# Calcul différentiel et optimisation
## Examen du 23 mai 2024

**Double licence IASO, L2, Université Paris-Dauphine-PSL, 2023-2024**

*Durée 2h, Calculatrice et documents non autorisés. Le barème est indicatif.*

---

**Exercice 1. (Questions de cours ? – 3 points)**

a/ Qu'est ce qu'une **submersion** en un point ?

b/ Comment s'appelle un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ qui minimise une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ?

c/ Soit $S := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$. Sans justifier, de quelle dimension est la surface $S$ ?

**Exercice 2. (Inversion globale – 6 points )**

Soit $0 \leq k < 1$ et $M \geq 0$, et soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leq M$ ($f$ est bornée) et $|f'(x)| \leq k$ ($f'$ est bornée par $0 \leq k < 1$). On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) := (x + f(y), y + f(x)).$$

a/ Montrer que $\varphi$ est une application de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa Jacobienne.

b/ Montrer que $\varphi$ est un difféomorphisme local en tout point. En déduire que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

c/ Montrer que si $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$, alors

$$|x_1 - x_2| \leq k|y_1 - y_2|, \quad \text{et} \quad |y_1 - y_2| \leq k|x_1 - x_2|.$$

En déduire que $\varphi$ est injective.

d/ Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

e/ En déduire que $\varphi$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

**Exercice 3. (Application du cours – 4 points)**

Soit $f(x, y) := \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y - x + y - 2$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, localement autour de 0, on a $f(x, y) = 0$ ssi $y = \varphi(x)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
3. Calculer $\varphi''(0)$.

**Exercice 4. (Optimisation sous contrainte – 7 points)**

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 1$.

a/ Montrer que pour $x$ suffisamment proche de 0, il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $g(x, y(x)) = 0$.

b/ Dessiner le graphe de la fonction $x \mapsto y(x)$.

c/ Montrer que la courbe de niveau 0 de $g$ définit une surface compacte de $\mathbb{R}^2$, que l'on dessinera.

d/ Préciser l'espace tangent à cette surface au point $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

On considère maintenant la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + \frac{1}{3}y^3$.

e/ Calculer les points critiques de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

f/ Montrer que l'on peut trouver deux suites de points $(\mathbf{a}_n)$ et $(\mathbf{b}_n)$ de $\mathbb{R}^2$, qui convergent vers $\mathbf{0}$, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\mathbf{a}_n) < 0$ et $f(\mathbf{b}_n) > 0$.

g/ La fonction $f$ est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}^2$ ?

h/ On veut maintenant étudier le problème d'optimisation

$$\inf \{f(x, y), \quad g(x, y) = 0\}.$$

Justifier pourquoi ce problème admet un minimiseur.

i/ Montrer que ce problème admet 6 points critiques. Lequel de ces points est le minimiseur ?

j/ Quelle est la nature du point $(1/2, 1/2)$ ?