TD6 : Séries de Fourier (suite).

Maths fondamentales, L2, PSL, 2023-2024 *D. Gontier, gontier@ceremade.dauphine.fr*

Conventions. *Dans ce TD, si f est T périodique, on note $c_n^T(f) = \langle e_n^T, f\rangle_T$ avec $\langle f, g\rangle_T := \int_0^T \overline{f} g$ et $e_n^T(x) := \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}$. On note c_n et e_n lorsque la valeur de T est claire.*

Échauffement

Exercice 1.
Montrer que si $f \in C_T^0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n(f)| \le \sqrt{T} \, \|f\|_\infty .$$

Exercice 2. Application du théorème de Fejér
Soit $f \in C_T^0$ telle que $\|S_N(f)\|_\infty \le 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $\|f\|_\infty \le 1$.

Exercice 3. Transformée de Fourier réelle
Soit $f \in C_{T=1}^0$ une fonction de classe C^1, 1-périodique. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n(f) := c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) := \mathrm{i}\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right). \end{cases}$$

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_n(f) := \frac{1}{2}\left(a_n(f) - \mathrm{i} b_n(f)\right), \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) := \frac{1}{2}\left(a_n(f) + \mathrm{i} b_n(f)\right).$$

b/ Montrer que

$$a_n(f) = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad b_n(f) = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\sin(2\pi n t)\,\mathrm{d}t.$$

c/ Montrer que si f est à valeurs réelles, alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réelles.
d/ Montrer que si f est une fonction paire $f(x) = f(-x)$, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que si f est une fonction impaire $f(x) = -f(x)$, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
e/ Montrer que

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^N \left[a_n(f)\cos(2\pi n x) + b_n(f)\sin(2\pi n x)\right].$$

f/ Montrer la formule de Parseval réelle :

$$\int_{-1/2}^{1/2} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right).$$

Exercice 4. Calcul de la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n}$
Soit $f(x)$ la fonction impaire, 2π-périodique, qui vaut $f(x) := \frac{\pi - x}{2}$ sur $[0, \pi]$.
a/ Montrer que

$$c_n(f) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

b/ Montrer que $c_0(f) = 0$, puis que pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on a (on utilisera une intégration par partie)

$$c_n(f) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}.$$

c/ Montrer que f est C^1 par morceaux. En déduire que pour tout $x \in (0, \pi)$, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}.}$$

Applications

Exercice 5. Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in C^0_{T=1}$ une fonction continue et 1-périodique. On note

$$I(f) := \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(intégrale)}, \quad \text{et} \quad I_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) \qquad \text{(somme de Riemann)}.$$

a/ Montrer que $I(f)$ peut-être vu comme le 0-ème coefficient de Fourier de f, c'est à dire : $I(f) = c_0(f)$.
b/ Montrer que pour la fonction e_k (k-ème mode de Fourier), on a

$$I_N(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \in N\mathbb{Z} \qquad \text{(k est un multiple de } N) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c/ Montrer que si $f \in C^1_1$ est dérivable, alors f est égale à sa série de Fourier partout, puis que

$$I_N(f) = \sum_{k \in N\mathbb{Z}} c_k(f), \quad \text{et} \quad |I_N(f) - I(f)| \le \sum_{k \in N\mathbb{Z}^*} |c_k(f)|.$$

d/ En déduire que si $f \in C^1_1$, alors $I_N(f)$ converge vers $I(f)$.
e/ Montrer que si $f \in C^{p+1}_1$, alors il existe une constante C telle que

$$|I_N(f) - I(f)| \le \frac{C}{N^p}.$$

Plus une fonction est régulière, plus la somme de Riemann converge vite vers l'intégrale.

Exercice 6. Résolution d'une équation différentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution continue et 2π-périodique à l'équation

$$f'(x) = f(x + \lambda).$$

a/ Montrer que si une solution f existe, alors $f \in C^\infty_{2\pi}$.
b/ Montrer que si f est solution, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left(\mathrm{i}n - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda n}\right) c_n(f) = 0.$$

c/ En déduire qu'il existe des solutions non nulles ssi $\lambda \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Quelles sont les solutions dans ce cas ?

Exercice 7. Formule sommatoire de Poisson

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support compact (il existe $L > 0$ tel que $F(x) = 0$ pour tout $|x| \ge L$). On pose

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(x + k).$$

a/ Montrer que f est bien définie, et est une fonction 1-périodique. Montrer que $f \in C^\infty_{T=1}$.
b/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, (on justifiera que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien définie)

$$c_n(f) = \int_{\mathbb{R}} F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\mathrm{d}t.$$

c/ En déduire la formule sommatoire de Poisson : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} F(x + k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\mathrm{d}t\right) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x}.$$