Calcul différentiel et optimisation
Partiel du 21 mars 2025

Double licence IASO, L2, Université Paris-Dauphine-PSL, 2024-2025

Durée 2h, Calculatrice et documents non autorisés. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (Questions de cours – 3 points)

a/ Donner la définition d'une fonction coercive.

b/ Donner la définition d'une matrice définie positive.

c/ Donner la définition d'un point selle.

Solution

Voir cours.

Exercice 2. (Étude de points critiques – 4 points)
On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - 4(x-y)^2.$$

Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature. En particulier,

a/ Montrer que $(0,0)$ est un point critique dégénéré.

b/ En étudiant les fonctions $x \mapsto f(x,0)$, et $x \mapsto f(x,x)$, montrer que $(0,0)$ est un point selle.

Solution

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est un polynôme. On calcule les dérivées premières, et on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8(x-y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 8(x-y).$$

Pour trouver les points critiques, on doit résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ou encore

$$\begin{cases} x^3 = 2(x-y) \\ y^3 = -2(x-y). \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on trouve $x^3 + y^3 = 0$, ou encore $x = -y$. En reportant dans la première équation, on trouve $x^3 = 4x$, soit $x(x^2-4) = 0$, donc $x = 0, 2$ ou -2. Ainsi, il y a trois points critiques : les points $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$. On calcule maintenant les dérivées secondes de f, et on trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8.$$

On a utilisé le Lemme de Schwarz pour la deuxième égalité. Ainsi, la hessienne de f est

$$H_f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 3y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Étude du point $(0,0)$.</u> On trouve $H_f(0,0) = 4\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut 0, donc $(0,0)$ est un point critique dégénéré, et on ne peut pas conclure directement. On a $f(0,0) = 0$. En remarquant que $f(x,0) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2-4)$ est toujours négatif pour $|x| < 2$, on en déduit que $(0,0)$ est un maximum local le long de la droite $y = 0$. En revanche, on a $f(x,x) = 2x^4$ qui est toujours positif, et on en déduit que $(0,0)$ est un minimum local le long de la droite $y = x$. Ainsi, $(0,0)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local, donc est un point selle. <u>Étude du point $(2,-2)$.</u> On trouve $H_f(2,-2) = 4\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, de déterminant $16 \times 96 > 0$, et de trace $4 \times 20 > 0$. On en déduit que cette matrice est définie positive, donc que le point $(2,-2)$ est un minimum local. <u>Étude du point $(-2,2)$.</u> L'étude est similaire (la hessienne est la même). le point $(-2,2)$ est un minimum local. En fait, en remarquant que f est coercive (pas si simple), on peut montrer que les points $(2,-2)$ et $(-2,2)$ sont les minimiseurs globaux de f.

Exercice 3. **(Une propriété d'Arctan – 5 points)**

a/ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $f(x, y) = F(x) + G(y)$, avec $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que f est de classe C^2, et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

On admettra que la réciproque est vraie : si f vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, alors f est de la forme $f(x, y) = F(x) + G(y)$.
Dans la suite, on pose $f(x, y) := \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

b/ Quel est le domaine de définition de f ? Représenter graphiquement ce domaine.

c/ Montrer que f est C^2 sur son domaine de définition, et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

d/ En déduire que

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y).$$

Cette égalité n'est vraie que si $xy < 1$... C'est une question de **connexité** *du domaine - hors programme-*

e/ Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution

a/ On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F'(x)$, qui ne dépend pas de y, puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.
b/ La fonction f est bien définie dès que $xy \neq 1$, donc sur son domaine maximale $D_f := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 1\right\}$. Il s'agit de tout le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.
c/ La fonction f est C^∞ comme composé de fonctions usuelles sur le domaine de définition. On a $\arctan(u) = \frac{u'}{1+u^2}$, ce qui donne

$$\partial_x f = \frac{\frac{(1-xy)+(x+y)y}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

qui ne dépend que de x, donc $\partial^2_{yx} f = 0$.
d/ On en déduit que f est de la forme $f(x, y) = F(x)+G(y)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $G(0) = 0$ (quitte à ajouter et soustraire des constantes à F et G). En prenant $y = 0$, on identifie $F(x) = \arctan(x)$, et en particulier $F(0) = 0$. En prenant $x = 0$, on obtient de même $G(y) = \arctan(y)$.
e/ Prenons $x > 0$. En prenant la limite $y \to \frac{1}{x}$ avec $xy < 1$, on a

$$\frac{x+y}{1-xy} \to +\infty, \quad \text{donc} \quad \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \to \frac{\pi}{2}.$$

Par ailleurs, on a $\arctan(x) + \arctan(y) \to \arctan(x) + \arctan(1/x)$, et le résultat suit.

Exercice 4. **(Règle de la chaîne ? – 4 points)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et soit

$$F(x, y) := \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right).$$

a/ Quel est le domaine de définition D_F de F. Le représenter graphiquement.

b/ Montrer que F est de classe C^1 sur D_F, puis calculer les dérivées partielle de F en fonction de celles de f.

c/ Montrer que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + F = 0.$$

Solution

a/ F est bien défini si $x \neq 0$ et si $y \neq 0$. Donc $D_F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0, y \neq 0\right\}$. C'est le plan $\mathbb{R}^2$ privé des

deux droites $x=0$ et $y=0$.
b/ F est de classe C^1 sur son domaine de définition comme composé de fonctions C^1. On a

$$\partial_x F = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}\frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{et} \quad \partial_y F = -\frac{1}{x}\frac{x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

c/ On trouve donc

$$x\partial_x F + y\partial_y F + F = \left[-\frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)\right] + \left[-\frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)\right] + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Exercice 5. (Régularité – 4 points)
On pose

$$f(x,y) := \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

a/ Montrer que f est continue.

b/ Calculer les dérivées partielles de f.

c/ Est-ce que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Solution

a/ La fonction $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ est de classe C^∞ sur son domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composée de fonctions usuelles sur son domaine. Montrons que f admet un prolongement par continuité en $(0,0)$ avec $f(0,0)=0$. On a

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} = |x| \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)}_{\leq 1} \leq |x| \leq (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} = \|(x,y)\| = \|(x,y) - (0,0)\|.$$

Ceci montre que $f(x,y) \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b/ On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)3x^2 - x^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(-2y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

c/ Montrons que $\partial_y f$ n'est pas continue. En regardant la suite $(x_n, y_n) = (1/n, 0)$, on trouve que $\partial_y f(x_n, y_n) = 0$, qui converge vers 0. Et en regardant la suite $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$, on trouve $\partial_y f(x_n, y_n) = -1/2$, qui converge vers $1/2$. Donc $\partial_y f$ n'est pas continue en $(0,0)$, et f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
