Calcul différentiel et optimisation
Partiel du 21 mars 2025

Double licence IASO, L2, Université Paris-Dauphine-PSL, 2024-2025

Durée 2h, Calculatrice et documents non autorisés. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (Questions de cours – 3 points)

a/ Donner la définition d'une fonction coercive.

b/ Donner la définition d'une matrice définie positive.

c/ Donner la définition d'un point selle.

Exercice 2. (Étude de points critiques – 4 points)

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - 4(x-y)^2.$$

Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature. En particulier,

a/ Montrer que $(0,0)$ est un point critique dégénéré.

b/ En étudiant les fonctions $x \mapsto f(x,0)$, et $x \mapsto f(x,x)$, montrer que $(0,0)$ est un point selle.

Exercice 3. (Une propriété d'Arctan – 5 points)

a/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $f(x,y) = F(x) + G(y)$, avec $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que f est de classe C^2, et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

On admettra que la réciproque est vraie : si f vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, alors f est de la forme $f(x,y) = F(x) + G(y)$. Dans la suite, on pose $f(x,y) := \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

b/ Quel est le domaine de définition de f ? Représenter graphiquement ce domaine.

c/ Montrer que f est C^2 sur son domaine de définition, et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

d/ En déduire que

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y).$$

Cette égalité n'est vraie que si $xy < 1$... C'est une question de **connexité** *du domaine - hors programme-*

e/ Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4. (Règle de la chaîne ? – 4 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et soit

$$F(x,y) := \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right).$$

a/ Quel est le domaine de définition D_F de F. Le représenter graphiquement.

b/ Montrer que F est de classe C^1 sur D_F, puis calculer les dérivées partielle de F en fonction de celles de f.

c/ Montrer que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + F = 0.$$

Exercice 5. (Régularité – 4 points)

On pose

$$f(x,y) := \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

a/ Montrer que f est continue.

b/ Calculer les dérivées partielles de f.

c/ Est-ce que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?