Calcul différentiel et optimisation
Examen du 23 mai 2024

Double licence IASO, L2, Université Paris-Dauphine-PSL, 2023-2024

Durée 2h, Calculatrice et documents non autorisés. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (Questions de cours ? – x points)

a/ Qu'est ce qu'une **submersion** en un point ?

b/ Comment s'appelle un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ qui minimise une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$?

c/ Soit $S := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$. Sans justifier, de quelle dimension est la surface S ?

Solution

a/ Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. On dit que f est une submersion en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ si $\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)$ est surjective.

b/ Un tel point $\mathbf{x}$ est un **minimiseur** de f.

c/ S est une surface de dimension $d-1$ dans $\mathbb{R}^d$ (c'est la sphère de $\mathbb{R}^d$).

Exercice 2. (Inversion globale – 6 points)

Soit $0 \le k < 1$ et $M \ge 0$, et soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \le M$ (f est bornée) et $|f'(x)| \le k$ (f' est bornée par $0 \le k < 1$). On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) := (x + f(y), y + f(x)).$$

a/ Montrer que φ est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa Jacobienne.

b/ Montrer que φ est un difféomorphisme local en tout point. En déduire que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

c/ Montrer que si $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$, alors

$$|x_1 - x_2| \le k|y_1 - y_2|, \quad \text{et} \quad |y_1 - y_2| \le k|x_1 - x_2|.$$

En déduire que φ est injective.

d/ Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

e/ En déduire que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Solution

a/ φ est une application de classe C^1, comme composition d'applications de classe C^1 (on rappelle que f est C^1). La Jacobienne de φ est

$$J_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}.$$

b/ On a $\det J_\varphi(x, y) = 1 - f'(y)f'(x) \ge 1 - k^2 > 0$ car $k < 1$. Donc la Jacobienne de φ est inversible en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale, et déduire que φ est un C^1–difféomorphisme local autour de chaque point. En particulier, $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

c/ L'égalité $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ se réécrit

$$\begin{cases} x_1 + f(y_1) = x_2 + f(y_2) \\ y_1 + f(x_1) = y_2 + f(x_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = f(y_2) - f(y_1) \\ y_1 - y_2 = f(x_2) - f(x_1) \end{cases} \implies \begin{cases} |x_1 - x_2| = |f(y_2) - f(y_1)| \le k|y_2 - y_1| \\ |y_1 - y_2| = |f(x_2) - f(x_1)| \le k|x_2 - x_1| \end{cases},$$

où on a utilisé le théorème d'accroissement fini pour la dernière inégalité. En particulier, on a

$$|x_1 - x_2| \le k^2|x_1 - x_2|,$$

donc $x_1 = x_2$, car $k^2 < 1$.

d/ Soit (a_n, b_n) une suite de points de $\mathbb{R}^2$ dans l'image de φ, qui converge vers un certain (a_*, b_*). Soit (x_n, y_n) la suite des antécédents de (a_n, b_n). On a

$$\begin{cases} x_n + f(y_n) = a_n \\ y_n + f(x_n) = b_n. \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} |x_n| \le |a_n| + |f(y_n)| \\ |y_n| \le |b_n| + |f(x_n)|. \end{cases}$$

Comme la suite (a_n, b_n) converge, les suites (a_n) et (b_n) sont bornées. De plus, f est une fonction bornée. On en déduit que les suites (x_n) et (y_n) sont bornées. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elles convergent vers x_* et y_* respectivement. Par continuité de φ, on a

$$\varphi(x_*, y_*) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n, b_n) = (a_*, b_*).$$

Ceci prouve que (a_*, b_*) a un antécédent, donc que (a_*, b_*) est dans l'image de φ. Ceci étant vrai pour toute suite (a_n, b_n), on en déduit que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est fermé.
e/ L'ensemble $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathbb{R}^2$, non-vide, donc $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. On en déduit que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui est localement un C^1-difféomorphisme. Donc φ est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. (Application du cours)

Soit $f(x, y) := \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y - x + y - 2$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, localement autour de 0, on a $f(x, y) = 0$ ssi $y = \varphi(x)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
3. Calculer $\varphi''(0)$.

Solution

a/ La fonction f est de classe C^∞, et vérifie $f(0, 0) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = \mathrm{e}^y + 1$, donc $\partial_y f(0, 0) = 2$ est non nul. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites. On en déduit qu'il existe un voisinage U de 0, un voisinage V de 0 et une application $\varphi : U \to V$ tel que, pour tout $(x, y) \in U \times V$, on a

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ssî} \quad y = \varphi(x).$$

De plus, comme f est C^∞, l'application φ est aussi C^∞.
b/ Comme $f(0, 0) = 0$, et $(0, 0) \in U \times V$, on en déduit que $\varphi(0) = 0$. De plus, comme $f(x, \varphi(x)) = 0$, on a, en dérivant,

$$\partial_x f(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

donc

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = 0.$$

c/ En dérivant une deuxième fois, on obtient

$$\partial^2_{xx} f(x, \varphi(x)) + 2\partial^2_{xy} f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \partial^2_{yy} f(x, \varphi(x))|\varphi'(x)|^2 + \partial_y f(x, \varphi(x))\varphi''(x) = 0.$$

En évaluant en $(0, 0)$, et en utilisant que $\varphi'(0) = 0$, on obtient

$$1 + 0 + 0 + 2\varphi''(0) = 0, \quad \text{donc} \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{2}.$$

On aurait pu aussi chercher φ sous la forme $\varphi(x) = 0 + 0 + \frac{c}{2}x^2 + o(x^2)$, où on a noté $c := \varphi''(0)$, et injecter ce développement de Taylor dans l'équation $f(x, y) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\varphi(x)} - x + \varphi(x) - 2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1 + \frac{c}{2}x^2 + o(x^2) - x + \frac{c}{2}x^2 + o(x^2) - 2 \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}x^2 + \frac{c}{2}x^2 + o(x^2), \quad \text{donc} \quad c = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 4. (Optimisation sous contrainte)

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 1$.

a/ Montrer que pour x suffisamment proche de 0 , il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $g(x, y(x)) = 0$.

b/ Dessiner le graphe de la fonction $x \mapsto y(x)$.

c/ Montrer que la courbe de niveau 0 de g définit une surface compacte de $\mathbb{R}^2$, que l'on dessinera.

d/ Préciser l'espace tangent à cette surface au point $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + \frac{1}{3}y^3$.

e/ Montrer que l'on peut trouver deux suites de points $(\mathbf{a}_n)$ et $(\mathbf{b}_n)$ de $\mathbb{R}^2$, qui convergent vers $\mathbf{0}$, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\mathbf{a}_n) < 0$ et $f(\mathbf{b}_n) > 0$.

f/ La fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}^2$?

g/ On veut maintenant étudier le problème d'optimisation

$$\inf\{f(x,y), \quad g(x,y) = 0\}.$$

Justifier pourquoi ce problème admet un minimiseur.

h/ Montrer que ce problème admet 6 points critiques. Lequel de ces points est le minimiseur ?

i/ Tracer grossièrement l'allure de quelques courbes de niveau de f et expliquer comment le problème de minimisation de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ se traduit géométriquement.

Solution

a/ On peut appliquer le théorème des fonctions implicites au point $(x,y) = (0,1)$, mais ici, ce n'est même pas trop la peine. On note simplement que, si $g(x,y) = 0$ avec $y > 0$, alors

$$3x^2 + y^2 = 1, \quad \text{donc} \quad y = \sqrt{1 - 3x^2},$$

qui est valide dès que $|x| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c/ La surface $g = 0$ est une ellipse. Elle est évidemment fermée (car g est continue) et bornée, donc compacte.

d/ On rappelle que $T_{\mathbf{x}}S = \operatorname{Ker} dg(\mathbf{x}) = (\nabla g(\mathbf{x}))^{\perp}$. Dans notre cas, on a

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Ainsi, au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on a

$$T_{(1/2,1/2)}S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3x + y = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = -3x\right\}.$$

Le plan tangent affine est donc d'équation $y(x) = 2 - 3x$, où la constante 2 est trouvée pour que $y(1/2) = 1/2$.

e/ On prend $\mathbf{a}_n = (-1/n, 0)$ et $\mathbf{b}_n = (1/n, 0)$, qui vérifient $f(\mathbf{a}_n) < 0 < f(\mathbf{b}_n)$.

f/ La fonction partielle $f(x,0) = x^3$ n'est ni convexe, ni concave, donc f non plus.

g/ La fonction f est continue sur l'ensemble compact $\{g = 0\}$, donc f atteint son minimum sur cet ensemble.

h/ On cherche à résoudre les équations d'Euler–Lagrange, de la forme

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda 6x \\ y^2 = \lambda 2y \\ 3x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \iff \begin{cases} x(x - 2\lambda) = 0 \\ y(y - 2\lambda) = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

1er cas : Si $x = 0$. Dans ce cas, la dernière équation donne $y = \pm 1$, (et $\lambda = \pm\frac{1}{2}$). Cela donne deux points critiques

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2ème cas : Si $y = 0$. On a plutôt $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (et $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$). On trouve deux autres points critiques :

$$\mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3ème cas : si $x \neq 0$ **et** $y \neq 0$. Dans ce cas, les équations se simplifient en

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ 3x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

On trouve $16\lambda^2 = 1$, donc $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, et les points critiques correspondant

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour trouver l'optimum, on évalue f sur chacun de ces 6 points critiques. On trouve

$$f(\mathbf{a}_1) = \frac{1}{3}, \quad f(\mathbf{a}_2) = -\frac{1}{3}, \quad f(\mathbf{a}_3) = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad f(\mathbf{a}_4) = \frac{-1}{3\sqrt{3}} \quad f(\mathbf{a}_5) = \frac{1}{6}, \quad f(\mathbf{a}_6) = \frac{-1}{6}.$$

Ainsi, le minimiseur est le point $\mathbf{a}_2$.