TD5 : Séries de Fourier.

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Conventions. *Dans ce TD, si f est T périodique, on note $c_n^T(f) = \langle e_n^T, f \rangle_T$ avec $\langle f, g \rangle_T := \int_0^T \overline{f} g$ et $e_n^T(x) := \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{2\pi}{T} nx}$. On note c_n et e_n lorsque la valeur de T est claire.*

Échauffement, quelques jolies formules

Exercice 1.
Soit f la fonction 1 périodique qui vaut $f(x) := |x|$ sur $(-1/2, 1/2)$.
a/ Montrer que f est continue périodique ($f \in C^0_{T=1}$).
b/ Montrer que

$$c_n(f) = \int_0^{1/2} 2x \cos(2n\pi x) \mathrm{d}x.$$

c/ Avec une intégration par partie, montrer que si n est paire différent de 0, alors $c_n(f) = 0$, et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_{2k+1}(f) = \frac{-1}{(2k+1)^2 \pi^2}, \quad \text{et enfin} \quad c_0(f) = \frac{1}{4}.$$

d/ En déduire que

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{16} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^4 \pi^4}, \quad \text{puis que} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

e/ Soit $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer que la série est convergente, puis que $S = \frac{1}{16} S + \frac{\pi^4}{96}$. En déduire que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

Exercice 2.
Soit f la fonction 1-périodique, qui vaut $f(x) := \mathrm{e}^{2\pi x}$ sur $[0, 1)$.
a/ Montrer que

$$c_n(f) := \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi(1 - \mathrm{i}n)}.$$

b/ En déduire que

$$\frac{e^{4\pi} - 1}{4\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)^2}{4\pi^2 (1 + n^2)}, \quad \text{puis que} \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{e}^{2\pi} + 1}{\mathrm{e}^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}.}$$

Exercice 3.
Soit f la fonction 2π-périodique, qui vaut $f(x) := |\sin(x)|$ sur $[-\pi, \pi]$.
a/ Montrer que f est continue périodique.
b/ Montrer que f est paire, puis que

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) \mathrm{d}x$$

c/ Montrer que (on rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$)

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}, \quad c_n(f) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1}, \quad \text{puis que} \quad c_{-1}(f) = c_1(f) = 0.$$

d/ En déduire que $c_n(f) = 0$ si n est impair, puis que

$$\pi = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}, \quad \text{et enfin} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.}$$

e/ En évaluant $f(0)$, montrer que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.}$$

Propriétés de la transformée de Fourier

Exercice 4.

a/ **(Dilatations)** Soit $\phi_1 \in C^0_{T=1}$. Pour $T > 0$, on pose $\phi_T(x) := \frac{1}{\sqrt{T}}\phi\left(\frac{x}{T}\right)$. Montrer que $\phi_T \in C^0_T$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n^T(\phi_T) = c_n^1(\phi_1).$$

b/ **(Translations)** Soit $\psi_0 \in C^0_T$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\psi_a(x) := \psi(x-a)$. Montrer que $\psi_a \in C^0_T$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\psi_a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}na} c_n(\psi_0).$$

c/ **(Conjuguée)** Soit $f \in C^0_T$. Montrer que $\overline{f} \in C^0_T$, puis que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n\left(\overline{f}\right) = \overline{c_{-n}\left(f\right)}$.

Exercice 5. (Dérivation simple)

a/ Soit $f \in C^1_T$ une fonction continûment dérivable. Montrer que $c_n(f') = \left(\mathrm{i}\dfrac{2\pi}{T}\right) n c_n(f)$.
b/ Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$.
c/ En déduire que $S_N(f)$ converge uniformément vers f lorsque $N \to \infty$.
d/ **(Stone-Weierstrass faible)** Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans C^1_T pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: pour tout $f \in C^1_T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{T}_N$ tel que $\|P - f\|_\infty < \varepsilon$.

e/ Montrer que si $f \in C^k_T$ est k-fois continûment dérivable, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \le \frac{C}{|n|^k}.$$

Remarque : Plus une fonction est régulière, plus ses coefficients décroissent vite vers 0.

Exercice 6. (Inégalité de Wirtinger)

a/ Soit $f \in C^1_T$ telle que $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$. Montrer que $c_0(f) = 0$, puis que (on pourra utiliser l'exercice précédent).

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \le \frac{T}{2\pi}|c_n(f')|.$$

b/ En déduire que pour tout $f \in C^1_T$, on a

$$\int_0^T |f - M_f|^2 \le \frac{T^2}{(2\pi)^2}\int_0^T |f'|^2, \quad \text{où on a posé} \quad M_f := \frac{1}{T}\int_0^T f.$$

c/ Quel est l'ensemble des $f \in C^1_T$ pour lesquels on a égalité ?

Exercice 7. (Convolution et Stone-Weierstrass "fort", -difficile)

Soit $\widetilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tel que $\widetilde{\phi} \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi} = 1$ et $\widetilde{\phi}(x) = 0$ pour tout $|x| \ge 1/4$. Pour $\delta > 0$, on pose $\widetilde{\phi_\delta}(x) := \frac{1}{\delta}\widetilde{\phi}\left(\frac{x}{\delta}\right)$.

a/ Faire un dessin approximatif de $\widetilde{\phi_\delta}$ et $\widetilde{\phi_\delta}$ pour un delta "petit".
b/ Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a $\widetilde{\phi_\delta} \ge 0$, $\widetilde{\phi_\delta}(x) = 0$ pour tout $|x| \ge \delta/4$, et $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi_\delta} = 1$.

Pour $0 < \delta \le 1$, on pose ϕ_δ la fonction 1-périodique telle que $\phi_\delta(x) = \widetilde{\phi_\delta}(x)$ pour tout $|x| < 1/2$.

c/ Montrer que pour tout $0 < \delta \le 1$, on a $\phi_\delta \in C^\infty_T$.
d/ Soit $f \in C^0_T$. Pour $\delta \ge 0$, on pose

$$\left(f * \phi_\delta\right)(x) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)\phi_\delta(y)\mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1/2} f(y)\phi_\delta(x-y)\mathrm{d}y.$$

Montrer la deuxième égalité, puis en déduire que $f * \phi_\delta \in C^\infty_T$.
e/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - \left(f * \phi_\delta\right)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(f(x) - f(x-y)\right)\phi_\delta(y)\mathrm{d}y = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(f(x) - f(x-y)\right)\phi_\delta(y)\mathrm{d}y$$

f/ Montrer que f est uniformément continue. En déduire que pour tout $\varepsilon \ge 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left\|f - \left(f * \phi_\delta\right)\right\|_\infty \le \varepsilon.$$

h/ (**Stone Weierstrass fort)** En déduire que les fonction C^∞_T sont denses dans C^0_T pour la norme uniforme. Puis en utilisant l'Exercice 5, montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dans C^0_T pour la norme uniforme.