Exam "Modèles non-linéaires en mécanique quantique".

4 avril, 2023 *D. Gontier, david.gontier@ens.fr*

Énergie et rayon des étoiles

Dans cet examen, on s'intéresse à un modèle de fermions en interaction gravitationnelle (les particules s'attirent). On est en dimension $d = 3$, et le but est d'évaluer le bas du spectre de l'Hamiltonien fermionique (on fera attention au signe $-$)

$$H_N := \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{1}{2}\Delta_{x_i} \right) - \sum_{1 \le i < j \le N} \frac{1}{|x_i - x_j|}.$$

On utilise les notations du cours. Tous les résultats du cours peuvent être admis.

Exercice 1. Énergie de Thomas Fermi

On étudie pour commencer l'énergie semi-classique associée

$$E^{\mathrm{TF}}(N) := \inf \left\{ \mathcal{E}_N^{\mathrm{TF}}(\rho),\ \rho \in \mathcal{R}_N \right\}, \quad \textit{avec} \quad \mathcal{E}^{\mathrm{TF}}(\rho) := c_{\mathrm{TF}} \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{5/3} - \frac{1}{2} D(\rho, \rho), \quad \textit{où} \quad D(f, g) := \iint_{(\mathbb{R}^3)} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

et où c_{TF} est la constante de Thomas–Fermi du cours. Ici, l'espace de minimisation est

$$\mathcal{R}_N := \left\{ \rho \in L^{5/3}(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3), \quad \rho \ge 0, \ \int_{\mathbb{R}^3} \rho = N \right\}.$$

a/ Montrer que si $E^{\mathrm{TF}}(N)$ admet un minimiseur $\rho \in \mathcal{R}_N$, alors il en admet une infinité.
b/ Montrer que $E^{\mathrm{TF}}(N) = N^{7/3} E^{\mathrm{TF}}(1)$.

On admet que le problème $E^{\mathrm{TF}}(N)$ admet un **unique** *minimiseur ρ_N "à translation près", et que celui-ci est* **continue radial décroissant**. *On note $R_N \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ le plus petit rayon où $\rho_N(R_N) = 0$. R_N s'appelle le* **rayon de l'étoile**.

c/ Montrer qu'il existe $\mu_N \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{5}{3} c_{\mathrm{TF}} \rho_N^{2/3} = \left[\rho_N * \frac{1}{|\cdot|} - \mu_N \right]_+.$$

d/ Montrer que $\mu_N > 0$. En déduire que ρ_N est à support compact (donc $R_N < \infty$), et enfin que $\mu_N = \frac{N}{R_N}$.
e/ Quel est le lien entre ρ_N et ρ_1 ? Quel est le lien entre R_N et R_1 ? Cela suit-il votre intuition ?

Exercice 2. Interlude

Soit $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction mère radiale décroissante, à support dans $\mathcal{B}(0,1)$, avec $\|g\|_{L^2} = 1$. Pour $R > 0$, on pose $g_R := R^{-3/2} g(R^{-1}x)$. On pose enfin

$$\widetilde{D}_R(f, g) := \iint_{(\mathbb{R}^3)^2} f(x)f(y)w_R(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \textit{avec} \quad w_R(x) := \frac{1}{|x|} - |g_R|^2 * \frac{1}{|\cdot|} * |g_R|^2.$$

a/ Montrer que w_R est une fonction positive radiale décroissante, à support compact.
b/ Montrer que

$$\widehat{w}_R(k) = 4\pi \frac{1 - |\widehat{|g_R|^2}|^2(k)}{|k|^2}.$$

c/ En déduire que $f \mapsto \widetilde{D}_R(f, f)$ est positive et convexe.
d/ Montrer que $w_R \in L^p(\mathbb{R}^3)$ pour tout $1 \le p < 3$, et que

$$\|w_R\|_{L^p} \le \left(\frac{4\pi}{(3-p)} \right)^{1/p} R^{\frac{3}{p} - 1}.$$

e/ Montrer qu'il existe $C > 0$ indépendante de R telle que, pour tout $f \in L^{5/3}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\widetilde{D}_R(f, f) \leq C\|f\|_{5/3}^2 R^{7/5}.$$

Exercice 3. Énergie de Hartree, borne supérieure

On s'intéresse maintenant à l'énergie de Hartree associée

$$E^{\mathrm{H}}(N) := \inf\left\{\mathcal{E}_N^{\mathrm{H}}(\gamma),\ \gamma \in \mathcal{P}_N\right\}, \quad \textit{avec} \quad \mathcal{E}_N^{\mathrm{H}}(\gamma) := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(-\Delta\gamma) - \frac{1}{2}D(\rho_\gamma, \rho_\gamma),$$

sur l'espace de minimisation $\mathcal{P}_N := \left\{\gamma \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^3)), \quad 0 \leq \gamma \leq 1,\ \mathrm{Tr}\,(\gamma) = N\right\}$. *On admet de nouveau que pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$, *le problème* $E^{\mathrm{H}}(N)$ *a un minimiseur* $\gamma_N \in \mathcal{P}_N$.

a/ Montrer que

$$E^{\mathrm{H}}(N) \leq E^{\mathrm{TF}}(N) + \frac{1}{2}\widetilde{D}_R(\rho_N^{\mathrm{TF}}, \rho_N^{\mathrm{TF}}) + \frac{N}{2R^2}\|\nabla g\|_{L^2}^2.$$

b/ Montrer que

$$\left\|\rho_N^{\mathrm{TF}}\right\|_{L^{5/3}} = N^{7/5}\|\rho_1^{\mathrm{TF}}\|_{L^{5/3}}.$$

c/ En déduire qu'il existe une constante C indépendante de N telle que

$$E^{\mathrm{H}}(N) \leq E^{\mathrm{TF}}(N) + C\left(N^{14/5}R^{7/5} + \frac{N}{R^2}\right), \quad \text{puis que} \quad \boxed{E^{\mathrm{H}}(N) \leq E^{\mathrm{TF}}(1)N^{7/3} + O\left(N^{35/17}\right).}$$

Exercice 4. Borne inférieure

a/ On note m_N l'état cohérent construit à partir de γ_N, et $\rho_m = \rho_{m_N}$ et $\rho_N := \rho_{\gamma_N}$. Montrer que

$$E^{\mathrm{H}}(N) = \frac{1}{(2\pi)^d}\iint_{(\mathbb{R}^3)^2} \frac{1}{2}k^2 m_N(x,k)\mathrm{d}x\mathrm{d}k - \frac{1}{2}D(\rho_m, \rho_m) - \frac{1}{2}\widetilde{D}_R(\rho_N, \rho_N) - \frac{N}{2R^2}\|\nabla g\|_{L^2}^2.$$

b/ En déduire que

$$E^{\mathrm{H}}(N) \geq E^{\mathrm{TF}}(N) - \frac{1}{2}\widetilde{D}_R(\rho_N, \rho_N) - \frac{N}{2R^2}\|\nabla g\|_{L^2}^2.$$

c/ Montrer qu'il existe $c_{\mathrm{LT}}, C > 0$ indépendantes de N telle que

$$0 \geq c_{\mathrm{LT}}\int \rho_N^{5/3} - C\|\rho_N\|_{L^{6/5}}^2.$$

d/ Montrer que $\|\rho_N\|_{L^{6/5}} \leq \|\rho_N\|_{L^{5/3}}^{5/12}N^{7/12}$, puis qu'il existe C tel que $\|\rho_N\|_{L^{5/3}} \leq CN^{7/5}$.

e/ En déduire qu'il existe C tel que

$$E^{\mathrm{H}}(N) \geq E^{\mathrm{TF}}(N) - C\left(N^{14/5}R^{7/5} + \frac{N}{R^2}\right), \quad \text{puis que} \quad \boxed{E^{\mathrm{H}}(N) \geq E^{\mathrm{TF}}(1)N^{7/3} + O\left(N^{35/17}\right).}$$

Exercice 5. Bonus, non noté

On note $\lambda_-(H_N)$ *est le bas du spectre de* H_N, *agissant sur l'espace fermionique* $\bigwedge^N L^2(\mathbb{R}^3)$.

a/ (**Identité du viriel**) En posant $\gamma_\lambda(x,y) = \lambda^3\gamma_N(\lambda x, \lambda y)$ (Hartree) et en étudiant $\lambda \mapsto \mathcal{E}^H(\gamma_\lambda)$, montrer que

$$\mathrm{Tr}\,(-\Delta\gamma_N) = \frac{1}{2}D(\rho_N, \rho_N), \quad \text{puis que} \quad E^{\mathrm{H}}(N) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(-\Delta\gamma_N).$$

b/ Montrer qu'il existe une constante $c_{\mathrm{LO}} > 0$ telle que

$$\lambda_-(H_N) \leq \inf\left\{\mathcal{E}^{\mathrm{H}}(\gamma) + c_{\mathrm{LO}}\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\gamma^{4/3}, \quad \gamma \in \mathcal{P}_N\right\}.$$

Ceci montre l'asymptotique $N^{-7/3}E^{\mathrm{H}}(N) = E^{\mathrm{TF}}(1) < 0$. *On peut relativement facilement montrer qu'on a aussi* $N^{-7/3}\lambda_-(H_N) = E^{\mathrm{TF}}(1) < 0$, *où* $\lambda_-(H_N)$ *est le bas du spectre de* H_N.

Dans la pratique, ce modèle n'est pas très pertinent. On lui préférera un modèle avec une énergie cinétique **relativiste**, *comme le modèle de Chandrasekhar. Le lecteur pourra regarder l'article de Lieb et Yau correspondant :* *The Chandrasekhar Theory of Stellar Collapse as the Limit of Quantum Mechanics.*