TD5 : Séries de Fourier. Corrections

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Conventions. *Dans ce TD, si f est T périodique, on note $c_n^T(f) = \langle e_n^T, f\rangle_T$ avec $\langle f, g\rangle_T := \int_0^T \overline{f} g$ et $e_n^T(x) := \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}$. On note c_n et e_n lorsque la valeur de T est claire.*

Échauffement, quelques jolies formules

Exercice 1.
Soit f la fonction 1 périodique qui vaut $f(x) := |x|$ sur $(-1/2, 1/2)$.
a/ Montrer que f est continue périodique ($f \in C^0_{T=1}$).
b/ Montrer que

$$c_n(f) = \int_0^{1/2} 2x\cos(2n\pi x)\mathrm{d}x.$$

c/ Avec une intégration par partie, montrer que si n est paire différent de 0, alors $c_n(f) = 0$, et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_{2k+1}(f) = \frac{-1}{(2k+1)^2\pi^2}, \quad \text{et enfin} \quad c_0(f) = \frac{1}{4}.$$

d/ En déduire que

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{16} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^4\pi^4}, \quad \text{puis que} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

e/ Soit $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer que la série est convergente, puis que $S = \frac{1}{16}S + \frac{\pi^4}{96}$. En déduire que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

Solution

a/ Par définition, f est 1 périodique. f est continue sur tous les intervalles de type $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$. De plus, on a $f((n+\frac{1}{2})_-) = f((n+\frac{1}{2})_+) = \frac{1}{2}$, donc f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

b/ On a $T = 1$, donc

$$c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nx}\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\cos(2\pi nx)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\sin(2\pi nx)\mathrm{d}x.$$

Comme f est paire, la partie imaginaire s'annule (l'intégrande est une fonction impaire, intégrée sur un intervalle symétrique par rapport à 0). Pour la partie réelle, la contribution sur $(-1/2, 0)$ est égale à celle sur $(0, 1/2)$, donc

$$c_n f(f) = 2\int_0^{1/2} f(x)\cos(2\pi nx)\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} 2x\cos(2\pi nx)\mathrm{d}x.$$

c/ Si $n = 0$, on a directement $c_0(f) = \int_0^{1/2} 2x = [x^2]_0^{1/2} = \frac{1}{4}$. Si $n \neq 0$, on peut faire une intégration par partie. On obtient

$$c_n(f) = -\int_0^{1/2} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}\mathrm{d}x + \left[x\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right]_0^{1/2} + 0 = \frac{\cos(\pi n) - 1}{2\pi^2 n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}.$$

Si $n = 2k$ est paire, on a $c_{2k}(f) = 0$ (sauf pour $k = 0$), et si $n = 2k+1$ est impaire, on a $c_{2k+1}(f) = \frac{-1}{\pi^2(2k+1)^2}$.

d/ La fonction f est continue et périodique, donc on peut appliquer le théorème de Parseval. On a d'une part

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |f|^2(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} x^2\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{12}.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = c_0^2(f) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{2k+1}(f)|^2 = \frac{1}{16} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^4(2k+1)^4}.$$

En remarquant que chaque terme impaire puissance 4 apparaît deux fois dans la somme (pour $k \geq 0$ et pour $-k-1$), on obtient

$$\frac{1}{16} + \frac{2}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{12}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

e/ On pose $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Cette série est convergente par critère de Riemann. En séparant les termes pairs et impairs, on obtient

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}}_{=S}.$$

Ainsi,

$$\frac{15}{16} S = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et enfin} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2.
Soit f la fonction 1-périodique, qui vaut $f(x) := \mathrm{e}^{2\pi x}$ sur $[0, 1)$.
a/ Montrer que

$$c_n(f) := \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi(1 - \mathrm{i}n)}.$$

b/ En déduire que

$$\frac{\mathrm{e}^{4\pi} - 1}{4\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)^2}{4\pi^2(1 + n^2)}, \quad \text{puis que} \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{e}^{2\pi} + 1}{\mathrm{e}^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}.}$$

Solution

a/ La fonction f est 1-périodique par définition, et continue sur $[0, 1)$. Elle est donc continue par morceaux périodique sur $\mathbb{R}$, c'est à dire $f \in C^0_{T=1,m}$. On a, avec $T = 1$

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n x} \mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi(1-\mathrm{i}n)x}}{2\pi(1 - \mathrm{i}n)}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n} - 1}{2\pi(1 - \mathrm{i}n)} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi(1 - \mathrm{i}n)}$$

où on utilisé le fait que $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b/ On a $f \in C^0_{1,m}$, donc on peut appliquer le théorème de Parseval. On obtient

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{4\pi x} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{4\pi} - 1}{4\pi} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left|\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi(1 - \mathrm{i}n)}\right|^2 = \frac{(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)^2}{4\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + n^2}.$$

Excepté pour le terme $n = 0$, chaque terme $\frac{1}{1+n^2}$ apparaît deux fois dans la somme. Parseval donne donc

$$\frac{\mathrm{e}^{4\pi} - 1}{4\pi} = \frac{(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)^2}{4\pi^2} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}\right).$$

En utilisant que $\mathrm{e}^{4\pi} - 1 = (\mathrm{e}^{2\pi} - 1)(\mathrm{e}^{2\pi} + 1)$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{e}^{2\pi} + 1}{\mathrm{e}^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.
Soit f la fonction 2π-périodique, qui vaut $f(x) := |\sin(x)|$ sur $[-\pi, \pi]$.
a/ Montrer que f est continue périodique.
b/ Montrer que f est paire, puis que

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) \mathrm{d}x$$

c/ Montrer que (on rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$)

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}, \quad c_n(f) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}, \quad \text{puis que} \quad c_{-1}(f) = c_1(f) = 0.$$

d/ En déduire que $c_n(f) = 0$ si n est impair, puis que

$$\pi = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}, \quad \text{et enfin} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.}$$

e/ En évaluant $f(0)$, montrer que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

Solution

a/ f est 2π–périodique par définition. Elle est continue sur $(-\pi, \pi)$, et on a $f(\pi^-) = f(\pi^+) = 0$, donc f est continue périodique.

b/ f est paire. On a donc, avec $T = 2\pi$,

$$c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

c/ On a, pour $n \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{\cos((1+n)x)}{1+n} - \frac{\cos((1-n)x)}{1-n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(-1)^n + 1}{1+n} + \frac{(-1)^n+1}{1-n} \right) = \frac{(-1)^n+1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1-n^2}. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on obtient (le calcul est similaire pour $n = -1$)

$$c_1(f) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(2x)}{2} = 0.$$

d/ Si n est impair, on $1 + (-1)^n = 0$, donc $c_n(f) = 0$ (valide aussi pour $n = \pm 1$). Si $n = 2k$ est paire, on a

$$c_{2k}(f) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-(2k)^2}.$$

On applique le théorème de Parseval. On a

$$\|f\|_0^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \pi, \qquad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{2k}(f)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{8}{\pi} \frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$

A part pour le terme $k = 0$, chaque terme apparaît deux fois dans la somme. Ainsi,

$$\pi = \frac{8}{\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$

En particulier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Propriétés de la transformée de Fourier

Exercice 4.
a/ **(Dilatations)** Soit $\phi_1 \in C^0_{T=1}$. Pour $T > 0$, on pose $\phi_T(x) := \frac{1}{\sqrt{T}}\phi\left(\frac{x}{T}\right)$. Montrer que $\phi_T \in C^0_T$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n^T(\phi_T) = c_n^1(\phi_1).$$

b/ **(Translations)** Soit $\psi_0 \in C^0_T$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\psi_a(x) := \psi(x-a)$. Montrer que $\psi_a \in C^0_T$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\psi_a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}na} c_n(\psi_0).$$

c/ **(Conjuguée)** Soit $f \in C^0_T$. Montrer que $\overline{f} \in C^0_T$, puis que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n\left(\overline{f}\right) = \overline{c_{-n}\left(f\right)}$.

Solution

a/ On a $\phi_T(x+T) = \frac{1}{T}\phi(\frac{x}{T}+1) = \frac{1}{T}\phi(\frac{x}{T}) = \phi_T(x)$, car ϕ est 1-périodique. Donc ϕ_T est T-périodique. ϕ_T est continue comme composée de fonctions continues. Enfin, on a, avec le changement de variable $y = \frac{x}{T}$, donc $\mathrm{d}x = T\mathrm{d}y$,

$$c_T(\phi_T) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \phi_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{T}}\phi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi y}T\mathrm{d}y = c_n^1(\phi).$$

b/ On a, avec le changement de variable $y = x - a$, donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$,

$$c_n(\psi_a) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \psi(x-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \psi(x-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}n(x-a)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}na}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}na}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-a}^{T-a}\psi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}ny}\mathrm{d}y.$$

On intègre une fonction périodique sur une période, donc l'intégrale sur $(-a, T-a)$, est égale à celle sur $(0, T)$. Ainsi,

$$c_n(\psi_a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}na}c_n(\psi).$$

Fourier transforme des translations en des multiplications par des phases.

c/ Cette fois, on a

$$c_n(\overline{f}) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T \overline{f}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{T}}\overline{\int_0^T f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}\mathrm{d}x} = \overline{c_{-n}(f)}.$$

Exercice 5. (Dérivation simple)
a/ Soit $f \in C^1_T$ une fonction continûment dérivable. Montrer que

$$c_n(f') = \left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}\right)nc_n(f).$$

b/ Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)| < \infty$.
c/ En déduire que $S_N(f)$ converge uniformément vers f lorsque $N \to \infty$.
d/ **(Stone-Weierstrass faible)** Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans C^1_T pour la norme $\|\cdot\|_\infty$: pour tout $f \in C^1_T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{T}_N$ tel que $\|P - f\|_\infty < \varepsilon$.

e/ Montrer que si $f \in C^k_T$ est k-fois continûment dérivable, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^k}.$$

Remarque : Plus une fonction est régulière, plus ses coefficients décroissent vite vers 0.

Solution

a/, b/ et c/ et e/ sont dans le cours.

d/ Soit $f \in C^1_T$. D'après les questions précédentes, on a $\|S_N(f) - f\|_\infty \to 0$ lorsque $N \to \infty$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|S_{N_0}(f) - f\|_\infty < \varepsilon$. Le polynôme trigonométrique $S_{N_0}(f)$ est à distance ε de f pour la norme uniforme. On en déduit que les polynômes trigonométriques sont denses dans C^1_T, pour la norme uniforme.

Exercice 6. (Inégalité de Wirtinger)
a/ Soit $f \in C^1_T$ telle que $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$. Montrer que $c_0(f) = 0$, puis que (on pourra utiliser l'exercice précédent).

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \le \frac{T}{2\pi}|c_n(f')|.$$

b/ En déduire que pour tout $f \in C^1_T$, on a

$$\int_0^T |f - M_f|^2 \le \frac{T^2}{(2\pi)^2}\int_0^T |f'|^2, \quad \text{où on a posé} \quad M_f := \frac{1}{T}\int_0^T f.$$

c/ Quel est l'ensemble des $f \in C^1_T$ pour lesquels on a égalité ?

Solution

a/ Si $\int_0^T f = 0$, on a aussi

$$c_0(f) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f = 0.$$

b/ D'après l'exercice précédent, on a, pour $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{n}\frac{T}{2\mathrm{i}\pi}c_n(f'), \qquad \text{donc} \quad |c_n(f)| = \frac{1}{|n|}\frac{T}{2\pi}|c_n(f')| \le \frac{T}{2\pi}|c_n(f')|,$$

car $|n| \ge 1$. c/ Soit $g = f - \frac{1}{T}\int_0^T f$, de sorte que g est d'intégrale nulle : $\int_0^T g = 0$. On applique Parseval à g et que g'. On obtient

$$\int_0^T |f - M_f|^2 = \int_0^T |g|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(g)|^2 \le \frac{T}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(g')|^2 \le \frac{T^2}{(2\pi)^2}\int_0^T |g'|^2 = \frac{T}{2\pi}\int^T |f'|^2.$$

c/ En revenant à la question a/, on voit qu'on a égalité si $|c_n(g)| = \dfrac{T}{2\pi}|c_n(g')|$, ce qui n'arrive que pour $n = \pm 1$. Il faut donc que f soit de la forme $f(x) = \alpha e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}x} + \beta + \gamma e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}x} = a + b\cos(\frac{2\pi}{T}x) + c\sin(\frac{2\pi}{T}x)$.

Exercice 7. (Convolution et Stone-Weierstrass "fort", -difficile)
Soit $\widetilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tel que $\widetilde{\phi} \ge 0$, $\int_\mathbb{R} \widetilde{\phi} = 1$ et $\widetilde{\phi}(x) = 0$ pour tout $|x| \ge 1/4$. Pour $\delta > 0$, on pose $\widetilde{\phi_\delta}(x) := \frac{1}{\delta}\widetilde{\phi}\left(\frac{x}{\delta}\right)$.

a/ Faire un dessin approximatif de $\widetilde{\phi_\delta}$ et $\widetilde{\phi_\delta}$ pour un delta "petit".
b/ Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a $\widetilde{\phi_\delta} \ge 0$, $\widetilde{\phi_\delta}(x) = 0$ pour tout $|x| \ge \delta/4$, et $\int_\mathbb{R} \widetilde{\phi_\delta} = 1$.

Pour $0 < \delta \le 1$, on pose ϕ_δ la fonction 1-périodique telle que $\phi_\delta(x) = \widetilde{\phi_\delta}(x)$ pour tout $|x| < 1/2$.

c/ Montrer que pour tout $0 < \delta \le 1$, on a $\phi_\delta \in C^\infty_T$.
d/ Soit $f \in C^0_T$. Pour $\delta \ge 0$, on pose

$$(f * \phi_\delta)(x) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)\phi_\delta(y)\mathrm{d}y = \int_{-1/2}^{1/2} f(y)\phi_\delta(x-y)\mathrm{d}y.$$

Montrer la deuxième égalité, puis en déduire que $f * \phi_\delta \in C^\infty_T$.
e/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - (f * \phi_\delta)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} (f(x) - f(x-y))\,\phi_\delta(y)\mathrm{d}y = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (f(x) - f(x-y))\,\phi_\delta(y)\mathrm{d}y$$

f/ Montrer que f est uniformément continue. En déduire que pour tout $\varepsilon \ge 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f - (f * \phi_\delta)\|_\infty \le \varepsilon.$$

h/ (**Stone Weierstrass fort**) En déduire que les fonction C^∞_T sont denses dans C^0_T pour la norme uniforme. Puis en utilisant l'Exercice 5, montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dans C^0_T pour la norme uniforme.