\frac{1}{(3n)!}$ est sommable (par exemple car elle est plus petite que $\sum\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$). D'après le théorème d'Abel, on en déduit que (on utilise que $j^2=\frac{1}{j}=\overline{j}$)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k)!}=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+\mathrm{e}^j+\mathrm{e}^{j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Des problèmes plus difficiles

Exercice 7. théorème de Tauber "positif"

a/ Soit $f(x)$ une fonction développable en série entière sur $(-1,1)$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est positif. On pose $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

a1/ Rappeler pourquoi pour tout $x \in (-1,1)$, on a $f(x) = S(x)$.

a2/ Montrer que f est croissante sur $[0,1)$.

b/ On suppose que f est continue en 1, avec $f(1) = \ell$. Montrer que la suite $S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ est croissante et majorée par ℓ, donc converge. *Indice : on pourra regarder la suite de fonctions* $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$.

c/ En déduire que S est prolongeable par continuité, et que $S(1) = \ell$.

Solution

a/ Comme f est DSE sur $(-1,1)$, on a par définition $f(x) = S(x)$. Pour tout n, on a $a_n \geq 0$, donc $a_n x^n$ croissante. Ainsi, f est une fonction croissante, comme somme (infinie) de fonctions croissantes.

b/ On pose $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ la série partielle. S_N est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $0 \leq x < 1$, on a $S_N(x) \leq S(x) = f(x)$. En particulier, comme S_N et f sont continues en $x = 1$, on a $S_N(1) \leq f(1) = \ell$, c'est à dire

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell.$$

La suite $S_N(1)$ est croissante, majorée par ℓ, donc converge vers un certain $M \leq \ell$. Autrement dit,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \ell.$$

c/ En $x = 1$, la série $\sum a_n$ converge. D'après le théorème d'Abel, la fonction f se prolonge par continuité en $x = 1$ avec $f(1) = \sum a_n = M$. Par ailleurs, on sait que $f(1) = \ell$, donc $M = \ell$. Enfin, comme $f = S$ sur $[0,-1)$, S se prolonge par continuité en $x = 1$ avec $S(1) = \ell$.

Exercice 8.

On étudie la série

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) \frac{x^n}{n}.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$.

b/ Montrer que, moralement, on a $S(x) = -\mathrm{Re}\,(\log(1 - jx))$.

Malheureusement, on ne pas (encore) l'extension complexe (holomorphe) du log. Il faut donc faire autrement.

c/ Montrer que

$$S'(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{j}{1 - jx}\right) = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

d/ En déduire que $S(x) = -\frac{1}{2}\log\left(x^2 + x + 1\right)$.

e/ Montrer que

$$\frac{1}{3n} - \frac{1}{2(3n+1)} - \frac{1}{2(3n+2)} = \frac{9n+4}{2n(3n+1)(3n+2)}.$$

En déduire que

$$\log(3) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)}.$$

Solution

a/ Si $r < 1$, la suite $\cos(n\frac{2\pi}{3})\frac{r^n}{n}$ converge vers 0, donc est bornée, et pour $r > 1$, elle diverge. Donc $R = 1$.

b/ On écrit que $\cos(n\frac{2\pi}{3}) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}n}\right) = \mathrm{Re}\,(j^n)$, où on a utilisé que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = j$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n} = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(jx)^n}{n}.$$

Si on admet que le log est défini en dehors de l'axe réel (il l'est sur une boule de centre 1 et de rayon 1, car c'est une série entière), alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n} = -\mathrm{Re}\,\log(1-jx).$$

c/ On a $|jx| = |x|$. Donc pour $|x| < 1$ réel, on peut écrire

$$S'(x) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} j^n x^{n-1} = \mathrm{Re}\, j\sum_{n=0}^{\infty}(jx)^n = \mathrm{Re}\,\frac{j}{1-jx} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{j^2-x}.$$

Comme x est réel, on a $j^2 - x = -(\frac{1}{2}+x) - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{j^2-x} = \mathrm{Re}\,\frac{-(\frac{1}{2}+x)+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2}+x)^2+\frac{3}{4}} = -\frac{\frac{1}{2}+x}{x^2+x+1}.$$

d/ Par ailleurs, on a $S(0) = 0$. Donc

$$S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x S'(s)\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2s+1}{s^2+s+1}\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\left[\log(1+s+s^2)\right]_0^x = -\frac{1}{2}\log(1+x+x^2).$$

e/ En écrivant $n = 3k + r$, on a

$$\cos(n\frac{2\pi}{3}) = \cos(r\frac{2\pi}{3}+2\pi k) = \cos(\frac{2\pi}{3}r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Ainsi,

$$\cos\left(3k\frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{3k} + \cos\left([3k+1]\frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{3k+1} + \cos\left([3k+2]\frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{3k+2} = \frac{1}{3k} - \frac{1}{2}\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{3k+2}.$$

On réduit au même dénominateur, et on obtient

$$\frac{1}{3k} - \frac{1}{2}\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{3k+2} = \frac{2(3k+1)(3k+2)-(3k)(3k+2)-(3k)(3k+1)}{2(3k)(3k+1)(3k+2)} = \frac{9k+4}{2(3k)(3k+1)(3k+2)}$$

f/ Ce terme es équivalent à $1/(6k^2)$ en l'infini, donc la série est sommable. D'après lé théorème d'Abel, S se prolonge par continuité en $x = 1$, avec

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{n} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9k+4}{2(3k)(3k+1)(3k+2)}.$$

Par ailleurs, on sait que $S(1) = -\frac{1}{2}\log(3)$. Ainsi,

$$\log(3) = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9k+4}{(3k)(3k+1)(3k+2)}.$$

Exercice 9. Expression bien parenthésée

On dit qu'une expression de type "((()()()))" est *bien parenthésée* si ... elle est bien parenthésée... Par exemple "(()())()" est bien parenthésée, mais ")(" et "())(())" ne sont pas bien parenthésées. On note C_n le nombre d'expressions bien parenthésées ayant n paires de parenthèses, avec la convention $C_0 = 1$.

a/ Montrer que $C_1 = 1$, puis que (on pourra s'intéresser à la première parenthèse ouvrante)

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

b/ On pose $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ et R son rayon de convergence. Montrer que $C_n \leq 4^n$, puis que $R \geq \frac{1}{4}$.
c/ Montrer que pour tout $|x| < \frac{1}{4}$, on a

$$S(x) = 1 + xS^2(x).$$

d/ En déduire que pour tout $|x| < \frac{1}{4}$, on a

$$S(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - (1-4x)^{1/2}\right).$$

e/ On rappelle que pour tout $|x| < 1$, on a $(1-x)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^n$. Montrer que

$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2n+1}x^n.$$

f/ En déduire que

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad \text{(nombre de Catalan).}$$

Solution

a/ Il n'y a qu'une seule expression bien parenthésée avec une paire de parenthèses : "()". Une expression bien parenthésée avec n paires de parenthèses est de la forme "(A)B", où A et B sont des expressions bien parenthésées. Si A a k paires de parenthèses (avec $0 \le k \le n-1$), B doit en avoir $n-k-1$. On en déduit que

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

b/ Il y a 2^{2n} "mots" possibles de taille $2n$, et avec les deux lettres $\{(,)\}$ (ce sont tous les mots s'écrivant avec des parenthèses, bien parenthésée ou non). En particulier, $C_n \le 2^{(2n)} = 4^n$. La suite $C_n r^n$ est bornée si $r \le \frac{1}{4}$, donc $R \ge \frac{1}{4}$.

c/ On a, avec le produit de Cauchy, et la formule de la question a/,

$$\begin{aligned} xS^2(x) &= x\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell x^\ell = x\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right]x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right]x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}\right]x^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = S(x) - 1. \end{aligned}$$

d/ $X = S(x)$ est solution de l'équation du second degré $xX^2 - X + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1 - 4x$, qui est positif car $x \le \frac{1}{4}$, et les deux solutions de cette équation sont

$$X_{\pm} := \frac{1}{2x}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right).$$

Comme S est une fonction continue, on doit avoir $S(x) = X_+(x)$ ou $S(x) = X_-(x)$ partout (pour tout $|x|\frac{1}{4}$). Quand $x \to 0$, on a

$$X_{\pm}(x) = \frac{1}{2x}(1 \pm (1-2x) + o(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} \mp 1.$$

Comme $S(0) = 1$, on en déduit que $S(x) = X_-(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$.

e/ On a donc

$$S(x) = \frac{1}{2x}\left[1 - \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}(4x)^n\right)\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}x^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2n+1}x^n.$$

f/ En identifiant les coefficients de la série entière, on trouve

$$C_n = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2}\frac{1}{2n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 10. Si Abel était toujours vrai...

Soit

$$S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots.$$

a/ Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$.
b/ Calculer le développement en série entière de $f(x) := \frac{-x}{(1+x)^2}$ (on pourra calculer une primitive de f).
c/ Montrer que, pour tout $|z| < 1$, on a

$$S(z) + f(z) = 4S(z^2).$$

d/ En déduire que, **si** $S(1)$ **convergeait vers** $S \in \mathbb{R}$ (ce qui n'est pas le cas), alors forcément $S = -\frac{1}{12}$. En déduire que formellement,

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

Solution

a/ La suite nr^n est bornée ssi $r < 1$, donc $R = 1$.
b/ On a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \qquad R = 1.$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}. \quad \text{et donc} \quad f(x) = \frac{-x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n.$$

c/ On a, pour $|z| < 1$, et en remarquant que tous les termes impaires s'en vont,

$$S(z) + f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \, n z^n = \sum_{k=1}^{\infty} 2(2k) z^{2k} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} k (z^2)^k = 4S(z^2).$$

d/ Si $S(1) = S$ existe, alors on aurait $S + f(1) = 4S$, donc $S = \frac{1}{3} f(1)$. Et comme $f(1) = -\frac{1}{4}$, alors $S = -\frac{1}{12}$.