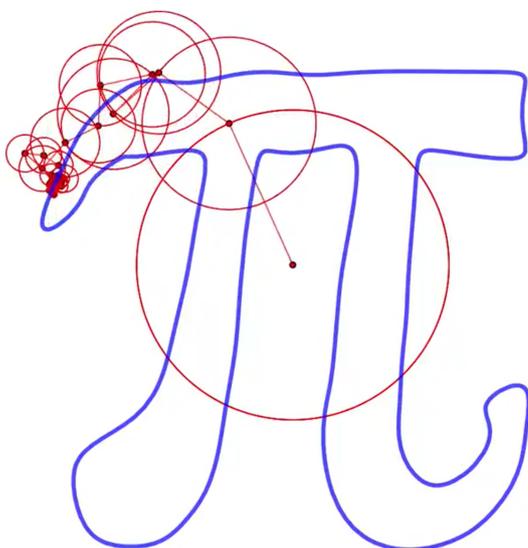

Cours Analyse (Maths fondamentales)

Cours de L2, 2023-2024
Université PSL

David Gontier

(version du 26 avril 2024).



Cours Analyse (Maths fondamentales) de [David Gontier](#) est mis à disposition selon les termes de la [licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International](#).

1	Séries Entières	9
1.1	Rayon de convergence	9
1.1.1	Définitions	9
1.1.2	Comparaison de rayons de convergence	11
1.1.3	Calcul de rayon de convergence	12
1.2	Opérations sur les séries entières	13
1.3	Fonctions développables en séries entières	14
1.3.1	Définitions et propriétés	14
1.3.2	Arbre de décision des séries entières	16
1.3.3	Développement de Taylor	16
1.4	Quelques exemples	17
1.4.1	La fonction exponentielle	17
1.4.2	Les fonctions trigonométriques.	18
1.4.3	Fractions rationnelles	18
1.4.4	Logarithme	19
1.4.5	Arctan	19
1.4.6	Fonction puissance $(1 + x)^\alpha$.	20
1.4.7	Fonction arcsin	21
1.5	Comportement sur le cercle de convergence	22
1.5.1	Le théorème d'Abel	22
1.5.2	Applications : quelques jolies formules	23
2	Séries de Fourier	25
2.1	Introduction	25
2.2	Fonctions continues par morceaux	27
2.2.1	Premières définitions	27
2.2.2	Un produit scalaire	28
2.2.3	Coefficients de Fourier	28
2.3	Polynômes trigonométriques	29
2.3.1	Définitions et théorèmes	29
2.3.2	Symétries	30
2.3.3	Meilleur polynôme trigonométrique	30
2.3.4	Densité des polynômes trigonométriques dans $C_{T,m}^0$, pour la norme L^2	31
2.4	Parseval et Riemann-Lebesgue dans $C_{T,m}^0$	33
2.4.1	Les grands théorèmes dans $C_{T,m}^0$	33
2.4.2	Un exemple important	33

2.4.3	Et le théorème d'inversion de Fourier ?	35
2.5	Théorème d'inversion de Fourier avec convergence uniforme	35
2.5.1	Dérivabilité et transformée de Fourier	35
2.5.2	Critère de convergence uniforme	36
2.6	Théorème d'inversion de Fourier avec la convergence simple	36
2.6.1	Noyau de Dirichlet	37
2.6.2	Convergence simple pour les fonctions dérivables par morceaux	37
2.6.3	Exemple	39
2.6.4	Récapitulatif	39
2.7	Théorème de Féjer (Stone-Weierstrass périodique)	39
2.7.1	Noyau de Féjer	39
2.7.2	Preuve du théorème de Féjer	41
2.8	Compléments	41
2.8.1	Le phénomène de Gibbs	41
2.8.2	La convolution	43
3	Intégrales à Paramètres	45
3.1	Rappels sur les intégrales	45
3.1.1	Intégrales de Riemann (fonction continue sur intervalle fermé borné)	45
3.1.2	Extension aux fonctions continues par morceaux, sur un interval fermé borné	46
3.1.3	Extension à des intervalles quelconques pour des fonctions positives	46
3.1.4	Extension à des intervalles quelconques, cas général	46
3.1.5	Conventions	48
3.2	La théorème de convergence dominée (TCD)	48
3.3	Intégration d'une série de fonction	49
3.3.1	Exemple type	50
3.4	Intégrales à paramètres	50
3.4.1	Une démonstration alternative, sans le TCD.	51
3.4.2	Dérivabilité sous le signe intégrale	52
3.4.3	Exemple type	53
4	Transformée de Fourier	54
4.1	Introduction	54
4.2	Transformée de Fourier pour les fonctions intégrables	55
4.2.1	Premières propriétés	55
4.2.2	Régularité	56
4.2.3	Produit de convolution	57
4.3	Transformée de Fourier inverse	58

Ces notes de cours ont été écrites dans le cadre du cours *Maths Fondamentales, Analyse*¹ (L2, Université PSL).

Le thème général du cours concerne la représentation de fonctions sous forme de séries. Dans le chapitre 1, on s'intéressera aux **séries entières**, et dans le chapitre 2, aux **séries de Fourier**. Au chapitre 3, nous étudierons les **intégrales à paramètres**, afin de conclure au chapitre 4 sur la **transformée de Fourier**.

Je remercie Nicolas Forien et Yijun Wan pour la relecture de ce cours.

Nous commençons par quelques rappels importants.

Rappels sur les différentes notions de convergence pour les fonctions

Convergence simple et convergence uniforme

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 0.1 (Convergence simple). *On dit que (F_n) converge simplement vers F sur I si*

$$\forall x \in I, \quad F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x).$$

Définition 0.2 (Convergence uniforme). *On dit que (F_n) converge uniformément vers F sur I si*

$$\sup_{x \in I} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Lorsque le contexte est clair (lorsqu'on sait qui est I), on écrit

$$\|F_n - F\|_\infty := \sup_{x \in I} |F_n(x) - F(x)|.$$

La convergence uniforme s'écrit aussi $\|F_n - F\|_\infty \rightarrow 0$. La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fautive, comme le montre le contre-exemple suivant.

Exemple 0.3. *La suite $F_n(x) = x^n$ converge simplement sur $I = [0, 1]$ vers*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme (les fonctions F_n sont continues, mais pas la fonction F , voir Lemme suivant).

1. Page web du cours [ici](#).

La convergence uniforme a un lien fort avec la continuité, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 0.4 (Continuité). *Si (F_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers F sur I , alors F est continue sur I .*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N assez grand pour que $\|F - F_N\|_\infty \leq \varepsilon$. Pour tout $x, y \in I$, on a

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F(x) - F_N(x)| + |F_N(x) - F_N(y)| + |F_N(y) - F(y)| \\ &\leq \varepsilon + |F_N(x) - F_N(y)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Fixons $x \in I$. Comme F_N est continue en x , il existe $\delta > 0$ tel que $\forall y \in I$ avec $|y - x| < \delta$, on a $|F_N(x) - F_N(y)| < \varepsilon$. On en déduit que pour tout $y \in I$ avec $|y - x| < \delta$, on a $|F(x) - F(y)| \leq 3\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, F est continue en x . Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, F est continue sur I . \square

Lemme 0.5 (Intégrabilité). *Soit (F_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers F sur $I = [a, b]$ un intervalle **fini**, et soit*

$$G_n(x) := \int_a^x F_n \quad \text{et} \quad G(x) := \int_a^x F$$

les primitives correspondantes. Alors la suite (G_n) converge uniformément vers G sur $I = [a, b]$. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n = \int_a^b F.$$

On écrit aussi

$$\boxed{\text{Si } F_n \text{ CVU (vers } F), \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} F_n.}$$

Démonstration. On a

$$|G_n(x) - G(x)| = \left| \int_a^x (F_n - F) \right| \leq \int_a^x |F_n - F| \leq \int_a^b \|F_n - F\|_\infty = (b - a) \|F_n - F\|_\infty.$$

La borne de droite est indépendante de x , et tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui prouve le résultat. \square

On en déduit le lemme de dérivation.

Lemme 0.6. *Soit (F_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur l'intervalle **fini** I , et soit $a \in I$. On suppose que*

- $(F_n(a))$ converge vers α ,
- la suite des dérivées (F'_n) converge uniformément vers une fonction G .

Alors (F_n) converge uniformément sur I vers une primitive de G . Plus exactement, (F_n) converge uniformément vers

$$F(x) := \alpha + \int_a^x G(s) ds.$$

On retiendra que si les dérivées convergent uniformément, alors les fonctions convergent uniformément. Comme F est une primitive de G , on a $F'(x) = G(x)$. Une version simple de retenir le lemme précédent est d'écrire :

$$\boxed{\text{Si } (F_n) \text{ CVU vers } F \text{ et } (F'_n) \text{ CVU vers } G, \text{ alors } F' = G, \text{ ou encore, } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n.}$$

Démonstration. On remarque que $F' = G$ et $F(a) = \alpha$. On utilise le Lemme précédent avec la suite (F'_n) . Pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left\| F_n(a) + \int_a^x F'_n(s) ds - F(a) - \int_a^x F'(s) ds \right\|_{\infty} \\ &= \left\| F_n(a) - F(a) + \int_a^x (F'_n - F')(s) ds \right\| \leq |F_n(a) - \alpha| + \int_a^b \|F'_n - G\|_{\infty}. \end{aligned}$$

La constante de droite est indépendante de $x \in I$. En prenant le sup sur tous les x , puis en faisant la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient $\|F_n - F\|_{\infty} \rightarrow 0$. \square

La réciproque ne marche pas : ce n'est pas parce que la suite (F_n) CVU vers F que la suite (F'_n) converge vers F' . Voici quelques contre-exemples.

Exemples 0.7.

- La suite $F_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1, 1]$, mais pas les dérivées ($|x|$ n'est même pas dérivable).
- La suite $F_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément vers 0, mais pas les dérivées.

Convergence normale

Lorsque F_n est de la forme $F_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$, on parle de **série de fonctions**.

Définition 0.8 (Convergence normale). On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur I si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < \infty.$$

Attention, la convergence normale n'a pas de limite : on parle de convergence normale, mais pas de convergence normale vers ...

Si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors on a

$$\|F_{n+p} - F_n\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}.$$

Le terme de droite est indépendant de p , et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (c'est le reste d'une série convergente). On en déduit que la suite (F_n) est *de Cauchy* (on utilisera cette notion que dans ce paragraphe). De plus, pour tout $I \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{R} , noté $C^0(I, \mathbb{R})$, est un espace de Banach. Donc la suite (F_n) converge vers une limite. On en déduit le lemme suivant :

Lemme 0.9. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur I telle que la série $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors il existe $F \in C^0(I, \mathbb{R})$ telle que $F_n := \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformément vers F sur I .

On écrit généralement la limite F comme étant

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad \text{dans le sens} \quad \left\| F - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N f_n \right) \right\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Tous les théorèmes précédents s'appliquent. On a par exemple :

Si $\sum f_n$ CVN, alors $\int_a^b \sum_n f_n = \sum_n \int_a^b f_n$.

$$\text{Si } \sum f_n \text{ et } \sum f'_n \text{ CVN, alors } \sum_n f'_n = \left(\sum_n f_n \right)' .$$

À retenir

- Convergence normale \implies Convergence uniforme \implies Convergence simple (CVN \implies CVU \implies CVS). Les réciproques sont fausses.
- Si convergence uniforme, alors on peut permuter *limite* et *intégrale*.
- Convergence uniforme des dérivées \implies Convergence uniforme, et on peut permuter *limite* et *dérivation*.

Les *séries entières* forment une famille de fonctions qui ont de bonnes propriétés :

- Elles peuvent être représentées facilement (intérêt numérique) ;
- Elles sont stables par addition, soustraction, multiplication et même division ;
- Elles sont C^∞ , et sont stables par dérivation/intégration.

Les séries entières peuvent être vues comme une extension de la famille des *polynômes* : ce sont en quelque sorte des *polynômes de degré infini*...

1.1 Rayon de convergence

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 (Série Entières). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe. La série entière de terme générale a_n est la série (formelle)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{notée aussi } \sum_n a_n z^n \quad \text{ou } \sum a_n z^n.$$

Pour le moment, tout est formel ! La variable z est une variable muette. C'est à rapprocher des polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, où la variable X est formelle.

On aimerait donner un sens à cette série, et parler de la **fonction** $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Pour cela, il faut que la série soit convergente. On note

$$\mathcal{C} := \left\{ r \geq 0, \quad \text{la série } \sum_n a_n r^n \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} := \left\{ r \geq 0, \quad \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée} \right\}.$$

On a toujours $0 \in \mathcal{C}$ et $0 \in \mathcal{B}$, donc ces ensembles sont non vides. On pose

$$R_{\mathcal{C}} := \sup \mathcal{C} \in [0, \infty], \quad \text{et} \quad R_{\mathcal{B}} := \sup \mathcal{B} \in [0, \infty].$$

Si la série $\sum a_n r^n$ converge, alors son terme général $a_n r^n$ converge vers 0, et en particulier est une suite bornée. Ainsi, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, et donc $R_{\mathcal{C}} \leq R_{\mathcal{B}}$. Le théorème d'Abel affirme qu'on a, en fait, égalité.

Dans la suite, on note $\mathcal{B}(r)$ le disque complexe ouvert de rayon r , c'est à dire $\mathcal{B}(r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$.

Théorème 1.2 : Théorème d'Abel¹

On a $R_{\mathcal{C}} = R_{\mathcal{B}}$.

Plus précisément, si $r_0 > 0$ est tel que la suite $a_n r_0^n$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathcal{B}(r_0)$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge (absolument).

Définition 1.3 (Rayon de convergence). Le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ est le nombre commun $R := R_{\mathcal{C}} = R_{\mathcal{B}} \in [0, \infty]$.

Le **disque (ouvert) de convergence** est l'ensemble $\mathcal{B}(R) \subset \mathbb{C}$.

Preuve du théorème d'Abel. On a déjà vu que $R_{\mathcal{C}} \leq R_{\mathcal{B}}$. Montrons l'autre inégalité $R_{\mathcal{B}} \leq R_{\mathcal{C}}$. Soit $r_0 \in \mathcal{B}$, de sorte que la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée, et soit M un majorant de $(a_n r_0^n)$. Pour $z \in \mathcal{B}(r_0)$, on pose $\alpha := |z|/r_0$. On a $0 < \alpha < 1$, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n r_0^n| \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{M}{1-\alpha} < \infty.$$

Pour la dernière égalité, on a reconnu la série géométrique de raison $\alpha < 1$. Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ est (absolument) convergente. En particulier, $|z| \in \mathcal{C}$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathcal{B}(r_0)$, on en déduit que $[0, r_0) \subset \mathcal{C}$. En prenant le sup, on obtient $r_0 \leq R_{\mathcal{C}}$.

On a montré que pour tout $r_0 \in \mathcal{B}$, on a $r_0 \leq R_{\mathcal{C}}$. Autrement dit, $R_{\mathcal{C}}$ est un majorant de \mathcal{B} . Le sup $R_{\mathcal{B}}$ étant le plus petit des majorants, on a bien $R_{\mathcal{B}} \leq R_{\mathcal{C}}$. \square

En pratique, il est beaucoup plus facile de montrer qu'une suite est bornée (ensemble \mathcal{B}), que de montrer qu'une série converge (ensemble \mathcal{C}).

Exercice 1.4

Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n = b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

En reprenant les étapes de la preuve, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.5. Les ensembles \mathcal{C} et \mathcal{B} sont des intervalles.

- Si $\mathcal{B} = \{0\}$, alors $\mathcal{C} = \mathcal{B} = \{0\}$;
- Si $\mathcal{B} = [0, R)$, alors $\mathcal{C} = \mathcal{B} = [0, R)$;
- Si $\mathcal{B} = [0, R]$, alors $\mathcal{C} = [0, R)$ ou bien $\mathcal{C} = [0, R]$;
- Si $\mathcal{B} = \mathbb{R}^+$, alors $\mathcal{C} = \mathcal{B} = \mathbb{R}^+$.

D'après la démonstration du théorème d'Abel, la suite $|a_n| \cdot |z|^n$ peut être majorée par une suite géométrique de raison strictement plus petite que 1. On obtient le lemme utile suivant.

Lemme 1.6. Pour tout $z \in \mathcal{B}(R)$, il existe $M \geq 0$ et $\alpha < 1$ tel que $|a_n| \cdot |z|^n \leq M \alpha^n$.

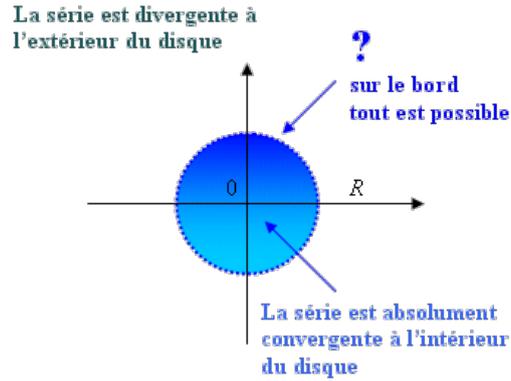
Démonstration. Puisque $|z| < R$, on peut trouver r_0 tel que $|z| < r_0 < R$. On applique ensuite la démonstration du Théorème d'Abel. \square

On a vu que si $z \in \mathcal{B}(R)$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge.

Si $|z| = R$ (cercle critique), on ne sait pas si la série $\sum a_n z^n$ converge, ni si la suite $a_n z^n$ est bornée. L'étude du comportement des séries entières sur le cercle critique fera l'objet de la fin de ce chapitre. En revanche, si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée (par définition de $R = R_{\mathcal{B}}$), donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Exemples 1.7. Quelques exemples importants.

1. Niels Henrik Abel, mathématicien norvégien, 1802-1829



- (i) $a_n = 1$. On pose $S_1(r) := \sum_n r^n$. La suite r^n est bornée ssi $r \leq 1$. Donc $\mathcal{B} = [0, 1]$ et $R = \sup \mathcal{B} = 1$. De plus, en $R = 1$, la série $\sum_n 1$ diverge, donc $1 \notin \mathcal{C}$, et $\mathcal{C} = [0, 1)$.
- (ii) $a_n = \frac{1}{n^2}$. On pose $S_2(r) := \sum_n \frac{1}{n^2} r^n$. La suite $\frac{r^n}{n^2}$ est bornée ssi $r \leq 1$. Donc $\mathcal{B} = [0, 1]$ et $R = 1$. De plus, la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\mathcal{C} = [0, 1]$.
- (iii) $a_n = \frac{1}{n!}$. Pour tout $r \geq 0$, la suite $\frac{r^n}{n!}$ tend vers 0, donc est bornée. Donc $\mathcal{B} = \mathbb{R}^+$, puis $R = \infty$ et $\mathcal{C} = \mathbb{R}^+$. (Ce sera bientôt la fonction exponentielle).
- (iv) $a_n = n!$. alors pour tout $r > 0$, la suite $n!r^n$ diverge, donc $\mathcal{B} = \{0\}$. On en déduit $R = 0$ et $\mathcal{C} = \{0\}$.

À retenir

- On associe à une série entière un *rayon de convergence* $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.
- Le cercle complexe $\{|z| = R\}$ sépare le plan complexe en deux régions : si $|z| < R$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument, et si $|z| > R$, la série diverge grossièrement (la suite $a_n z^n$ diverge).
- Tout peut arriver sur le cercle critique $\{|z| = R\}$.
- Pour déterminer le rayon de convergence R , il est toujours plus facile de travailler avec \mathcal{B} qu'avec \mathcal{C} (avec des suites bornées plutôt qu'avec des suites convergentes).

1.1.2 Comparaison de rayons de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, et soit $R_a \in [0, \infty]$ et $R_b \in [0, \infty]$ leur rayon de convergence respectif.

Lemme 1.8. Si $|a_n| = O(|b_n|)$, c'est à dire s'il existe $C \geq 0$ tel que $|a_n| \leq C|b_n|$, alors $R_a \geq R_b$. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration. Soit $r \in \mathcal{B}_b$. Par définition de \mathcal{B}_b , la suite $(b_n r^n)$ est bornée : il existe $M \geq 0$ telle que $|b_n r^n| \leq M$. On a alors

$$|a_n r^n| = |a_n| \cdot |r|^n \leq C|b_n| \cdot |r|^n \leq CM,$$

et on en déduit que la suite $(a_n r^n)$ est bornée aussi. Ainsi $r \in \mathcal{B}_a$. Ceci étant vrai pour tout $r \in \mathcal{B}_b$, on a $\mathcal{B}_b \subset \mathcal{B}_a$, et enfin, en prenant le sup, $R_b \leq R_a$. \square

On retiendra que **plus (a_n) converge vite vers 0, plus le rayon de convergence est grand.** En fait, on a beaucoup beaucoup mieux !

Théorème 1.9

Soit $s \in \mathbb{R}$. Si $a_n \leq n^s b_n$, alors $R_a \geq R_b$. En particulier

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$$

ont le même rayon de convergence.

Démonstration. Soit $r < R_b$. D'après le Lemme 1.6, il existe $M \geq 0$ et $0 < \alpha < 1$ tel que $|b_n r^n| \leq M \alpha^n$. On en déduit que

$$|a_n r^n| \leq n^s |b_n r^n| \leq n^s M \alpha^n.$$

La suite $(n^s M \alpha^n)$ tend vers 0, donc est bornée. Ainsi, la suite $(a_n r^n)$ est aussi bornée, et donc $r \in \mathcal{B}_a$. Cela montre que $[0, R_b) \subset \mathcal{B}_a$, et on en déduit $R_b \leq R_a$.

Pour le deuxième point, on pose $b_n = n a_n$. On a alors $a_n \leq b_n \leq n a_n$, et on applique le Lemme deux fois pour en déduire que $R_a \leq R_b \leq R_a$, puis finalement que $R_a = R_b$. \square

Remarque 1.10. On peut faire le même raisonnement pour $|a_n| \leq |c_n| \cdot |b_n|$ où (c_n) est une suite telle que pour tout $0 < \alpha < 1$, $c_n \alpha^n \rightarrow 0$.

Exercice 1.11

Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ dans les cas suivants :

- a_n est la n -ième décimale de π ; (on pourra remarquer que $0 \leq a_n \leq 9$).
- a_n est le nombre de diviseur de n ; (on pourra remarquer que $1 \leq a_n \leq n$).
- $a_n = (-1)^{n^2} \arctan(n) n^{2020}$;

À retenir

- Plus la suite a_n converge vite vers 0, plus son rayon de convergence est grand.
- Si $a_n = 0$ à partir d'un certain rang, alors $R = \infty$ (c'est un polynôme!).
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

1.1.3 Calcul de rayon de convergence

On se donne maintenant des règles de calculs pour calculer efficacement le rayon de convergence.

Lemme 1.12 (Critère de D'Alembert¹). Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Lemme 1.13 (Critère de Cauchy²). Si $|a_n|^{1/n} \rightarrow \ell$, alors $R = 1/\ell$.

Dans les deux cas, on pourra penser à la série $\sum_{n=0}^{\infty} \ell^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\ell x)^n$, qui ne converge que si $|\ell x| < 1$.

On rappelle que si une suite vérifie le critère de d'Alembert, alors elle vérifie aussi le critère de Cauchy (voir Lemme ci-dessous). On pourrait donc se contenter du critère de Cauchy.

Démonstration. Pour le critère de d'Alembert, on écrit que pour tout $r > 0$, on a

$$\frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell r.$$

1. Jean Le Rond D'Alembert, scientifique français, 1717-1783
2. Augustin Louis Cauchy, mathématicien français, 1789-1857

D'après le critère *classique* de d'Alembert, la série $|a_n r^n|$ converge si $\ell r < 1$, et diverge si $\ell r > 1$. On en déduit $R = 1/\ell$. Pour le critère de Cauchy, on écrit cette fois que

$$(|a_n| r^n)^{1/n} = |a_n|^{1/n} r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell r.$$

De nouveau, d'après le critère *classique* de Cauchy, la série $|a_n r^n|$ converge si $\ell r < 1$, et diverge si $\ell r > 1$, donc $R = 1/\ell$. \square

Suivant les suites qu'on a, il est parfois plus simple de travailler avec le critère de d'Alembert que celui de Cauchy. On fera attention cependant aux suites qui peuvent s'annuler : **on ne pas utiliser le critère de d'Alembert si a_n s'annule!** On peut tenter de traiter ces termes séparément.

Lemme 1.14 (Rappel : d'Alembert \implies Cauchy).

Si (u_n) est une suite telle que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow \ell$, avec $\ell > 0$, alors $|u_n|^{1/n} \rightarrow \ell$ aussi.

Démonstration. On remarque que

$$|u_n| = \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} |u_{n-1}| = \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} \cdot \frac{|u_{n-1}|}{|u_{n-2}|} \cdots \frac{|u_1|}{|u_0|} \cdot |u_0|.$$

En passant au log et en divisant par n , on obtient

$$\frac{1}{n} \log(|u_n|) = \frac{1}{n} \left(\log \left(\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} \right) + \cdots + \log \left(\frac{|u_1|}{|u_0|} \right) + \log(|u_0|) \right).$$

La suite $\log\left(\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|}\right)$ converge vers $\log(\ell)$ (continuité du log), donc d'après le théorème de Cesàro, $\frac{1}{n} \log |u_n|$ converge aussi vers $\log(\ell)$. En passant à l'exponentielle, qui est aussi une fonction continue, on obtient que $|u_n|^{1/n}$ converge vers ℓ . \square

1.2 Opérations sur les séries entières

On étudie maintenant les opérations de base pour les séries entières.

Changement d'indices Soit $S_a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a \geq 0$, et soit $b_n := a_{n+1}$. La série $S_b(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_b = R_a$. En fait, on a

$$z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = S_a(z) - a_0.$$

Donc $zS_b(z) = S_a(z) - a_0$.

Décaler une série entière, c'est la multiplier par z .

Multiplication par un scalaire Si $b_n = \lambda a_n$, alors S_a et S_b ont le même rayon de convergence, et $S_b = \lambda S_a$.

La somme Si $c_n = a_n + b_n$, alors la série entière $S_c := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$, et on a $S_c = S_a + S_b$. En effet, si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors $z \in \mathcal{B}(R_a) \cap \mathcal{B}(R_b)$ est dans le disque de convergence de S_a et de S_b , et, comme toutes les séries sont convergentes, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Le produit Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ deux séries entières et soit

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Alors la série entière $\sum c_n x^n$ vérifie $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$, et pour tout $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right).$$

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Dilatation Soit $b_n = \alpha^n a_n$ pour un certain $\alpha > 0$. Alors S_b a pour rayon de convergence $R_b := R_a/\alpha$, et on a $S_b(z) = S_a(\alpha z)$. En effet, on a

$$S_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha z)^n.$$

La dernière somme (donc les autres aussi) est convergente si $|\alpha z| < R_a$, donc si $|z| < R_a/\alpha$.

Rotation Soit $b_n = e^{-in\theta} a_n$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Alors S_b a pour rayon de convergence $R_b = R_a$, et on a $S_b(z) = S_a(e^{-i\theta} z)$. La fonction S_b représente la fonction S_a , tournée d'un angle θ .

Remarque : L'axe réel ne joue aucun rôle particulier dans les séries entières.

1.3 Fonctions développables en séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Dans cette section, on étudie la fonction

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

D'après ce qu'on a vu précédemment, S est bien définie sur $\mathcal{B}(R) \subset \mathbb{C}$. Dans ce cours, on s'intéressera principalement à ce qui se passe sur \mathbb{R} : S est bien définie sur l'intervalle ouvert $(-R, R)$.

1.3.1 Définitions et propriétés

Théorème 1.15 : Les séries entières sont C^∞

La fonction $S(\cdot)$ est C^∞ sur $(-R, R)$. Toutes ses dérivées sont des séries entières de rayon de convergence R , et

$$\forall x \in (-R, R), \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in (-R, R)$. Montrons que $S(\cdot)$ est C^∞ en x_0 . Soit r_0 tel que $|x_0| < r_0 < R$. On pose $f_n(x) := a_n x^n$, et on a

$$\sup_{x \in [-r_0, r_0]} |f_n(x)| = |a_n| \cdot |r_0|^n.$$

Comme $0 < r_0 < R$, la série de droite est convergente³. Donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-r_0, r_0]$. D'après le Lemme 0.9, il existe \tilde{S} continue sur $[-r_0, r_0]$ telle que $\sum f_n$ converge uniformément (et donc simplement) vers \tilde{S} . Par unicité de la limite, on a $\tilde{S}(x) = S(x)$ pour tout $x \in [-r_0, r_0]$. Donc $S(\cdot)$ est continue sur $[-r_0, r_0]$. En particulier, $S(\cdot)$ est continue en x_0 .

Montrons maintenant que S est dérivable en x_0 . On a $f'_n(x) = na_n x^{n-1}$. D'après le Lemme 1.9, la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ a pour rayon de convergence R . En raisonnant comme précédemment, cela montre que la série $\sum_n f'_n$ converge normalement sur $[-r_0, r_0]$. D'après le Lemme 0.6, on en déduit que S est dérivable sur $(-r_0, r_0)$, et que

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' (x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Enfin, comme S' est une série entière de rayon de convergence R , on S' est dérivable d'après ce qu'on vient de démontrer, donc S est 2 fois dérivable. En raisonnant par récurrence, on obtient que S est de classe C^∞ . \square

Par récurrence, on voit que la dérivée k -ème de S est une série entière de rayon de convergence R , et que

$$\begin{aligned} \forall x \in (-R, R), \quad S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n. \end{aligned}$$

On se pose maintenant la question inverse : étant donné une fonction f , est-ce que f peut s'écrire comme une série entière ?

Définition 1.16 (Développement en série entière). *Soit I un intervalle ouvert contenant 0, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$, et un nombre $0 < \rho \leq R$ tel que $(-\rho, \rho) \subset I$ et*

$$\forall x \in (-\rho, \rho), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Si f est développable en série entière, alors d'après le Théorème 1.15, f est une fonction C^∞ sur $(-\rho, \rho)$, et

$$\forall x \in (-\rho, \rho), \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n.$$

En évaluant en $x = 0$, tous les termes de droite s'annulent sauf celui pour $n = 0$. On obtient que si f est développable en séries entière, alors nécessairement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) := a_k k! \quad \text{que l'on écrit sous la forme} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}.$$

Autrement dit, si f est développable en série entière, alors forcément la suite a_n est unique, et donnée par la formule explicite $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. On définit la série entière S_f par

$$\boxed{S_f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.}$$

3. On ne peut pas prendre directement $r_0 = R$, car la série $\sum |a_n| R^n$ peut diverger. C'est pourquoi nous considérons le rayon intermédiaire $r_0 < R$.

Dire que f est développable en série entière, c'est dire que $f(x) = S_f(x)$ sur un voisinage de $x = 0$.

Exercice 1.17

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que f est C^∞ et que $f^{(n)}(0) = 0$. En déduire que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 1.18

Montrer que les polynômes sont développables en série entière, avec $\rho = R = \infty$.

1.3.2 Arbre de décision des séries entières

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Pour savoir si f est développable en série entière, on répond aux trois questions suivantes :

Question 1 : Est-ce que f est C^∞ localement autour de 0 ?

- **NON :** f n'est pas DSE.
- **OUI :** on continue. On pose

$$S_f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Soit R le rayon de convergence de S .

Question 2 : Est-ce que $R > 0$?

- **NON :** f n'est pas DSE.
- **OUI :** on continue.

Question 3 : Est-ce qu'il existe $0 < \rho < R$ tel que $f(x) = S_f(x)$ pour tout $x \in (-\rho, \rho)$?

- **NON :** f n'est pas DSE.
- **OUI :** f est DSE.

1.3.3 Développement de Taylor

Si f est développable en série entière, son développement peut être vu comme une série de Taylor infinie. Cela nous permet d'avoir des critères pour savoir si une fonction est développable en série entière.

On rappelle le théorème de Taylor⁴.

Théorème 1.19 : Développement de Taylor

Si f est C^∞ sur $(-\rho, \rho)$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in (-\rho, \rho)$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x), \quad \text{avec} \quad R_N(x) := \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N f^{(N+1)}(tx) dt.$$

On en déduit le lemme suivant.

Lemme 1.20. Soit $\rho > 0$ tel que la suite des restes (R_n) converge simplement vers 0 sur $(-\rho, \rho)$. Alors f est développable en série entière.

4. Brook Taylor, mathématicien anglais, 1685-1731

Démonstration. On pose $f_N(x) := \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Les hypothèses du Lemme montre que f_N converge simplement vers f sur $[-\rho, \rho]$. Autrement dit,

$$\forall x \in (-\rho, \rho), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = S_f(x).$$

En particulier, la série entière $S_f(x)$ est bien définie pour tout $x \in (-\rho, \rho)$, donc son rayon de convergence vérifie $R \geq \rho$. De plus, on a bien $S_f(x) = f(x)$ pour tout $x \in (-\rho, \rho)$. \square

Exercice 1.21

Soit $K := [-\rho, \rho]$, et soit $f \in C^\infty(K, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $A > 0$ avec

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq n!A^n$$

Montrer que f est développable en série entière sur $(-a, a)$, avec $a = \min\{\rho, A^{-1}\}$.

1.4 Quelques exemples

1.4.1 La fonction exponentielle

Définition 1.22. On définit la fonction exponentielle

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (\text{rayon de convergence } R = \infty).$$

Lemme 1.23. La fonction e^x est de classe C^∞ . Elle est (l'unique) solution de l'équation $f' = f$ et $f(0) = 1$. Elle vérifie $e^{x+y} = e^x e^y$.

Démonstration. On pose $f(x) = e^x$ pour cette preuve. Par définition, l'exponentielle est développable en série entière. On a déjà démontré que $R = \infty$. D'après le Théorème 1.15, elle est C^∞ sur \mathbb{R} . Toujours d'après le Théorème 1.15, sa dérivée est

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = f(x).$$

De plus, on a $f'(0) = 1$. Le fait que cette solution est unique vient du théorème de Cauchy-Lipschitz. Voici cependant une preuve directe. Soit g une autre fonction telle que $g'(x) = g(x)$. On introduit la fonction $\lambda(x)$ telle que $g(x) = \lambda(x)f(x)$. En dérivant, on obtient

$$g'(x) = \lambda'(x)f(x) + \lambda(x)f'(x), \quad \text{donc} \quad g(x) = \lambda'(x)f(x) + \lambda(x)f(x), \quad \text{et enfin} \quad \lambda'(x) = 0.$$

Ainsi, λ est une fonction constante, et g est un multiple de f . Si $g(0) = f(0) = 1$, on a $\lambda = 1$, et $f = g$, ce qui montre l'unicité.

Montrons maintenant que $f(x+y) = f(x)f(y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé, on pose

$$g(x) := \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}.$$

En dérivant on obtient

$$g'(x) = \frac{f(x+y)f'(x)f(y) - f'(x+y)f(x)f(y)}{f^2(x+y)} = 0$$

car $f' = f$. Donc la fonction g est constante, avec $g(0) = 1$. On en déduit que $f(x)f(y) = f(x+y)$.

Remarque : On peut aussi utiliser la définition du produit de séries entières. \square

1.4.2 Les fonctions trigonométriques.

On a

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}).$$

On en déduit

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ((ix)^n + (-ix)^n)$$

et le rayon de convergence est infini. On remarque que si n est impair, la parenthèse vaut 0. Il ne reste donc que les termes avec n pair. La somme se simplifie en

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}, \quad (\text{rayon de convergence } R = \infty).$$

Pour la fonction sinus, on peut faire le même raisonnement, ou simplement utiliser que $\sin = -\cos'$. On obtient

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}, \quad (\text{rayon de convergence } R = \infty).$$

On peut aussi faire le développement des fonctions hyperboliques $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ respectivement définies par

$$\cosh(x) := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \text{et} \quad \sinh(x) := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

On peut soit raisonner comme avant, soit remarquer que $\cosh(x) = \cos(ix)$ et $\sinh(x) = \sin(ix)$ (on rappelle que les séries entières sont bien définies sur tout le plan complexe). On obtient

$$\boxed{\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}}, \quad \boxed{\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}}, \quad (\text{rayon de convergence } R = \infty).$$

1.4.3 Fractions rationnelles

On rappelle qu'une fraction rationnelle est une fonction de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes. Une telle fonction peut se décomposer en *éléments simples*. Comme nous travaillons dans le corps \mathbb{C} qui est scindé, les éléments simples sont les fonctions de type $\frac{1}{(x-a)^p}$.

On commence par regarder ce qui se passe pour $p = 1$, c'est à dire pour la fonction $\frac{1}{(x-a)}$.

Lemme 1.24. *Pour tout $|x| < 1$, on a*

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}. \quad (\text{rayon de convergence } R = 1).$$

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \neq 1$, on a la série géométrique

$$1 + x + x^2 + \dots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Si $|x| < 1$, alors $x^{N+1} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Cela montre que la somme est de gauche est convergente. Donc

$$\forall |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Comme la somme diverge en $x = 1$, on a $R = 1$. □

On en déduit facilement le développement de tous les $\frac{1}{x-a}$. En effet, on a

$$\frac{1}{x-a} = \frac{-1}{a} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{-1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n,$$

et le rayon de convergence est $R = a$.

Remarque 1.25. De manière surprenante, la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est C^∞ sur tout \mathbb{R} , mais son développement n'est défini que sur $(-1, 1)$. C'est étonnant, car les points $x = \pm 1$ ne semblent jouer aucun rôle particulier pour cette fonction... C'est en regardant ce qui se passe dans les nombres complexes qu'on voit que cette fonction a des pôles en $z = \pm i$, et donc que $R = 1$.

Une fois qu'on a la formule pour $p = 1$, on peut dériver la formule et avoir celle pour $p = 2$. En dérivant la formule du Lemma 1.24, on obtient par exemple

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \quad (\text{rayon de convergence } R = 1).$$

En dérivant de nouveau la relation, on peut calculer le développement en série entière de $(1-x)^3$, et, par récurrence, celui de $(1-x)^p$, mais cela n'est pas très intéressant en pratique.

1.4.4 Logarithme

En intégrant la relation pour $\frac{1}{1-x}$, et en utilisant le fait que $\log(1) = 0$, on trouve (**Attention aux 2 signes moins**)

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (\text{rayon de convergence } R = 1).$$

Exercice 1.26

Montrer que

$$-\frac{\log(1-x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n, \quad \text{avec } H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

1.4.5 Arctan

Pour tout $x < 1$, on a $|x^2| < 1$, donc, en utilisant le Lemme 1.24, on a

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

En intégrant, on obtient

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (\text{rayon de convergence } R = 1).$$

Remarque 1.27. Comme $R = 1$, on peut appliquer cette égalité pour tout $|x| < 1$, mais pas en $x = 1$. Supposons qu'on peut (on le montrera dans la suite du cours), alors on aurait, avec $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (\text{formule de Leibniz}).$$

Cette formule est assez inefficace pour calculer π cependant. Si on note $L(N) := 4 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$, on a (le chiffres en rouge sont les chiffres corrects)

$$L(10) = 3.04, \quad L(100) = 3.131, \quad L(1000) = 3.1406, \quad L(10000) = 3.14149.$$

1.4.6 Fonction puissance $(1+x)^\alpha$.

Soit $f(x) := (1+x)^\alpha$. On a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, donc

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad \text{puis} \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

On introduit la fonction

$$S_f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{avec} \quad a_n := \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \binom{\alpha}{n},$$

où on a posé

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Si $\alpha = N \in \mathbb{N}$, on retrouve le coefficient binomial $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$, avec la convention $0! = 1$ et $\binom{N}{n} = 0$ si $n > N$.

Calculons le rayon de convergence de S_f . Si $\alpha \in \mathbb{N}$, la somme est finie, et le rayon de convergence est $R = \infty$ (c'est un polynôme). Sinon, on remarque que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)} = \frac{\alpha-n}{n+1} \rightarrow -1.$$

D'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence est $R = 1$. Montrons maintenant que $S_f = f$ sur $(-1, 1)$. On propose deux méthodes.

Méthode 1. Pour commencer, on remarque que $S_f(0) = 1$. De plus, on a

$$\begin{aligned} (1+x)S_f'(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right) x^n \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} ((\alpha-n) + n) x^n. \end{aligned}$$

On reconnaît $\alpha S_f(x)$ dans la dernière ligne. Ainsi, S_f est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} (1+x)S_f'(x) = \alpha S_f(x), \\ S_f(0) = 1. \end{cases}$$

Une solution de cette équation est donnée par la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Par unicité de la solution (Cauchy-Lipschitz), on en déduit que $S_f(x) = (1+x)^\alpha = f(x)$.

Méthode 2. On montre que le reste intégrale de Taylor CVS vers 0 pour $x \in (-1, 1)$. On a

$$\begin{aligned} R_N(x) &:= \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N f^{(N+1)}(tx) dt = \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N a_{N+1} (N+1)! (1+tx)^{\alpha-N-1} dt \\ &= a_{N+1} (N+1) x^{N+1} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+tx} \right)^N (1+tx)^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

Comme $x \in (-1, 1)$, on a pour tout $t \in [0, 1]$ que $0 \leq 1-t \leq 1+tx$, et donc $0 < \left(\frac{1-t}{1+tx} \right)^N \leq 1$. Cela donne la majoration

$$|R_N(x)| \leq |a_{N+1}| (N+1) |x|^{N+1} \underbrace{\int_0^1 (1+tx)^{\alpha-1} dt}_{=: C_\alpha} =: v_N.$$

L'intégrale C_α peut être calculé explicitement, mais nous n'avons pas besoin de cette valeur dans la suite. On remarquera juste que comme $|x| < 1$, l'intégrande est bien définie pour tout $t \in [0, 1]$ (il n'y a pas de singularités). Pour $N > -\alpha$, la dernière puissance est négative, et comme $|x| < 1$, on a $(1 + tx)^{\alpha-N} < (1 - t)^{\alpha-N}$.

Montrons que la suite (v_N) converge vers 0 en utilisant le critère de d'Alembert. On a, pour $|x| < 1$,

$$\frac{v_{N+1}}{v_N} = \frac{|a_{N+2}| (N+2) |x|^{N+2}}{|a_{N+1}| (N+1) |x|^{N+1}} \rightarrow |x| < 1.$$

On en déduit que la série $\sum_N v_N$ converge. En particulier, la suite v_N (et donc $R_N(x)$), converge vers 0. On peut donc appliquer le Lemme 1.20, et on a bien $f = S_f$ sur $(-1, 1)$.

Ainsi, f est développable en série entière sur $(-1, 1)$, et

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (\text{rayon de convergence } R = 1).$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, la série s'arrête à partir d'un certain rang. Dans ce cas, c'est un polynôme, et $R = \infty$.

Remarque 1.28. *C'est une extension de la formule binomiale de Pascal.*

Par exemple, dans le cas particulier $\alpha = -\frac{1}{2}$, on calcule les coefficients qui apparaissent. En factorisant les facteurs $(-1/2)$, on obtient

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$$

On simplifie le produit des nombres impairs apparaissant au numérateur de la façon suivante. On a

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdots (2n) = [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)] \cdot [2 \cdot 4 \cdots (2n)] = [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)] 2^n n!,$$

ce qui donne

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n n! n!} = \frac{(-1)^n (2n)}{4^n} \binom{2n}{n},$$

et enfin

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{4^n} \binom{2n}{n} x^n.$$

1.4.7 Fonction arcsin

En remplaçant x par x^2 dans la formule précédente, on obtient que pour tout $x \in (-1, 1)$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n}.$$

En intégrant, on obtient

$$\boxed{\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad (\text{rayon de convergence } R = 1).$$

Remarque 1.29. De nouveau, on peut appliquer cette égalité pour tout $|x| < 1$, mais pas en $x = 1$. Supposons qu'on peut, alors on aurait, avec $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1}.$$

Nous démontrons que ce type de formule est valide dans la section suivante.

Cette formule est très inefficace pour calculer π . En notant $A(N) := 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1}$, on a

$$A(10) = 2.78, \quad A(100) = 3.02, \quad A(1000) = 3.105, \quad A(10000) = ??$$

Le dernier calcul est quasiment impossible numériquement : il faudrait évaluer $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ pour $n = 10000$, ce qui demande de retenir un très grand nombre de chiffres significatifs (plus que ce que fait PYTHON).

1.5 Comportement sur le cercle de convergence

1.5.1 Le théorème d'Abel

Dans cette section, on répond partiellement à la question de ce qui se passe sur le complexe $|z| = R$. Le théorème principal est celui d'Abel (le deuxième Théorème d'Abel). Formellement, ce théorème dit :

Si z est sur cercle de convergence $|z| = R$, et est tel que $S_f(z)$ converge, alors $f(z) = S_f(z)$.

On met en garde tout de suite que la «réciproque» est fautive : ce n'est pas parce que $f(z)$ existe que $f(z) = S_f(z)$. Par exemple, on a

$$f(x) := \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

Le rayon de convergence est $R = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$ existe, mais la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ n'est pas convergente.

Quitte à tourner la fonction (cf. la rotation d'une série entière), on peut se contenter, sans perte de généralité, de démontrer le théorème d'Abel en $z = R$.

On rappelle que si on pose $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, alors f est par définition définie sur $(-R, R)$.

Théorème 1.30 : Théorème d'Abel

Soit $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < \infty$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, alors f admet un prolongement par continuité en $x = R$, et

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

On commence par donner une preuve facile dans le cas où les coefficients a_n sont tous positifs. Dans ce cas, en posant $g_n(x) := a_n x^n$, on a sur $[-R, R]$ que $\|g_n\|_{\infty} = f_n(R) = a_n R^n$. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad \text{converge.}$$

La série $\sum g_n$ est normalement convergente **sur tout** $[-R, R]$ (comparer avec le Théorème 1.15), donc il existe une fonction \tilde{f} , continue sur $[0, R]$ telle que $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Par unicité de la limite pour $x \in [0, R)$, on en déduit que \tilde{f} est le prolongement par continuité de f sur $[0, R]$.

Démonstration. On pose $f_N := \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$. Le but est de montrer que la suite (f_N) converge uniformément vers f sur $[0, R]$. Cela montrera que f est continue au point $x = R$. On introduit le reste de la suite

$$S_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k R^k, \quad \text{de sorte que} \quad a_n R^n = S_n - S_{n+1}.$$

Cette manipulation qui consiste à exprimer les termes d'une suite comme la différence de deux restes de série s'appelle la *transformation d'Abel*. Soit $0 \leq x \leq R$. On a

$$(f - f_N)(x) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=N}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=N}^{\infty} (S_n - S_{n+1}) \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=N}^{\infty} S_n \left(\frac{x}{R}\right)^n - \sum_{n=N}^{\infty} S_{n+1} \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

En changeant d'indices dans la première somme, on obtient

$$(f - f_N)(x) = S_N \left(\frac{x}{R}\right)^N + \sum_{n=N}^{\infty} S_{n+1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^n \right).$$

La suite à gauche converge simplement vers 0 si $x < R$. On veut montrer que la convergence est en fait uniforme sur $[0, R]$, où on a posé $f(R) := \sum a_n R^n$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N suffisamment grand tel que $|S_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Le premier terme est borné par ε , et le second par

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} S_{n+1} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^n \right) \right| \leq \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) = \varepsilon \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{N+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{\infty} \right) \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que $\max_{x \in [0, R]} \sum_{n \geq N} a_n x^n \leq 2\varepsilon$, donc la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. La limite correspondante est un prolongement par continuité de f sur $(-R, R]$. \square

1.5.2 Applications : quelques jolies formules

Avec arcsin

On veut appliquer le théorème d'Abel à la fonction arcsin. On commence par étudier la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{1}{2n+1}$$

En utilisant l'équivalence $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, on obtient

$$\frac{1}{2n+1} \frac{1}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{2n} \frac{1}{4^n} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n (n/e)^{2n}} \sim \frac{1}{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série est donc sommable, et on peut appliquer le théorème d'Abel. Comme on a $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit la formule (inutile mais jolie)

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{1}{2n+1}.$$

Avec arctan

On commence par étudier la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

C'est une série alternée dont le terme converge vers 0. Donc la série converge. On peut donc utiliser le théorème d'Abel. Avec le fait que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Pour la dernière égalité, on a regroupé les termes 2 par 2.

Remarque 1.31. On ne peut pas appliquer le théorème d'Abel en $x = -1$, car la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ n'est pas convergente. En revanche, on a $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Avec log

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

est alternée, avec un terme qui terme vers 0, donc converge. En appliquant le lemme d'Abel, on obtient

$$\log(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

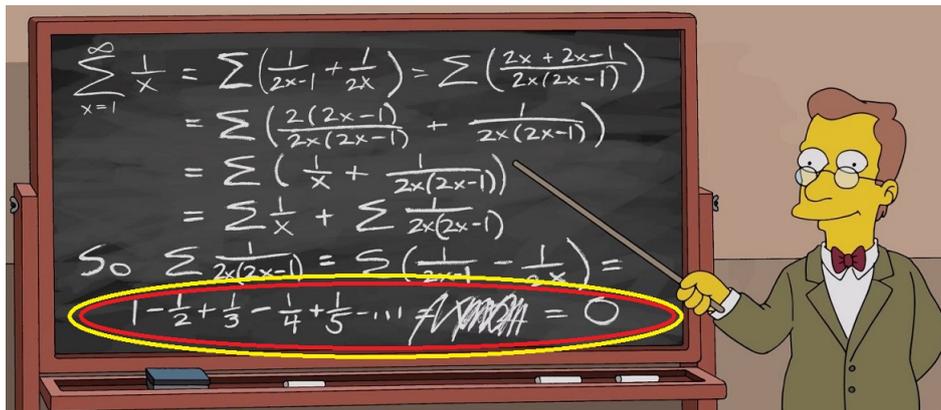


FIGURE 1.1 – Mais alors, où est l'erreur? *The Simpsons*, *Sky Police*, March 2015.

2.1 Introduction

Soit E_T l'ensemble des fonctions continues et T périodiques : $f(x+T) = f(x)$. Sur E_T , on introduit un produit scalaire (en fait hermitien : linéaire à droite, antilinéaire à gauche)

$$\forall f, g \in E_T, \quad \langle f, g \rangle := \int_0^T \overline{f(x)} g(x) dx,$$

et on note $\|f\|_2$ la norme associée $\|f\|_2 := \int_0^T |f|^2(x) dx$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi}{T} nx}.$$

On a bien $e_n(\cdot)$ continue, et $e_n(x+T) = e_n(x)$, donc $e_n \in E_T$. De plus, on a, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\frac{2\pi}{T} nx} e^{i\frac{2\pi}{T} mx} dx = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T} (m-n)x} dx.$$

Si $n = m$, alors on trouve $\|e_n\|^2 = 1$, et si $n \neq m$, on trouve

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{i\frac{2\pi}{T} (m-n)x}}{i\frac{2\pi}{T} (m-n)} \right]_0^T = \frac{1}{i2\pi(m-n)} (e^{2\pi(m-n)} - 1) = 0. \quad (2.1)$$

Autrement dit, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est **une famille orthonormale** pour le produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Malheureusement, cette famille est infinie, et nous n'avons pas le droit de dire que c'est une **base** de E_T (ça le serait si $E_T = \text{Vect}\{e_n\}$). On pose donc

$$\mathcal{H} := \text{Vect}\{e_n\}.$$

Identifier l'espace \mathcal{H} est malheureusement hors du cadre de ce cours. On l'appelle l'espace $\mathcal{H} = L^2([0, T])$. Pour le définir proprement, il faut connaître la théorie de la mesure et les intégrales de Lebesgue... Mais sans rentrer dans ces subtilités, on a

$$\mathcal{H} \approx \left\{ f \text{ } T\text{-périodiques, } \|f\|_2^2 := \int_0^T |f|^2(x) dx < \infty \right\}.$$

1. L'ensemble E_T n'est pas bien défini, car l'intégrale n'est pas toujours bien définie (intégrale de Lebesgue versus intégrale de Riemann)...

Soit $f \in \mathcal{H}$. Comme (e_n) est une **base** de \mathcal{H} , on peut décomposer f dans cette base, et il existe des coefficients complexes $c_n(f) \in \mathbb{C}$ tel que

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n.$$

En prenant le produit scalaire de cette identité avec e_m , on obtient par linéarité

$$\langle e_m, f \rangle = \left\langle e_m, \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \underbrace{\langle e_m, e_n \rangle}_{\delta_{nm}} = c_m(f).$$

Le coefficient $c_n(f)$ est donc explicite. Il s'appelle le n -ème **coefficient de Fourier**, et vaut

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e^{-i \frac{2\pi}{T} n x} f(x) dx. \quad (\text{coefficient de Fourier})$$

Nous pouvons maintenant énoncer les trois grands résultats de ce chapitre. Pour commencer, on a, **formellement**, pour tout $f \in \mathcal{H}$,

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n. \quad (\text{Théorème d'inversion de Fourier}).$$

Par ailleurs, en prenant le produit scalaire de f avec lui-même, on obtient par bilinéarité (linéaire à droite, anti-linéaire à gauche) que

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n, \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e_m \right\rangle = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_m(f) \underbrace{\langle e_m, e_n \rangle}_{=\delta_{nm}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Nous avons montré que pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2. \quad (\text{Identité de Parseval}).$$

Cette identité peut-être vue comme une généralisation du théorème de Pythagore. On en déduit en particulier que

$$c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (\text{Théorème de Riemann-Lebesgue}).$$

Les trois derniers encadrés sont les grands résultats de ce chapitre.

À retenir

- Ce chapitre est **géométrique**.
- Les grandes formules à connaître sont faciles à retrouver.

Le but de ce chapitre est de justifier ces formules. En particulier, on aimerait justifier deux points :

- Que veut dire $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ (dans quel sens a-t-on de la convergence) ?
- Comment comprendre le théorème d'inversion de Fourier ? Est-ce qu'il y a égalité «point par point» ? Autrement dit, pour quelle fonction f avons-nous

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n(x) \quad ?$$

2.2 Fonctions continues par morceaux

Afin d'énoncer nos théorèmes dans un cadre très général, nous travaillerons avec des *fonctions continues par morceaux*. En effet, la théorie de Fourier nécessite de définir des *intégrales*. Grâce à la théorie de Riemann, on sait définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, mais on ne sait pas (encore) définir l'intégrale d'une fonction qui n'est pas continue par morceaux...

2.2.1 Premières définitions

Définition 2.1 (Fonctions C^p par morceaux). *On dit qu'une fonction f est C^p par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision **finie** $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ telle que :*

- pour tout $1 \leq i \leq n$, la fonction f restreinte à l'intervalle (ouvert) $]x_{i-1}, x_i[$ est de classe C^p ;
- la fonction $f^{(p)}$ restreinte à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge par continuité sur l'intervalle (fermé) $[x_i, x_{i+1}]$.

On dit qu'une fonction est C^p par morceaux sur tout \mathbb{R} , si elle est C^p par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$.

On peut vérifier que si f et g sont C^p par morceaux, alors $f + g$ et $f \cdot g$ sont aussi C^p par morceaux.

Si f est une fonction C^p par morceaux sur $[a, b]$, l'intégrale de Riemann de f est définie comme

$$\int_a^b f(t) dt := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt.$$

La somme est finie, et les intégrales de droite sont bien définies car f est continue sur les intervalles (x_i, x_{i+1}) .

Exemples 2.2.

- La fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(0) = 0, \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{n}, \quad \text{si} \quad x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right],$$

n'est pas continue par morceaux : elle a un nombre infini de discontinuités.

- La fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x|}$ est continue, mais pas C^1 par morceaux : sa restriction à \mathbb{R}^+ est dérivable, avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, qui ne se prolonge pas en 0 par continuité.

Définition 2.3 (Condition du milieu). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f vérifie la **condition du milieu** si, pour tout $a \in (a, b)$, on a*

$$\forall x \in (a, b), \quad f(x) = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)].$$

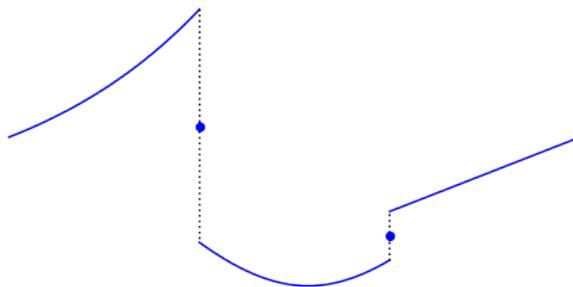


FIGURE 2.1 – Une fonction continue par morceaux qui vérifie la condition du milieu.

Dans la suite, on note C_T^0 (resp. C_T^p) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe C^p) qui sont T -périodiques :

$$C_T^p := \{f \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)\}$$

et $C_{T,m}^0$ (resp. $C_{T,m}^p$) l'ensemble des fonctions *continues par morceaux* (resp. C^p par morceaux), qui sont périodiques, et qui vérifient la *condition du milieu*.

On a $C_T^{p+1} \subset C_T^p$ et $C_{T,m}^{p+1} = C_{T,m}^p$ et $C_T^p \subset C_{T,m}^p$. Tous ces espaces sont inclus dans $C_{T,m}^0$ (qui est donc le plus gros espace dans lequel on travaillera).

2.2.2 Un produit scalaire

On définit sur $C_{T,m}^0$ la forme sesqui-linéaire

$$\forall f, g \in C_{T,m}^0, \quad \langle f, g \rangle := \int_0^T \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (2.2)$$

Comme on intègre des fonctions périodiques, on préfère parfois centrer l'intégrale en 0, et écrire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Théorème 2.4 : La norme L^2

La forme (2.2) est un produit hermitien sur $C_{T,m}^0$. En particulier, $\langle f, f \rangle = 0$ ssi $f = 0$. La norme associée, notée $\|f\|_2^2 := \langle f, f \rangle$ s'appelle la norme L^2 .

Démonstration. Vérifions juste que $\|f\|_2 = 0$ implique $f = 0$ (le reste est facile à démontrer). Si $f \in C_{T,m}^0$ a pour points de discontinuité $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = T$, alors

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f|^2(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f|^2(t) dt, \quad \text{donc} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f|^2(t) dt = 0.$$

Comme f est continue sur (x_{i-1}, x_i) , on en déduit que $f = 0$ sur tous les intervalles ouverts (x_{i-1}, x_i) . En particulier, on a, avec la condition du milieu

$$f(x_i) = \frac{1}{2} (f(x_i^-) + f(x_i^+)) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0,$$

donc f s'annule aussi aux points de discontinuité x_i . Cela montre que $f = 0$ partout. \square

2.2.3 Coefficients de Fourier

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on introduit, comme dans l'introduction, la fonction $e_k(x)$ définie par

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi}{T} kx}.$$

Cette fonction est C^∞ (dans le sens où sa partie réelle et sa partie imaginaire sont C^∞), et T -périodique : $e_k(x+T) = e_k(x)$. Donc $e_k \in C_T^\infty \subset C_{T,m}^0$.

Théorème 2.5

La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

Démonstration. C'est ce que nous avons montré en (2.1). \square

Définition 2.6 (coefficients de Fourier). Pour $f \in C_{T,m}^0$, et pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $c_k(f) \in \mathbb{C}$ le k -ème coefficient de Fourier de f défini par

$$c_k(f) := \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}kx} dx.$$

Remarque 2.7. Il y a beaucoup de conventions de normalisation différentes pour les coefficients de Fourier. Ici, on travaille avec la base **orthonormée** (e_k) , ce qui fait apparaître un $1/\sqrt{T}$ devant l'intégrale.

2.3 Polynômes trigonométriques

On commence par donner un cadre simple (en dimension finie), où les deux résultats de l'introduction sont valides. Ce cas simple, et un argument de **densité**, nous permettra de déduire le théorème de Parseval dans $C_{T,m}^0$.

2.3.1 Définitions et théorèmes

On commence par définir l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Définition 2.8 (Polynômes trigonométriques). L'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus N est le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\mathbb{T}_N := \text{Vect} \{e_{-N}, e_{-N+1} \cdots e_{N-1}, e_N\}.$$

Nous avons vu que la famille (e_k) était libre (car elle est orthonormale), et comme il y a $2N + 1$ indices entre $-N$ et N , \mathbb{T}_N est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2N + 1$.

Le cadre des polynômes trigonométriques (un ensemble de dimension finie) permet de prouver nos «grands théorèmes».

Théorème 2.9 : Fourier et Parseval pour les polynômes trigonométriques

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour tout $P \in \mathbb{T}_N$, on a la décomposition explicite

$$P = \sum_{k=-N}^N c_k(P) e_k. \quad (\text{Théorème d'inversion de Fourier}).$$

De plus, on a

$$\|P\|_{L^2}^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(P)|^2. \quad (\text{Identité de Parseval}).$$

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{T}_N$. Par définition, il existe des coefficients $c_k \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = \sum_{k=-N}^N c_k e_k.$$

Notre but est de montrer que $c_k = c_k(P)$ est le k -ème coefficient de Fourier. On répète les arguments de l'introduction. En prenant le produit scalaire avec e_n , on a (toutes les sommes sont finies ici!)

$$c_n(P) = \langle e_n, P \rangle = \sum_{k=-N}^N c_k \langle e_n, e_k \rangle = c_n,$$

ce qui montre la première formule. Pour la seconde formule, on prend le produit scalaire de P avec lui-même, et on obtient

$$\|P\|_{L^2}^2 = \langle P, P \rangle = \sum_{k=-N}^N \sum_{\ell=-N}^N \overline{c_k} c_\ell \langle e_k, e_\ell \rangle = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

□

2.3.2 Symétries

On trouvera souvent dans des livres les transformations en sinus et cosinus de fonctions. On explique rapidement d'où sortent les formules, mais on n'y reviendra pas.

Si on écrit $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, et qu'on utilise le fait que \cos est paire et que \sin est impaire, on obtient la décomposition en sinus et cosinus de P , à savoir :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[c_0(P) + \sum_{k=1}^N a_k(P) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + \sum_{k=1}^N b_k(P) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right]$$

où on a posé

$$a_k(P) := c_k(P) + c_{-k}(P), \quad \text{et} \quad b_k(P) := ic_k(P) - ic_{-k}(P).$$

De manière explicite, on a $a_k(P) = c_k(P) + c_{-k}(P) = \langle e_k, P \rangle + \langle e_{-k}, P \rangle = \langle e_k + e_{-k}, P \rangle$, et donc

$$a_k(P) = \frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) P(x) dx, \quad \text{et} \quad b_k(P) = \frac{2}{\sqrt{T}} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) P(x) dx.$$

Lemme 2.10 (Symétries).

- Si f est une fonction paire : $f(x) = f(-x)$, alors $b_k(f) = 0$;
- Si f est une fonction impaire : $f(x) = -f(-x)$, alors $a_k(f) = 0$ et $c_0(f) = 0$.

2.3.3 Meilleur polynôme trigonométrique

Soit $f \in C_{T,m}^0$ une fonction continue par morceaux périodique. Comme f n'est pas dans \mathbb{T}_N , on ne peut pas directement appliquer la théorie précédente. Cependant, on peut définir la **projection orthogonale** de f sur \mathbb{T}_N , notée $S_N(f)$, par

$$S_N(f) := \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k \quad \in \mathbb{T}_N.$$

Lemme 2.11. *Le polynôme trigonométrique $S_N(f)$ est le meilleur polynôme qui approxime f pour la norme $\|\cdot\|_2$. C'est à dire :*

$$\forall P \in \mathbb{T}_N, \quad \|f - P\|_2 \geq \|f - S_N(f)\|_2.$$

Cette inégalité s'écrit aussi

$$\forall P \in \mathbb{T}_N, \quad \int_0^T |f - P|^2 \geq \int_0^T |f - S_N(f)|^2.$$

Démonstration. La fonction $\mathcal{E}(P) := \int_0^T |f - P|^2$ est continue sur l'espace de dimension finie \mathbb{T}_N , et on a $\mathcal{E}(P) \rightarrow \infty$ lorsque $\|P\|_2 \rightarrow \infty$, donc \mathcal{E} atteint son minimum sur \mathbb{T}_N . Soit $P^* \in \mathbb{T}_N$ ce minimum. Pour tout autre polynôme $P \in \mathbb{T}_N$ et pour tout $t > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $P^* - te^{i\theta} P \in \mathbb{T}_N$, donc

$$\|f - P^* + te^{i\theta} P\|_2^2 \geq \|f - P^*\|_2^2.$$

En développant, on obtient

$$t2\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\langle P, f - P^*\rangle\right) + t^2\|P\|^2 \geq 0.$$

En divisant par $t > 0$, et en prenant la limite $t \rightarrow 0^+$, on trouve $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\langle P, f - P^*\rangle\right) \geq 0$, pour tout θ . Cela implique $\langle P, f - P^*\rangle = 0$. On a donc prouvé

$$\forall P \in \mathbb{T}_N, \quad \langle P, f - P^*\rangle = 0.$$

C'est une propriété bien connue des projections : le reste $f - P^*$ est orthogonal au plan \mathbb{T}_N sur lequel on a projeté. En prenant $P = e_k$, on obtient

$$\langle e_k, f \rangle = \langle e_k, P^*\rangle \quad \text{ce qui donne} \quad c_k(f) = c_k(P^*),$$

et on en déduit

$$P^* = \sum_{k=-n}^n c_k(P^*)e_k = \sum_{k=-n}^n c_k(f)e_k = S_N(f).$$

□

2.3.4 Densité des polynômes trigonométriques dans $C_{T,m}^0$, pour la norme L^2

Nous montrons maintenant deux résultats importants :

- les polynômes trigonométriques sont denses dans C_T^0 (fonctions continues), pour la norme uniforme.
- les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{T,m}^0$, pour la norme L^2 .

Remarque 2.12. *Les polynômes trigonométriques ne sont pas "denses" dans $C_{T,m}^0$ pour la norme uniforme, car la limite uniforme de fonctions continues doit être continue.*

Remarque 2.13. *Les normes L^∞ (de la convergence uniforme) et L^2 ne sont pas équivalentes. On a bien*

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{T}\|f\|_\infty \tag{2.3}$$

car

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f|^2(x)dx \leq \int_0^T \left(\sup_{s \in [0,T]} |f|(s) \right)^2 dx = \|f\|_\infty^2 \int_0^T 1dx = T\|f\|_\infty^2.$$

mais il n'existe aucune constante $\alpha > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_2$ pour tout f .

Le premier point est donné par le théorème de Stone-Weierstrass (que l'on admet pour commencer, et que nous démontrerons plus tard, dans la section ??). Dans le cas périodique, ce théorème s'appelle parfois le théorème de Féjer.

Théorème 2.14 (Stone-Weierstrass, Féjer). *Les polynômes trigonométriques sont denses dans C_T^0 pour la norme uniforme. Autrement dit, pour tout $f \in C_T^0$, il existe une suite de polynômes $P_N \in \mathbb{T}_N$ telle que*

$$\|f - P_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Théorème 2.15 (Densité des polynômes trigonométriques dans $C_{T,m}^0$, pour la norme L^2).

L'ensemble C_T^0 est dense dans $C_{T,m}^0$ pour la norme L^2 .

Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{T,m}^0$ pour la norme L^2 .

Autrement dit, pour tout $f \in C_{T,m}^0$, il existe une suite de polynômes $P_N \in \mathbb{T}_N$ telle que

$$\|f - P_N\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Soit $f \in C_{T,m}^0$ une fonction continue par morceaux, et soit $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n < T$ ses points de discontinuité dans $[0, T)$. Soit $\varepsilon > 0$. L'idée est de construire une fonction f_ε continue qui «répare» les discontinuités.

Si x est à une distance plus grande que ε des points de discontinuité x_i , on pose $f_\varepsilon(x) := f(x)$. Autour de chaque point x_i , on pose

$$\forall x \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon), \quad f_\varepsilon(x) := f(x_i - \varepsilon) + \frac{(x - x_i + \varepsilon)}{2\varepsilon} (f(x_i + \varepsilon) - f(x_i - \varepsilon)).$$

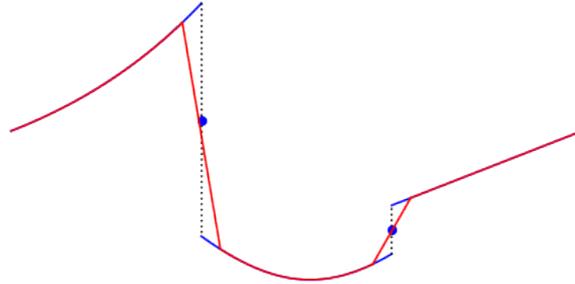


FIGURE 2.2 – Une fonction f discontinue, et la fonction f_ε (en rouge) continue.

Par construction, f_ε est continue, et comme $f_\varepsilon - f = 0$ loin des points x_i , on a

$$\|f - f_\varepsilon\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f - f_\varepsilon|^2(x_i + t) dt \leq n(2\varepsilon) \|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq n(2\varepsilon) (\|f\|_\infty + \|f_\varepsilon\|_\infty)^2 \leq n(2\varepsilon) 4\|f\|_\infty^2.$$

On a utilisé que $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ dans la dernière inégalité (cf le dessin). On a donc bien $\|f - f_\varepsilon\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui montre le premier point.

Montrons maintenant la densité des polynômes trigonométriques. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $f_\varepsilon \in C_T^0$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$. On applique le théorème de Stone-Weierstrass à f_ε , qui est continue. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $P_N \in \mathbb{T}_N$ tel que $\|f_\varepsilon - P_N\|_\infty \leq \varepsilon$. Avec l'inégalité triangulaire, et l'inégalité (2.3), on obtient

$$\|f - P_N\|_2 \leq \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon - P_N\|_2 \leq \varepsilon + \sqrt{T}\varepsilon = (1 + \sqrt{T})\varepsilon,$$

ce qui montre le résultat. □

En utilisant le Lemme 2.11 et le Théorème 2.15, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.16

Pour tout $f \in C_{T,m}^0$, la suite $S_N(f) \in \mathbb{T}_N$ converge vers f **pour la norme 2** :

$$\|f - S_N(f)\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Soit $P_N \in \mathbb{T}_N$ une suite de polynômes qui converge vers f pour la norme L_2 . Cette suite existe d'après le théorème précédent. On a, avec le Lemme 2.11,

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - P_N\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

□

2.4 Parseval et Riemann-Lebesgue dans $C_{T,m}^0$

2.4.1 Les grands théorèmes dans $C_{T,m}^0$

Nous avons vu que l'identité de Parseval était vrai pour les polynômes trigonométriques. En utilisant le Théorème (2.16), on peut étendre ce théorème aux fonctions continues par morceaux.

Théorème 2.17 : Parseval pour les fonctions continues par morceaux

Pour tout $f \in C_{T,m}^0$, on a

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Démonstration. On a, en développant,

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\langle f, S_N(f) \rangle + \|S_N(f)\|_2^2 = -\|f\|_2^2 + 2\langle f, f - S_N(f) \rangle + \|S_N(f)\|_2^2.$$

En réorganisant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \|S_N(f)\|_2^2 - \|f\|_2^2 \right| &\leq 2|\langle f, f - S_N(f) \rangle| + \|f - S_N(f)\|_2^2 \\ &\leq 2\|f\| \cdot \|f - S_N(f)\| + \|f - S_N(f)\|_2^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la dernière inégalité, et le fait que $\|f - S_N(f)\|_2 \rightarrow 0$ d'après le Théorème 2.16. Ceci montre que

$$\|f\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f)\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

□

En particulier, la série positive $\sum |c_n(f)|^2$ est convergente, donc la suite $|c_n(f)|$ converge vers 0. On obtient le *théorème de Riemann-Lebesgue*.

Théorème 2.18 : Riemann-Lebesgue pour les fonctions continues par morceaux

Pour tout $f \in C_{T,m}^0$, on a

$$c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) e^{i\frac{2\pi}{T}nt} dt = 0.$$

En prenant la partie réelle et imaginaire, et en généralisant le résultat à des fonctions continue sur $[a, b]$ (admis), on obtient que pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t) \cos(\omega t) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) \sin(\omega t) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} 0.$$

2.4.2 Un exemple important

Soit f_0 la fonction impaire 1-périodique qui vaut 1 sur $(0, 1/2)$ (et -1 sur $(-1/2, 0)$).

On calcule les coefficients de Fourier de f_0 . On a (on prend $T = 1$)

$$c_n(f_0) = \int_{-1/2}^{1/2} f_0(t) e^{-i2n\pi x} dx = - \int_{-1/2}^0 e^{-i2n\pi x} dx + \int_0^{1/2} e^{-i2n\pi x} dx.$$

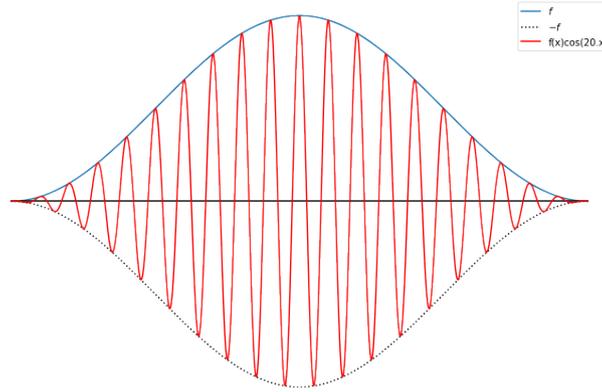


FIGURE 2.3 – Riemann–Lebesgue : La fonction $f(x) \cos(20 \cdot x)$ (rouge) oscille fortement entre f et $-f$. Son intégrale tend vers 0.

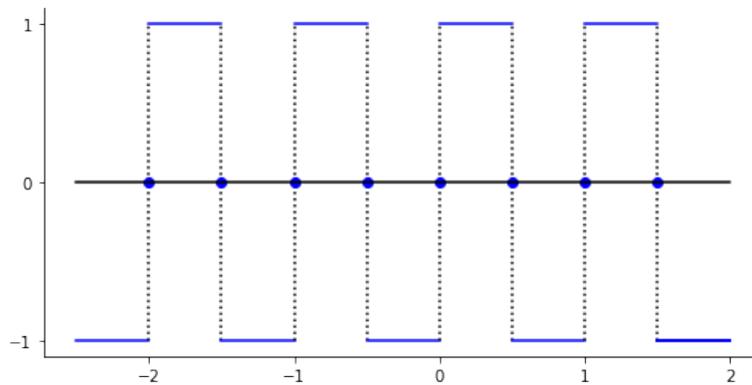


FIGURE 2.4 – La fonction f de notre exemple.

En faisant le changement de variable $x \rightarrow -x$ dans la première intégrale, on obtient

$$c_n(f) = \int_0^{1/2} (e^{-i2n\pi x} - e^{i2n\pi x}) dx = -2i \int_0^{1/2} \sin(2n\pi x) dx = 2i \left[\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{n i \pi} (1 - (-1)^n).$$

Tous les coefficients pairs sont nuls, $c_{2n} = 0$, et les coefficients impaires sont $c_{2n+1}(f) = \frac{2}{(2n+1)i\pi}$.

Le théorème de Parseval nous donne

$$1 = \int_0^1 f^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2}.$$

On obtient la jolie formule

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Par ailleurs, en séparant les termes pairs et impaires dans la prochaine expression, on a

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8}.$$

On a donc $\frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$, et enfin, la fameuse formule

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.4.3 Et le théorème d'inversion de Fourier ?

Malheureusement, le théorème d'inversion de Fourier est **faux** dans $C_{T,m}^0$ (et même dans C_T^0). Plus exactement,

Il existe une fonction continue $f \in C_T^0$ tel que $S_N(f)(0)$ est une suite divergente.

Le premier exemple d'une telle fonction f a été trouvée par du Bois Reymond². Pour cette fonction, on a $f(0) < \infty$, mais

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n(0) = \infty, \quad \text{donc} \quad f(0) \neq \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n(0).$$

Il n'y a donc pas toujours de convergence simple (et, *a fortiori*, pas de convergence uniforme) de $S_N(f)$ vers f . On ne peut pas espérer avoir un «théorème d'inversion de Fourier» sans faire plus d'hypothèses sur f .

2.5 Théorème d'inversion de Fourier avec convergence uniforme

Dans cette section, nous montrons que si $f \in C_T^1$ est **dérivable**, alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f .

2.5.1 Dérivabilité et transformée de Fourier

Nous commençons par relier la décroissance des coefficients de Fourier $c_n(f)$ et la régularité de f .

Théorème 2.19

Si $f \in C_T^k$, alors $f^{(k)} \in C_T^0$, et, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$c_n(f^{(k)}) = \left(i \frac{2\pi}{T}\right)^k n^k c_n(f).$$

Démonstration. On a

$$c_n(f') = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f'(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} n x} dx$$

En intégrant par partie, on obtient

$$c_n(f') = -\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(x) \left(-i \frac{2\pi}{T} n\right) e^{-i \frac{2\pi}{T} n x} dx + \left[f(x) \left(-i \frac{2\pi}{T} n\right) e^{-i \frac{2\pi}{T} n x} \right]_0^T.$$

Par périodicité, le terme de bord s'annule. Cela prouve le résultat dans le cas $k = 1$. La preuve pour les dérivées plus grande se fait par récurrence. \square

On en déduit le corollaire important suivant.

Lemme 2.20. *Si $f \in C_T^k$, alors*

$$|c_n(f)| \leq \frac{C_k}{n^k}, \quad \text{avec} \quad C_k = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^k \|f^{(k)}\|_2.$$

De plus, si $f \in C_T^1$, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq \frac{T}{2\sqrt{3}} \|f'\|_2 < \infty.$$

2. Paul du Bois Reymond, 1831-1889, mathématicien allemand

Le premier résultat dit que plus une fonction est lisse (plus k est grand), plus sa série de Fourier converge vite vers 0 (comme C_k/n_k). Cela en fait une méthode de choix pour l'**approximation numérique** de fonctions périodiques régulières.

Démonstration. Pour la première partie, on commence par remarquer que, pour toute fonction $g \in C_{T,m}^0$, on a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|c_n(g)| = \langle e_n, g \rangle \leq \|e_n\|_{L^2} \|g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}.$$

Avec $g = f^{(k)}$ et le théorème précédent, on obtient

$$|c_n(f)| = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^k \frac{1}{n^k} |c_n(f^{(k)})| \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^k \|f^{(k)}\|_2 \frac{1}{n^k},$$

ce qui montre le premier point. l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a (on note $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)| = \frac{T}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \frac{T}{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}.$$

D'après le théorème de Parseval pour f' , la première parenthèse est aussi $\|f'\|_2^2$. Cela montre déjà que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. En utilisant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient le résultat. \square

2.5.2 Critère de convergence uniforme

Théorème 2.21. Soit $f \in C_{T,m}^0$ une fonction telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. Alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f lorsque $N \rightarrow \infty$.

En particulier, f est, en fait, une fonction continue, et le théorème d'inversion de Fourier est valide :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n(x).$$

Démonstration. On a

$$\|c_n e_n(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [0, T]} |c_n| \cdot |e_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{T}} |c_n|.$$

La condition $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ implique que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(x)$ converge normalement. Elle admet une limite $F \in C_T^0$ pour la convergence uniforme, et on a $\|F - S_N(f)\|_{\infty} \rightarrow 0$ (convergence pour la norme uniforme).

Montrons que $F = f$. D'une part, l'inégalité (2.3) implique que $\|F - S_N(f)\|_2 \rightarrow 0$ (convergence pour la norme L_2). D'autre part, Le Théorème 2.16, on a aussi $\|f - S_N(f)\|_2 \rightarrow 0$. Par unicité de la limite, on a $F = f$. \square

En combinant le résultat précédent avec le Lemme 2.20, on obtient le résultat suivant

Théorème 2.22

Si $f \in C_T^1$, alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f .

2.6 Théorème d'inversion de Fourier avec la convergence simple

On s'intéresse maintenant à la convergence simple

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n(x) \stackrel{?}{\underset{N \rightarrow \infty}{\longrightarrow}} f(x).$$

2.6.1 Noyau de Dirichlet

Le résultat principal de cette section est due à Dirichlet³. Calculons explicitement $S_N(f)$. On a par définition

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k(x) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N \left(\int_0^T f(y) e^{-i\frac{2\pi}{T}ky} dy \right) e^{i\frac{2\pi}{T}kx} dx.$$

En inversant la somme finie et l'intégrale, on obtient

$$S_N(f)(x) = \int_0^T f(y) \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N e^{i\frac{2\pi}{T}k(x-y)} \right) dy = \int_0^T f(y) D_N(x-y) dy$$

où on a défini le **noyau de Dirichlet**

$$D_N(z) := \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N e^{i\frac{2\pi}{T}kz} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=-N}^N e_k(z).$$

Lemme 2.23. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^T D_N(x) dx = 1$. De plus, on a l'expression explicite

$$D_N(z) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(N + \frac{1}{2}\right)z\right)}{T \sin\left(\frac{\pi}{T}z\right)}.$$

Démonstration. Comme $\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e_k = \langle e_0, e_k \rangle = \delta_{0k}$, on a

$$\int_0^T D_N(x) dx = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=-N}^N \langle e_0, e_k \rangle = 1$$

Pour la formule explicite de D_N , on remarque la série qui définit D_N est une série géométrique, de raison $e^{i\theta}$, avec $\theta := \frac{2\pi}{T}z$. On a

$$\sum_{k=-N}^N e^{ik\theta} = e^{-iN\theta} \frac{1 - e^{i\theta(2N+1)}}{1 - e^{i\theta}} = e^{-iN\theta} \frac{e^{i\theta(N+\frac{1}{2})} \left(e^{i\theta(N+\frac{1}{2})} - e^{-i\theta(N+\frac{1}{2})} \right)}{e^{i\frac{1}{2}\theta} \left(e^{-i\frac{1}{2}\theta} - e^{i\frac{1}{2}\theta} \right)} = \frac{\sin\left(\theta\left(N + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)},$$

et le résultat suit. □

Voici quelques fonctions de Dirichlet (avec $T = 2\pi$).

On remarque que

- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, le noyau D_N est paire et $2T$ périodique.
- Le noyau D_N oscille de plus en plus lorsque $N \rightarrow \infty$ (*phénomène de Gibbs*).
- Le noyau D_N se concentre autour de $x = 0$.

2.6.2 Convergence simple pour les fonctions dérivables par morceaux

Nous pouvons enfin démontrer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 2.24 : Théorème de Dirichlet

Soit $f \in C_{T,m}^1$ une fonction **continument dérivable** par morceaux et périodique, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)).$$

Dans ce théorème, la **condition du milieu** prend toute son importance!

3. Johann Dirichlet, 1805-1865, mathématicien Prusse.

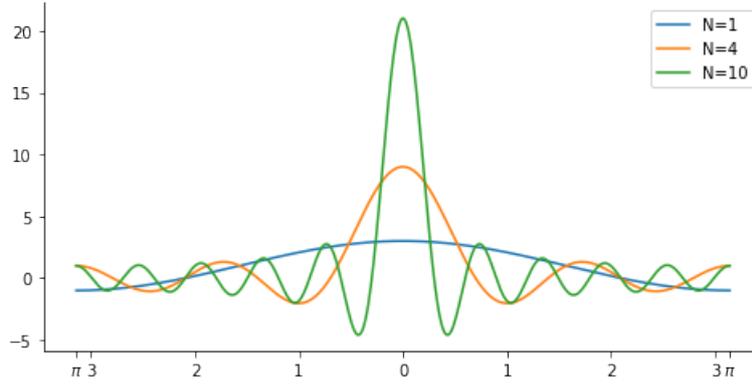


FIGURE 2.5 – Noyau de Dirichlet pour $N = 1$ (bleu), $N = 4$ (orange) et $N = 10$ (vert).

Démonstration. On fait la démonstration pour $T = 2\pi$ pour simplifier les notations. On a montré que

$$S_N(f)(x) = \int_0^T f(y)D_N(x - y)dy = \int_0^T f(x - y)D_N(y)dy.$$

Dans la deuxième égalité, on a utilisé le changement de variable $y' = x - y$, et le fait que l'intégrande est 2π périodique. On a donc

$$S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x - y)}{\sin \frac{y}{2}} \right) \cdot \sin \left((N + \frac{1}{2})y \right) dy = \int_0^{\pi} \frac{f(x - y) + f(x + y)}{\sin \frac{y}{2}} \cdot \sin \left((N + \frac{1}{2})y \right) dy,$$

où on a coupé l'intégrale en deux et fait le changement de variable $y' = -y$ pour la partie entre $-\pi$ et 0 .

L'intégrale est de la forme $\int_0^{\pi} g(y) \sin((N + 1/2)y)$ avec

$$g(y) := \frac{f(x - y) + f(x + y)}{\sin \frac{y}{2}}.$$

On aimerait utiliser le théorème de Riemann-Lebesgue et dire que l'intégrale tend vers 0, mais ce n'est vrai que si g est continue par morceaux (heureusement, sinon on trouverait 0). La fonction f est continue par morceaux, mais la fonction $1/\sin(y)$ diverge comme $\frac{1}{y}$ lorsque $y \rightarrow 0$.

L'idée est d'utiliser le fait que $\int D_N = 1$. On a donc

$$S_N(f) - \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) = \int_0^{\pi} \tilde{g}(y) \cdot \sin((N + \frac{1}{2})y)dy. \tag{2.4}$$

avec la fonction modifiée

$$\tilde{g}(y) := \frac{f(x + y) + f(x - y) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin \frac{y}{2}}.$$

Comme f est C^1 par morceaux, on peut écrire, pour $y > 0$

$$f(x + y) = f(x^+) + f'(x^+)y + o(y), \quad \text{et, de même,} \quad f(x - y) = f(x^-) - f'(x^-)y + o(y).$$

En additionnant les deux égalités, on trouve, pour $y > 0$,

$$\tilde{g}(y) = (f'(x^+) - f'(x^-)) \frac{y + o(y)}{\sin \frac{y}{2}} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 2 (f'(x^+) - f'(x^-)).$$

En raisonnant de la même manière, on trouve que $\lim_{y \rightarrow 0^-} \tilde{g}(y)$ a la même limite. Ainsi, la fonction \tilde{g} est continue en 0. On en déduit que \tilde{g} est continue par morceaux sur $[0, \pi]$. D'après le théorème de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction \tilde{g} , on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \tilde{g}(y) e^{i(N + \frac{1}{2})y} dy = 0, \quad \text{et la partie imaginaire donne} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \tilde{g}(y) \sin((N + \frac{1}{2})y) dy = 0.$$

Avec l'équation (2.4), on obtient bien $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. □

2.6.3 Exemple

Reprenons notre fonction f de l'exemple en Section 2.4.2. On rappelle que f est 1-périodique, vaut -1 sur $(-1/2, 0)$ et 1 sur $(0, 1/2)$, et que les coefficients de Fourier de f sont $c_{2n} = 0$, et $c_{2n+1}(f) = \frac{2}{(2n+1)i\pi}$. La fonction f est $C_{T,m}^\infty$ (elle est constante par morceaux). Le théorème de Dirichlet s'applique, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2}{(2n+1)i\pi} e^{i2\pi(2n+1)x} = \frac{4}{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)2\pi x)}{2n+1} \right].$$

Dans la dernière égalité, on a regroupé les termes $(2n+1)$ et $-(2n+1)$. En évaluant en $x = \frac{1}{4}$, on obtient

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \text{donc} \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

On connaissait déjà cette formule, on l'avait trouvée avec les séries entières appliquées à arctan.

2.6.4 Récapitulatif

On peut résumer notre étude précédente avec ce tableau récapitulatif, qui résume la convergence de $S_N(f)$ vers f , et les autres grands théorèmes du cours.

	CV L2 + Parseval	CVS	CVU	Commentaires
$C_{T,m}^0$	oui	non	non	Parseval marche toujours
$C_{T,m}^1$	oui	oui	non	Thm de Dirichlet
C_T^1	oui	oui	oui	Tout marche à partir de C^1

2.7 Théorème de Féjer (Stone-Weierstrass périodique)

Dans cette section, nous revenons sur le Théorème 4.6 de Stone-Weierstrass/Féjer. Pour une fonction continue périodique $f \in C_T^0$, nous construisons une suite de polynôme $C_n(f)$ qui converge vers f pour la norme uniforme $\|C_n(f) - f\|_\infty$.

L'idée principale de Féjer est de lisser les oscillations de Dirichlet en faisant une moyenne de Césaro.

2.7.1 Noyau de Féjer

On pose

$$F_n(x) = \frac{1}{n} (D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1})(x),$$

et

$$C_n(f) := \int_0^T f(y) F_n(x-y) dy = \frac{1}{n} (S_0(f) + \dots + S_{n-1}(f)).$$

Lemme 2.25. La fonction F_n est positive $F_n(x) \geq 0$ et paire $F_n(-x) = F_n(x)$. De plus,

$$2 \int_0^\pi F_n(x) = \int_{-\pi}^\pi F_n(x) = 1$$

On a la représentation explicite

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2.$$

Enfin, pour tout $\delta > 0$, F_n converge uniformément vers 0 sur $[\delta, \pi]$.

Le lemme suivant est à rapprocher du Lemme 2.23. La principale différence est que F_n est une fonction positive. Voici quelques fonctions de Féjer.

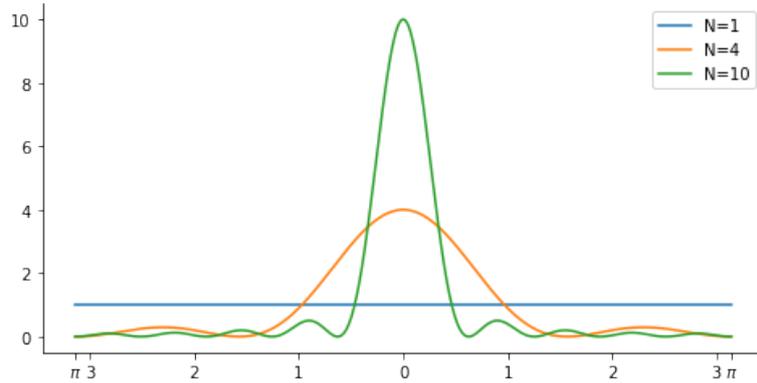


FIGURE 2.6 – Noyau de Féjer pour $N = 1$ (bleu), $N = 4$ (orange) et $N = 10$ (vert).

Démonstration. Commençons par montrer la formule pour F_n . On rappelle que

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} = \frac{1}{2i \sin(\frac{1}{2}x)} \left(e^{i\frac{x}{2}} e^{inx} - e^{-i\frac{x}{2}} e^{-inx} \right).$$

On a donc

$$F_n(x) = \frac{1}{2i \sin(\frac{1}{2}x)} \frac{1}{n} \left(e^{i\frac{x}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} \right) - e^{-i\frac{x}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx} \right) \right).$$

On reconnaît de nouveau des séries géométriques (comme pour la preuve du noyau de Dirichlet). On a, pour la première somme,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n}{2}x} \sin(nx/2)}{e^{i\frac{x}{2}} \sin(x/2)}.$$

L'autre somme s'obtient en prenant le conjugué (ou en changeant x en $-x$). Ainsi

$$F_n(x) = \frac{1}{2i \sin(\frac{1}{2}x)} \frac{1}{n} \left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{i\frac{n}{2}x} \sin(nx/2)}{e^{i\frac{x}{2}} \sin(x/2)} - e^{-i\frac{x}{2}} \frac{e^{-i\frac{n}{2}x} \sin(nx/2)}{e^{-i\frac{x}{2}} \sin(x/2)} \right) = \left(\frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2.$$

On en déduit que F_n est positive et paire. Montrons l'intégrale. On a vu au Lemme 2.23 que $\int_{-\pi}^\pi D_k = 1$ pour tout k . Donc

$$\int_{-\pi}^\pi F_n = \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^\pi D_k(x) = 1.$$

Enfin, si $x \in [\delta, \pi]$, on a $\sin(x/2) \geq \sin(\delta/2)$. Donc

$$\forall x \in [\delta, \pi], \quad |F_n(x)| = F_n(x) \leq \frac{1}{n \sin^2(\delta/2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

2.7.2 Preuve du théorème de Féjer

Théorème 2.26 : Théorème de Féjer

Si $f \in C_T^0$ est continue périodique, alors $C_n(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré $n-1$, et la suite $C_n(f)$ converge uniformément vers f lorsque $n \rightarrow \infty$, c'est à dire $\|f - C_n(f)\|_\infty \rightarrow 0$.

Démonstration. Soit $f \in C_T^0$. Comme $S_k(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré k , $F_n(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré $n-1$.

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[-T/2, T/2]$. D'après le théorème de Heine, elle est uniformément bornée : il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Comme $\int F_n = 1$, on a

$$|C_n(f)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) F_n(y) dy \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) dy.$$

On divise la somme en deux, suivant si y est petit ou non. Dans la partie où $|y| > \delta$, on a par exemple

$$\int_{\delta}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) dy \leq 2\|f\|_\infty \int_{\delta}^{\pi} F_n(y) dy \leq 2\|f\|_\infty \max_{x \in [\delta, \pi]} |F_n(x)| (\pi - \delta).$$

Remarquons que cette inégalité ne fait pas intervenir x dans le terme de droite. Comme F_n converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[\delta, \pi]$, on peut trouver N assez grand et indépendant de x tel que pour tout $n \geq N$, cette intégrale soit plus petite que ε . Donc, pour $n \geq N$, on a

$$\int_{\delta}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) dy \leq \varepsilon, \quad \text{et de même,} \quad \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) dy \leq \varepsilon.$$

Il ne reste plus qu'à montrer la partie entre $(-\delta, \delta)$. Dans ce cas, on a $x-y$ proche de x , et on peut appliquer l'uniforme continuité. On a

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| F_n(y) dy \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} F_n(y) dy \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que pour cet epsilon, il existait $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |C_n(f)(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci montre que $\|C_N(f) - f\|_\infty$ converge vers 0, ce qui conclut la preuve. \square

Ce théorème implique le théorème de Stone-Weierstrass (voir Théorème 2.14).

2.8 Compléments

2.8.1 Le phénomène de Gibbs

On peut se demander si $S_N(f)(x)$ converge *rapidement* vers f . La réponse est non lorsque f a un point de discontinuité. C'est dû aux oscillations du noyau de Dirichlet D_N . Ce phénomène s'appelle le *phénomène de Gibbs*.

Lemme 2.27. Soit $f \in C_{T,m}^1$. Si x_0 est un point de discontinuité de f , et si $a := f(x_0^+) - f(x_0^-)$ est l'écart (ou le saut) de f en x_0 , alors

$$S_N(f) \left(x_0 + \frac{T}{2N} \right) = f(x_0^+) + a \cdot 0.0895... \quad \text{et} \quad S_N(f) \left(x_0 - \frac{T}{2N} \right) = f(x_0^-) - a \cdot 0.0895...$$

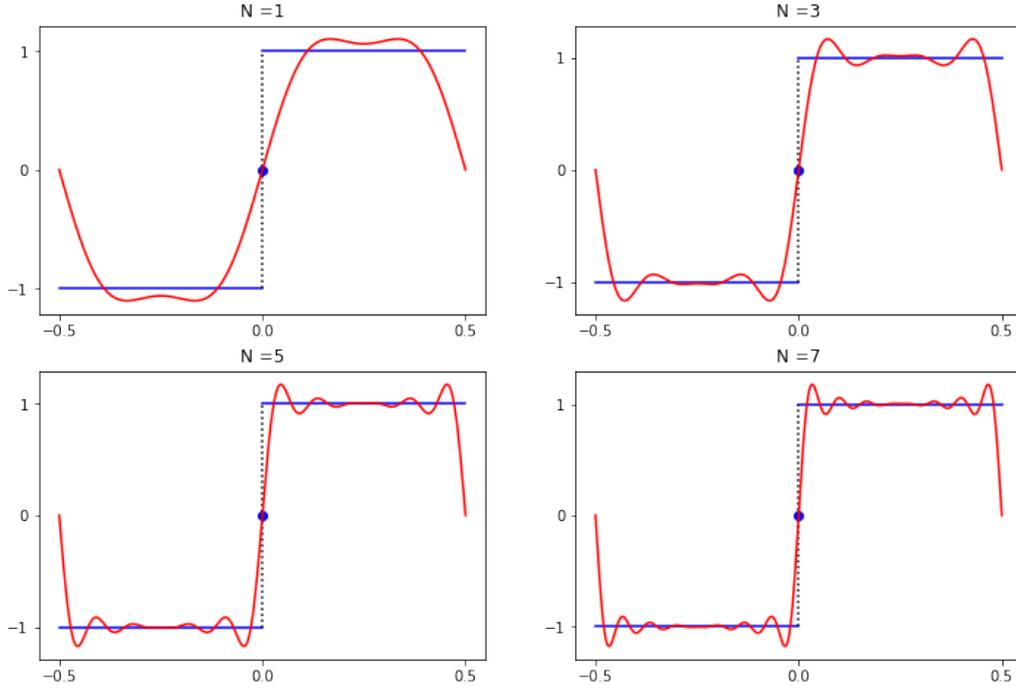


FIGURE 2.7 – Oscillation de Gibbs : Il existe toujours un point x où $S_N(f)(x)$ est loin de $f(x)$.

En particulier, pour tout N , il existe des points où $S_N(f)$ diffère de f d'au moins une constante indépendante de N .

Démonstration. Nous montrons le théorème que pour f la fonction discontinue impaire, 1 périodique, qui vaut $f(x) = 1$ pour $x \in (0, 1/2)$ (et $f(x) = -1$ pour $x \in (-1/2, 0)$). Dans ce cas, on a $a = 2$. Nous avons déjà montré en Section 2.4.2 que pour cette fonction, on a

$$c_{2n}(f) = 0, \quad \text{et} \quad c_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)i\pi}.$$

On obtient, pour $N = 2n + 1$ impaire,

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \frac{2}{(2k+1)i\pi} e^{i2\pi(2k+1)x} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k+1)i\pi} \left(e^{i2\pi(2k+1)x} - e^{-i2\pi(2k+1)x} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi(2k+1)x)}{(2k+1)} \end{aligned}$$

Comme prévu, on a $S_N(f)(0) = 0$. Mais si on évalue au point $x = \frac{1}{2N}$, on obtient

$$S_N(f) \left(\frac{1}{2N} \right) = 4 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\pi(2k+1)/N)}{\pi(2k+1)} = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^n \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{2k+1}{N} \right),$$

où on a posé $\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$, qui est une fonction continue sur $[0, \pi]$. On reconnaît une somme de Riemann, de pas $\frac{2\pi}{N}$, et on en déduit que

$$S_N(f) \left(\frac{1}{2N} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sinc}(x) dx \approx 1.1789797 = 1 + 2 \cdot (0.0895).$$

□

2.8.2 La convolution

Dans ce chapitre, nous donnons quelques propriétés du **produit de convolution**.

Définition et premières propriétés

Pour $f, g \in C_{T,m}^0$, on note $f * g$ la fonction

$$(f * g)(x) := \int_0^T f(x-y)g(y)dy \quad (\text{produit de convolution}).$$

Comme $f * g$ sont toutes les deux continues par morceaux, l'intégrande $f(x-\cdot)g(\cdot)$ est aussi continue par morceaux, et l'intégrale est bien défini. De même, on vérifie que $f * g \in C_T^0$.

Le terme de multiplication est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 2.28. *Si $f, g, h \in C_{T,m}^0$, on a $f * g = g * f$ (commutativité) et $(f * g) * h = f * (g * h)$ (associativité).*

*On a aussi $f * (g + h) = f * g + f * h$ (distributivité).*

Démonstration. Pour la commutativité, on fait un changement de variable $y' = x - y$, de sorte que $y = x - y'$. On a

$$g * f(x) = \int_0^T g(x-y)f(y)dy = \int_x^{x+T} g(y')f(x-y')dy' = \int_0^T f(x-y)g(y)dy = f * g(x).$$

On a utilisé le fait que l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas de où commence la période. Pour l'associativité, on écrit

$$\begin{aligned} f * (g * h)(x) &= \int_0^T f(x-y)(g * h)(y)dy = \int_0^T f(x-y) \int_0^T g(y-z)h(z)dzdy \\ &= \int_0^T \int_0^T f(x-y)g(y-z)h(z)dzdy. \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$(f * g) * h(x) = \int_0^T (f * g)(x-z)h(z)dz = \int_0^T \int_0^T f(x-z-y)g(y)h(z)dydz.$$

En faisant le changement de variable $y' = z - y$ de sorte que $y = z - y'$, on obtient comme avant que $f * (g * h) = (f * g) * h$. Le reste du Lemme est facile. \square

L'importance de la convolution est donnée par le résultat important suivant.

Théorème 2.29. *Si $f, g \in C_{T,m}^0$, alors $f * g \in C_{T,m}^0$, et*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \boxed{c_n(f * g) = \sqrt{T}c_n(f)c_n(g).}$$

Remarque 2.30. *Attention, les conventions de Fourier étant différentes pour tout le monde, il peut ne pas y avoir le facteur \sqrt{T} avec d'autres conventions. Un moyen de vérifier ce facteur est de prendre $k = 0$. En effet, on a (le vérifier)*

$$\int_0^T f * g = \left(\int_0^T f \right) \left(\int_0^T g \right).$$

Dans notre cas, on a $c_0(f) := \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f$, d'où le coefficient \sqrt{T} .

Démonstration. C'est un calcul... On a

$$c_n(f * g) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (f * g)(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T f(x-y)g(y) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dy dx$$

On remarque alors que

$$e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} = e^{-i\frac{2\pi}{T}n(x-y)} e^{-i\frac{2\pi}{T}ny},$$

ce qui donne

$$c_n(f * g) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T g(y) e^{-i\frac{2\pi}{T}ny} \int_0^T f(x-y) e^{-i\frac{2\pi}{T}n(x-y)} dy dx.$$

En faisant le changement de variable $z = x - y$ dans la seconde intégrale, on voit que

$$c_n(f * g) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T g(y) e^{-i\frac{2\pi}{T}ny} \int_0^T f(z) e^{-i\frac{2\pi}{T}nz} dy dz = \sqrt{T} c_n(f) c_n(g).$$

□

La transformée de Fourier remplace donc des convolutions par des multiplications. On pourrait montrer de même le résultat suivant

Théorème 2.31 (Pour la culture seulement). *Si $f, g \in C_{T,m}^0$, alors $fg \in C_{T,m}^0$, et*

$$c_n(fg) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n-k}(f) c_k(g) \quad (\text{convolution discrète}).$$

Nous ne démontrons pas ce théorème, car la preuve est similaire : il faut remplacer convolution par convolution discrète !

Convolution et régularité

Comme la transformée de Fourier d'une convolution se traduit par une multiplication des coefficients, et que la régularité d'une fonction est reliée à la décroissance de ces coefficients, on en déduit que la convolution va régulariser les fonctions.

Lemme 2.32. *Si $f \in C_T^1$, et $g \in C_T^0$, alors $f * g \in C_T^1$, et*

$$(f * g)' = f' * g.$$

La convolution prend la meilleur régularité !

Démonstration. On a (le vérifier)

$$\frac{(f * g)(x+t) - (f * g)(x)}{t} = \int_0^T \left(\frac{f(x-y+t) - f(x-y)}{t} \right) g(y) dy.$$

L'intégrande converge ponctuellement vers $f'(x-y)g(y)$ lorsque $t \rightarrow 0$. De plus, par le théorème d'accroissement fini, l'intégrande est toujours majorée par $\|f'\| \cdot \|g\|$ qui est intégrable sur $[0, T]$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée (voir chapitre suivant), et on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f * g)(x+t) - (f * g)(x)}{t} = \int_0^T f'(x-y)g(y) dy = f' * g(x).$$

□

3.1 Rappels sur les intégrales

3.1.1 Intégrales de Riemann (fonction continue sur intervalle fermé borné)

Dans la théorie de Riemann, l'intégrale est vue comme *l'aire sous la courbe*. L'intégrale de Riemann s'applique à une fonction f continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. Pour calculer cette intégrale, on procède comme suit. Une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie

$$\sigma := \{a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = b\}.$$

Le pas de la suite est le nombre $d(\sigma) := \max_{1 \leq i \leq N} |x_i - x_{i-1}|$. L'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est, par définition,

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{d(\sigma) \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^N f(x_i) |x_i - x_{i-1}| \right).$$

Il n'est pas évident *a priori* que la limite existe (il faut montrer qu'elle est indépendante du choix de la subdivision), et qu'elle est égale à la primitive précédente. Il se trouve que c'est le cas (et cela utilise le fait que f soit continue)!

On en déduit quelques propriétés de l'intégrale (qu'on démontre pour les sommes, et en passant à la limite).

- **Linéarité.** $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$;
- **Positivité.** Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0, \quad \text{si } a \leq b.$$

- **Inégalité.**

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

- **Cauchy-Schwarz.**

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

- **Relations de Chasles.**

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt, \quad \text{et donc} \quad \int_a^b f(t) = - \int_b^a f(t).$$

3.1.2 Extension aux fonctions continues par morceaux, sur un interval fermé borné

La relation de Chasles permet, entre autre, d'étendre la définition de Riemann aux fonctions continues par morceaux. On peut étendre la définition aux fonctions **continues par morceaux**. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a des points de discontinuité $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, on **définit** l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(t) dt := \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt.$$

On remarque que, par définition d'être continue par morceaux, la fonction f admet un prolongement par continuité sur tous les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

3.1.3 Extension à des intervalles quelconques pour des fonctions positives

On s'intéresse maintenant à l'extension de la définition de l'intégrale à des intervalles quelconque. On peut imaginer par exemple :

- le cas où I est borné, mais pas fermé, c'est à dire $I = (a, b)$ ou $I = (a, b]$ ou $I = [a, b)$;
- le cas où I est un intervalle non borné de \mathbb{R} , par exemple $I = \mathbb{R}$, ou $I = (-\infty, a]$ ou $I = (a, \infty)$, etc.

Dans un premier temps, on étend la définition de l'intégrale pour des fonctions **positives** (et continue par morceaux sur I) de la façon suivante. On pose $a := \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b := \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et on considère une suite **décroissante** (a_n) qui converge vers a , et une suite **croissante** (b_n) qui converge vers b . On pose $I_n := [a_n, b_n]$, de sorte que $I_n \subset I_{n+1} \subset \dots \subset I$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$.

Comme f est positive, la suite

$$\alpha_n := \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt$$

est une suite positive et croissante. De deux choses l'une. Soit cette suite est non bornée, et on pose $\int_a^b f(t) dt = +\infty$. Soit cette suite est bornée, auquel cas (α_n) est croissante bornée, donc convergente, et on pose

$$\int_I f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt.$$

Remarque 3.1. À partir de maintenant, il est possible d'avoir $\int f = +\infty$. On dit dans ce cas que f est **non intégrable**.

Exemple : Soit $s > 0$. On pose $f(t) := \frac{1}{t^s}$ sur $I = (0, 1]$. La fonction f est continue et positive sur I (car $0 \notin I$). On veut calculer l'intégrale de f sur I . On a $a = 0$ et $b = 1$, et on pose $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = 1$. On obtient, dans le cas $s \neq 1$,

$$\alpha_n := \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dt}{t^s} = \int_{\frac{1}{n}}^1 t^{-s} dt = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s} \frac{1}{n^{1-s}}.$$

Si $s > 1$, on a $\alpha_n \rightarrow \infty$ (également dans le cas $s = 1$, on a le log dans ce cas), et si $s < 1$, on a $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{1-s}$. Ainsi f est intégrable ssi $s < 1$, et, dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{1-s}.$$

3.1.4 Extension à des intervalles quelconques, cas général

On aimerait maintenant se débarrasser de l'hypothèse de positivité. Il y a deux possibilités pour cela (et cela donne des notions d'intégrales différentes...).

Approche 1. Pour commencer, on peut appliquer l'approche précédente à une fonction f quelconque : on pose de nouveau

$$\alpha_n := \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt,$$

et, si la suite α_n converge vers un $\alpha \in \mathbb{R}$, indépendant du choix des suites (a_n) et (b_n) , alors on pose

$$\int_a^b f(t) dt := \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt.$$

C'est l'approche utilisée dans l'intégration de Riemann et dans l'intégration de Cauchy pour les fonctions complexes.

Approche 2. Soit f continue par morceau sur I . On pose

$$\begin{cases} f_+ := \max\{f, 0\} & \text{(partie positive)} \\ f_- := \max\{-f, 0\} & \text{(partie négative),} \end{cases} \quad \text{de sorte que } f = f_+ - f_-, \quad \text{et } |f| = f_+ + f_-.$$

Les fonctions f_+ et f_- sont positives, donc les intégrales

$$\alpha_+ := \int_I f_+ \quad \text{et} \quad \alpha_- := \int_I f_-$$

sont bien définies, dans $[0, +\infty]$. Si α_+ et α_- ne sont pas tous les deux égaux à $+\infty$, on définit l'intégrale de f comme

$$\int_I f(t) dt := \alpha_+ - \alpha_- = \int_I f_+ - \int_I f_- \in [-\infty, +\infty].$$

On dit que f est **intégrable** si α_+ et α_- sont tous les deux finis. Dans ce cas, $\int_I f \in \mathbb{R}$ est fini aussi. On remarquera que f est intégrable ssi $\int_I |f| < \infty$, autrement dit, dans cette deuxième approche, f est intégrable ssi $|f|$ est intégrable.

Cette approche est celle utilisée dans l'intégration de Lebesgue.

Comparaison des deux approches. On admettra que si f est intégrable avec la deuxième approche, alors f est intégrable avec la première approche (et les intégrales coïncident). En revanche, il existe des fonctions f qui sont intégrables avec la première approche, mais non intégrables avec la seconde approche, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Soit (u_n) une suite alternée telle que $|u_n|$ soit décroissante, et $\sum |u_n| = +\infty$. On peut prendre par exemple $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. On considère la fonction $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ constante par morceaux définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) := u_n \quad \text{si } x \in [n, n+1).$$

On a $|f|(x) = |u_n|$ pour $x \in [n, n+1)$, qui est non sommable, donc f n'est pas intégrable avec la seconde approche. Mais f est intégrable avec la première approche et

$$\int_0^\infty f(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n,$$

qui est une série convergente par le critère des suites alternées.

Exercice 3.2

(Difficile) Montrer que la fonction $f(t) := \frac{\sin(t)}{t}$ sur $I = [0, \infty)$ est non intégrable avec la 2ème approche, mais est intégrable avec la première approche, avec

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{(intégrale de Dirichlet)}.$$

3.1.5 Conventions

Dans la suite du cours, nous allons considérer l'approche 2. Nous pouvons maintenant intégrer des fonctions continues par morceaux quelconques sur des intervalles quelconques !

Fonctions mesurables. Dans ce cours, on ne parlera que d'intégrale de fonctions **continues par morceaux**. Cependant, les théorèmes que nous allons énoncer dans ce chapitre peuvent s'étendre aux fonctions **mesurables**, une notion avancée (nécessitant la théorie de la mesure, et la théorie de l'intégrale de Lebesgue) généralisant les fonctions continues par morceaux. Nous énoncerons donc les théorèmes avec la terminologie *fonction mesurable* dans les théorèmes, et le lecteur devra comprendre qu'il s'agit de fonctions continues par morceaux. Ainsi, dans ce cours

$$\boxed{\text{mesurable} = \text{continue par morceaux}}$$

Fonctions intégrables. Comme nous considérons l'approche 2, on dira qu'une fonction f est **intégrable** si f est mesurable, et si $\int_I |f| < \infty$. On admettra le lemme suivant (on laisse la démonstration en exercice).

Lemme 3.3. *Soit f et $\phi \geq 0$ deux fonctions mesurables sur I . On suppose que $|f| \leq \phi$ et que ϕ est intégrable sur I . Alors f est intégrable sur I , avec*

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt \leq \int_I \phi(t) dt.$$

3.2 La théorème de convergence dominée (TCD)

Le cours sur les intégrales à paramètres commence avec un théorème *admis* (hélas). Fixons d'abord quelques conventions de langage.

Dans la suite, on dit I *intervalle de \mathbb{R}* pour désigner I de la forme $I = [a, b]$ ou $I = [a, +\infty)$, ou $I = (-\infty, b]$, ou $I = \mathbb{R}$.

Dans la suite, on dit f *intégrable sur I* si f est continue par morceaux sur I , et si $\int_I |f|$ existe.

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 3.4 (CVU et intégrabilité). *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I = [a, b]$ un intervalle fini. On suppose que*

- (i) *la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I ,*
- (ii) *f_n et f sont continues par morceaux sur I (= intégrables).*

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Ce théorème, déjà démontré, est à comparer avec le suivant, beaucoup plus puissant et beaucoup plus utile !

Théorème 3.5 : Théorème de Convergence Dominée (TCD)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I un intervalle **quelconque**. On suppose que

- (i) la suite (f_n) **converge simplement** vers f sur I ,
- (ii) f_n et f sont mesurables sur I ,
- (iii) (**domination**) il existe $\phi \geq 0$ intégrable sur I , et telle que $|f_n| \leq \phi$.

Alors f_n et f sont intégrables sur I , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

Un cas très important (le plus utile?) est le cas où $I = [a, b]$ est un intervalle finie, et où les $|f_n|$ ont un majorant commun $M : |f_n| \leq M$. Dans ce cas, on peut prendre $\phi = M$, qui est intégrable sur $[a, b]$.

L'hypothèse de domination est importante! Il permet d'éviter deux phénomènes classiques à **connaître** où la conclusion est fautive :

- **perte de masse à l'infini.** Soit g une fonction positive, à support compact, et telle que $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = 1$. On pose

$$f_n(x) := g(x - n).$$

Alors on a f_n CVS vers $f \equiv 0$ sur \mathbb{R} , mais $\int f_n = \int g = 1$, et $\int f = 0$.

- **Étalement de la masse.** On pose cette fois

$$f_n(x) := \frac{1}{n} g\left(\frac{x}{n}\right).$$

On a f_n qui CVU vers $f \equiv 0$ sur \mathbb{R} , mais $\int f_n = \int g = 1$ et $\int f = 0$.

Exemples :

- $f_n(x) = x^n$ sur $I = [0, 1]$.
- $f_n(x) = \sin^n(x)$ sur $I = [0, 1]$.
- $f_n(x) = e^{-nt}$ sur $I = \mathbb{R}^+$.
- $f_n(x) = \mathbf{1}(x \leq n)(1 - \frac{x}{n})^n$ sur $I = \mathbb{R}^+$.

3.3 Intégration d'une série de fonction

Dans le cas où $f_n(x) = \sum_n u_n(x)$, le TCD permet d'intégrer des séries de fonctions qui convergent simplement. On obtient le théorème suivant.

Théorème 3.6 : Théorème d'intégration termes à termes

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur I un intervalle **quelconque**. On suppose que

- la série $\sum_n u_n$ converge simplement vers f sur I ,
- les fonctions u_n et f sont mesurables sur I ,
- la série numérique $\sum_n (\int_I |u_n|)$ converge (en particulier, u_n est intégrable).

Alors f est intégrable sur I , et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) = \int_I \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n \right) = \int_I f.$$

En pratique, la condition (iii) est simple à vérifier, auquel cas la CVS implique $\sum f = f \sum$.

Démonstration. On pose $f_n(x) := \sum_{k=0}^n u_k(x)$, et on prend la domination $\phi(x) = \sum_n |u_n|(x)$ dans le TCD. On a bien f_n CVS vers f , et f_n continue par morceaux, car c'est une somme finie de fonctions continues par morceaux. De plus, on a toujours

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)| = \phi(x),$$

donc l'hypothèse de domination est satisfaite. Enfin, le fait que ϕ soit intégrable est, hélas, hors programme (lemme de Fatou). En fait, on ne sait même pas ici si ϕ est continue par morceaux... En pratique heureusement, ϕ est souvent explicite, et intégrable à vue. \square

Remarque 3.7. Ce théorème est particulièrement utile dans le contexte des séries entières. Pour les séries entières, on a CVU pour tout **compact** du disque de convergence, mais CVS sur tout le disque de convergence!

3.3.1 Exemple type

On veut calculer

$$A := \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

On remarque que pour tout $t > 0$, on a $e^{-t} < 1$, et donc

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{e^t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = e^{-t} (1 + e^{-t} + e^{-2t} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}.$$

On pose $u_n(t) = te^{-nt}$. On a montré que la série $\sum_{n=1}^N u_n(t)$ converge simplement vers $f(t) := \frac{t}{e^t - 1}$ sur $I = (0, \infty)$. Les fonction u_n et f sont continues (en fait C^∞) sur I , donc mesurables sur I . On a, en intégrant par parties,

$$\int_0^{\infty} |u_n|(t) dt = \int_0^{\infty} te^{-nt} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nt} dt - \underbrace{\left[\frac{te^{-nt}}{n} \right]_0^{\infty}}_{=0} = \frac{1}{n} \left[\frac{-1}{n} e^{-nt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

La série numérique $\frac{1}{n^2}$ est sommable, donc d'après le théorème d'intégration termes à termes, la fonction $\frac{t}{e^t - 1}$ est intégrable, et on a

$$A = \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pourra remarquer que la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $(0, \infty)$: il y a un problème en $t = 0$. Il y a en revanche CVU sur tout intervalle de type $I_\varepsilon := (\varepsilon, \infty)$.

3.4 Intégrales à paramètres

Soit $f(x, t)$ une fonction à deux variables. On pose, lorsque cela est possible

$$F(x) := \int_I f(x, t) dt.$$

La fonction F est donc définie via une intégrale. Le but de ce chapitre est d'étudier les propriétés de F (continuité, dérivabilité, etc.) en fonction de celles de f .

On étudiera principalement le cas où l'intervalle I ne dépend pas de x (intervalle fixe). Afin que $F(x)$ soit bien définie, on demande à ce que pour tout x fixé (x est vu comme un paramètre), la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit intégrable sur I (i.e. continue par morceaux, et d'intégrale bien définie).

Le premier résultat type est le suivant.

Théorème 3.8 : Continuité sous le signe \int

Soit I_x et I_t deux intervalles, et soit $f : I_x \times I_t \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- (i) pour tout $x \in I_x$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est mesurable sur I_t ;
- (ii) pour tout $t \in I_t$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est **continue** sur I_x ;
- (iii) (**domination**) il existe $\phi(t) \geq 0$ intégrable sur I_t telle que $|f(x, t)| \leq \phi(t)$

Alors la fonction

$$F(x) := \int_{I_t} f(x, t) dt$$

est bien définie et est continue sur I_x .

Ce résultat est important, mais pas autant que sa preuve !

Démonstration. Soit $x_* \in I_x$. Montrons que F est continue en x_* . Soit (x_n) une suite **quelconque** de I_x qui converge vers x_* . On pose

$$f_n(t) := f(x_n, t), \quad \text{de sorte que} \quad F(x_n) = \int_{I_t} f_n(t) dt.$$

On veut appliquer le TCD à la suite (f_n) . Vérifions les hypothèses du TCD.

Pour tout t fixé, comme $x \mapsto f(x, t)$ est continue, on a $f_n(t) \rightarrow f(x_*, t)$. Donc f_n converge simplement vers $f(x_*, \cdot)$.

Pour tout n , la fonction $f_n(t)$ est mesurable, et la limite $f(x_*, \cdot)$ aussi.

On a $|f_n(t)| \leq \phi(t)$ avec ϕ intégrable et indépendante de n .

On peut donc appliquer le TCD, et on en déduit que les fonctions f_n et f sont intégrables, et que

$$\int_{I_t} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{I_t} f(x_*, t) dt, \quad \text{ou encore} \quad F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x_*).$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) qui converge vers x_* , on en déduit que F est continue en x_* . Ceci étant vrai pour tout $x_* \in I_x$, on en déduit que F est continue sur I_x . \square

Remarque 3.9. *La continuité est un caractère local. On pourrait relâcher les hypothèses, et avoir une fonction de domination ϕ qui dépend localement du point x_* où on étudie la continuité. On a par exemple le résultat suivant.*

Corollaire 3.10 (Le cas I_t intervalle fini). *Si $f : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors*

$$F(x) := \int_a^b f(x, t) dt$$

est bien définie et est continue.

Démonstration. Montrons la continuité au point $x_* \in \mathbb{R}$. On pose $I_* := [x_* - 1, x_* + 1]$ un segment **fini** contenant x_* . La fonction f est continue sur le **compact** $I_* \times [a, b]$, donc atteint son maximum M sur ce segment.

On applique le théorème précédent à la fonction f restreint à $I_* \times [a, b]$ en prenant $\phi = M$, qui est intégrable sur $[a, b]$. On en déduit que $F(x)$ est continue sur I_* , donc en x_* . Ceci étant vrai pour tout $x_* \in \mathbb{R}$, F est continue sur \mathbb{R} .

Remarquons que dans cette preuve, M dépend de x_* . \square

Exemples :

$$F_1(x) := \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt, \quad F_2(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt, \quad F_3(x) := \int_0^\pi \sqrt{x + \cos(t)} dt.$$

3.4.1 Une démonstration alternative, sans le TCD.

Dans cette section, nous nous proposons de démontrer le Corollaire 3.10 sans utiliser le TCD. Nous allons le remplacer par le théorème de Heine. On a f continue sur le compact $I_* \times [a, b]$ donc est uniformément continue sur ce compact :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, t), (x', t') \in I_* \times [a, b], \quad \|(x, t) - (x', t')\| < \delta \implies |f(x, t) - f(x', t')| \leq \varepsilon$$

Ici, on utilise une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^2 pour le couple (x, t) . Le choix de la norme n'a pas d'importance (toute les normes sont équivalentes en dimension finie -ici 2). On a alors

$$|F(x) - F(x_*)| = \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x_*, t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_*, t)| dt$$

Soit x_* fixé, et soit $\varepsilon > 0$. On introduit δ celui de l'uniforme continuité. Pour x tel que $|x - x_*| \leq \delta$, on a $|(x, t) - (x_*, t)| \leq \delta$. Donc $|f(x, t) - f(x_*, t)| \leq \varepsilon$, puis

$$\forall x \in \mathcal{B}(x_*, \delta), \quad |F(x) - F(x_*)| \leq \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(a - b).$$

Ceci étant vrai pour tout ε , on en déduit que $F(x)$ converge vers $F(x_*)$ lorsque $x \rightarrow x_*$. Donc F est continue en x_* .

3.4.2 Dérivabilité sous le signe intégrale

De manière similaire, on peut dériver par rapport à des paramètres, sous le signe intégrale, sous une hypothèse de domination supplémentaire.

Théorème 3.11 : Dérivabilité sous le signe \int

oit I_x et I_t deux intervalles, et soit $f : I_x \times I_t \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- (i) pour tout $x \in I_x$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est mesurable sur I_t ;
- (ii) pour tout $t \in I_t$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est **de classe C^1** sur I_x ; $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ existe}\right)$
- (iii) pour tout $x \in I_x$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est mesurable sur I_t ;
- (iv) (**domination**) il existe $\phi(t) \geq 0$ intégrable sur I_t telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \phi(t)$.

Alors les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables sur I_t , la fonction $F(x) := \int_{I_t} f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur I_x , et

$$F'(x) = \int_{I_t} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt, \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{I_t} f(x, t) dt \right) = \int_{I_t} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) dt$$

Remarque 3.12. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est dominée par ϕ , alors la fonction f aussi localement dominée par ϕ . En effet, sur un intervalle $[a, b] \subset I_x$, on a, pour tout $x \in [a, b]$, et tout $t \in I_t$,

$$|f(x, t)| = \left| \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(y, t) dy \right| \leq \int_a^x \left| \frac{\partial f}{\partial x}(y, t) \right| dy \leq \int_a^b \phi(t) dy = M.$$

On en déduit que la fonction F est bien continue.

Démonstration. Soit $x_* \in I_x$. Montrons que F est dérivable en x_* . Soit (x_n) une suite **quelconque** de $I_x \setminus \{x_*\}$ qui converge vers x_* . On pose

$$g_n(t) := \frac{f(x_n, t) - f(x_*, t)}{x_n - x_*}, \quad \text{de sorte que} \quad \int_{I_t} g_n(t) dt = \frac{F(x_n) - F(x_*)}{x_n - x_*}.$$

On veut appliquer le TCD aux fonctions g_n . La suite (g_n) CVS vers $g(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, t)$ sur I_t , et les fonctions g_n et g sont continues (car f est de classe C^1). De plus, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $s_n \in (x_n, x_*)$ tel que $g_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(s_n, t)$, ce qui donne la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |g_n(t)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(s_n, t) \right| \leq \phi(t).$$

On peut donc appliquer le TCD, et on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_t} g_n(t) dt = \int_{I_t} g(t) dt, \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F(x_n) - F(x_*)}{x_n - x_*} \right) = \int_{I_t} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, t) dt.$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) qui converge vers x_* , on en déduit que F est dérivable en x_* et que

$$F'(x_*) = \int_{I_t} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, t) dt.$$

Ceci étant vrai pour tout $x_* \in I_x$, la fonction F est dérivable sur I_x . Enfin, on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe \int à la fonction F' (elle vérifie toutes les hypothèses, même la domination), donc F' est continue sur I_x . Ceci conclut la preuve que F est de classe C^1 sur I_x . \square

De nouveau, on a une version où I_t est un intervalle fini. La démonstration est similaire à celle du corollaire précédent, mais il faut cette fois utiliser une domination locale.

Corollaire 3.13 (Le cas I_t intervalle fini). . *Si $f : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , alors $F(x) := \int_a^b f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

3.4.3 Exemple type

On veut calculer

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

On pose $f(x, t) := \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$. La fonction f est C^∞ sur son domaine $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ par composition de fonctions usuelles. Ceci montre déjà les points (i), (ii) et (iii)!

La fonction f est dérivable par rapport à x , et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(xt) e^{-t},$$

donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t) := e^{-t}$ qui est intégrable sur $I_t = (0, \infty)$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe \int . On en déduit que $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ sont intégrables sur I_t , que F est de classe C^1 , et que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^\infty \cos(xt) e^{-t} dt = \int_0^\infty \operatorname{Re}(e^{ixt-t}) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{t(ix-1)} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1} \right]_0^\infty = \operatorname{Re} \frac{1}{1-ix} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

De plus, on a $F(0) = 0$, donc

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(y) dy = 0 + \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(x).$$

On remarque que l'intégrale définissant F est compliquée à étudier, alors que celle définissant F' est plus simple. Le théorème de dérivation permet de calculer F en passant par sa dérivée!

La transformée de Fourier peut-être vu comme une généralisation des **séries de Fourier** à tout l'espace. La grande différence est qu'elle s'applique à des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (pas forcément continue).

4.1 Introduction

Soit $f \in C_0^\infty$ une gentille fonction à support compact strictement inclus dans $[-L, L]$. Comme on le verra ensuite, la transformée de Fourier de f est la fonction

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Avant de commenter cette formule, faisons quelques remarques. Soit \widetilde{f} la fonction $2L$ -périodique qui vaut f sur $(-L, L)$, c'est à dire

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - 2kL).$$

Il est facile de vérifier que \widetilde{f} est une fonction C^∞ et $2L$ -périodique. Son n -ème coefficient de Fourier est (voir aussi dernier exo du TD7)

$$c_n(\widetilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \widetilde{f}(x)e^{-i\frac{2\pi}{2L}x} dx = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\frac{\pi}{L}nx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}} \widehat{f}\left(\frac{n}{L}\pi\right).$$

De plus, d'après le théorème de Dirichlet, comme \widetilde{f} est continue, on a l'identité

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\widetilde{f})e^{i\frac{\pi}{L}nx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{n}{L}\pi\right) e^{i\frac{\pi}{L}nx} \right].$$

Si $x \in [-L, L]$, on a de plus $f(x) = \widetilde{f}(x)$. Supposons maintenant que \widehat{f} soit aussi une gentille fonction (nous verrons sous quelle condition cela est vrai). Alors comme cette formule est vraie quelque soit L suffisamment grand, on peut faire tendre L vers l'infini. On reconnaît alors une somme de Riemann, de pas $\frac{\pi}{L}$, et on aimerait écrire (remarquons que $f(x) = \widetilde{f}(x)$ si $|x| < L$, donc pour tout x si $L \rightarrow \infty$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega. \tag{4.1}$$

Allons un peu plus loin, et regardons ce que donne la formule de Parseval. Pour commencer, comme les supports de $f(x)$ et $f(x - 2kL)$ sont disjoints, pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\int_{-L}^L |\tilde{f}(x)|^2 dx = \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f|^2(x) dx.$$

Ainsi, la formule de Parseval donne

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\tilde{f})|^2 = \frac{\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}\left(\frac{n}{L}\pi\right) \right|^2.$$

De nouveau, on reconnaît une somme de Riemann, de pas $\frac{\pi}{L}$, et en faisant tendre L vers l'infini, on pourrait s'attendre à avoir l'identité de Parseval continue

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |f|^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2(\omega) d\omega.} \quad (4.2)$$

Le but de ce chapitre est de démontrer rigoureusement les formules (4.1) et (4.2) (dans quel cadre les opérations précédentes sont-elles légitimes?).

4.2 Transformée de Fourier pour les fonctions intégrables

On commence par la

Définition 4.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes, telle que $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R} (dans le sens f et $|f|$ sont continues par morceaux, et $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$). La transformée de Fourier de f est la fonction notée \hat{f} ou $\mathcal{F}(f)$ définie de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Remarque 4.2. Cette définition appelle plusieurs remarques.

- Il s'agit d'une intégrale à paramètre, où l'intégrande est $\phi(x, \omega) := f(x) e^{-i\omega x}$.
- Si $|f|$ est intégrable, alors pour tout ω , on a $|f(x) e^{-i\omega x}| = |f|$ qui est aussi intégrable en x .
- La normalisation $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est choisie afin que les identités (4.1) et (4.1) respectent une symétrie élégante. Suivant les ouvrages et les communautés, les conventions peuvent différer.
- Tout comme les pour séries de Fourier, il y a un signe $-$ dans l'exponentielle dans la définition de \hat{f} . Cela est la convention initiale de Fourier, qui écrivait la formule (4.1) sans signe $-$. De nouveau, suivant les ouvrages et les communautés, cette convention peut changer.
- En $\omega = 0$, on obtient l'intégrale de f (à un facteur près), c'est à dire

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

4.2.1 Premières propriétés

L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est clairement linéaire. Si f et g sont deux fonctions telles que $|f|$ et $|g|$ sont intégrables, alors $|f + g|$ est aussi intégrable, et $\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f)$.

De plus, d'après la définition, on voit facilement les identités suivantes (on montrera que les réciproques sont vraies dans la suite).

Conjugaison. On a, avec le changement de variable $y = -x$

$$\overline{\hat{f}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}}(x) e^{i\omega x} dx = \widehat{\overline{f}}(-\omega).$$

En particulier, si f est une fonction réelle, alors $\widehat{\widehat{f}}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$.

Parité. Si f est paire, alors avec le changement de variable $y = -x$ dans l'intégration sur $(-\infty, 0)$, on a

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x) (e^{-i\omega x} + e^{i\omega x}) dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\omega x) dx.$$

En particulier, \widehat{f} est aussi paire. De plus, si f est réelle et paire, alors \widehat{f} est aussi réelle et paire.¹ De même, si f est une fonction impaire, on obtient de même

$$\widehat{f}(\omega) = -i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\omega x) dx.$$

Translation. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $g(x) := f(x - x_0)$. Alors, avec le changement de variable $y = x - x_0$, on a

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x - x_0) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(y) e^{-i\omega(y+x_0)} dy = e^{-i\omega x_0} \widehat{f}(\omega).$$

On dit que les translations deviennent une multiplication par une phase en Fourier.

Dilatation.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$, et soit $g(x) := f(\lambda x)$. Alors, avec le changement de variable $y = \lambda x$, on a

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\lambda x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(y) e^{-i\frac{\omega}{\lambda} y} \frac{1}{\lambda} dy = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right).$$

Nous reviendrons plus tard sur le facteur $\frac{1}{\lambda}$ qui apparaît. On retiendra pour le moment que le sens de la dilatation est inversée par la transformée de Fourier : un λx devient un $\frac{\omega}{\lambda}$ en Fourier.

4.2.2 Régularité

Si $|f|$ est intégrable, on peut utiliser directement utiliser le théorème de continuité sous le signe \int avec la domination $\phi = |f|$, et on en déduit le résultat suivant.

Lemme 4.3. *Si $|f|$ est intégrable, alors la fonction $\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)$ est continue sur \mathbb{R} . De plus, on a*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}|(\omega) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f|(x) dx.$$

En fait, on a aussi que $\widehat{f}(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} 0$ (théorème de Riemann-Lebesgue), mais on en n'aura pas besoin ici.

On pourrait aussi utiliser le théorème de dérivation sous le signe \int . Pour cela, comme on a

$$\partial_\omega (f(x) e^{-i\omega x}) = -ix f(x) e^{-i\omega x},$$

il faudrait que la fonction $|xf(x)|$ soit intégrable. En fait, cette condition est suffisante.

Lemme 4.4. *Si $|f|$ et $|xf|$ sont intégrables, alors $\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et on a*

$$\widehat{f}'(\omega) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xf(x) e^{-i\omega x} dx = -i(\widehat{xf})(\omega).$$

Ainsi, dériver la transformée de Fourier, c'est comme multiplier la fonction f par x . On peut répéter le procédé, et on obtient le théorème suivant.

1. Dans ce cas, on parle parfois de transformée en cosinus.

Théorème 4.5. Si f est une fonction intégrable telle que $|x|^n|f(x)|$ soit intégrable pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors \widehat{f} est de classe au moins C^n , et on a, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (-i)^k \widehat{(x^k f)}(\omega).$$

On retiendra que plus une fonction f décroît rapidement à l'infini, plus sa transformée de Fourier est régulière.

Exercice 4.6

Montrer que si f est à support compact, alors \widehat{f} est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exemple. Si f est la fonction indicatrice $f(x) = \chi_{(-1 \leq x \leq 1)}$, alors

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx.$$

Si $\omega = 0$, on obtient directement $\widehat{f}(0) = \sqrt{2/\pi}$. Pour $\omega \neq 0$, on obtient

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(\omega).$$

On en déduit par exemple que la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ est de classe C^∞ (on le savait déjà avec le cours sur les séries entières).

Inversement, si f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et si $|f'|$ est intégrable, alors on peut faire une intégration par partie, et on a (les termes de bords s'en vont car $f \rightarrow 0$ en $\pm\infty$)

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(x) \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} dx = \frac{1}{i\omega} \widehat{f}'(\omega).$$

En répétant l'opération, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.7. Si f est une fonction de classe C^n telle que $|f^{(k)}|$ soit intégrable sur \mathbb{R} pour tout $0 \leq k \leq n$, alors

$$\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \widehat{f}(\omega).$$

De nouveau, on voit qu'à travers la transformée de Fourier, les dérivations deviennent des multiplications par $(i\omega)$. Plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier tend vite vers 0 à l'infini.

$$\text{Régularité} \xleftarrow{\text{transformée de Fourier}} \text{décroissance à l'infini}.$$

4.2.3 Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors on peut définir le produit de convolution (continue) $h = f * g$ par

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Lemme 4.8. Si f et g sont intégrables, alors $h = f * g$ est bien définie, est intégrable, et on a

$$\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g.$$

On admet la démonstration, qui fait appel au théorème de Fubini.

On peut alors calculer la transformée de Fourier de h . On obtient, formellement (le théorème de Fubini permet de justifier les manipulations suivantes)

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}g(y)e^{-i\omega y}dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-i\omega z}g(y)e^{-i\omega y}dydz = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Ainsi, le produit de convolution est transformée en produit de multiplication en Fourier (avec un facteur $\sqrt{2\pi}$ assez énervant...). Ainsi,

$$\boxed{\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}\widehat{g}.}$$

4.3 Transformée de Fourier inverse

Soit f une fonction C^∞ à support compact. D'après précédemment, sa transformée de Fourier \widehat{f} est aussi de classe C^∞ , et décroît plus vite que n'importe quel polynôme. \widehat{f} est donc intégrable, et on peut définir.

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

C'est la transformée de Fourier inverse de \widehat{f} (notons le signe + dans l'exponentielle).

Théorème 4.9 (Transformée de Fourier inverse). *Si f est une fonction intégrable de classe C^2 , alors $g = f$.*

Démonstration. En reprenant les calculs de l'introduction, on sait que pour tout L tel que le support de f est dans $[-L, L]$, et pour tout $x \in [-L, L]$, on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{n}{L}\pi\right) e^{i\frac{\pi}{L}nx} \right].$$

En posant $h(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}$, on a donc, pour tout L grand,

$$g(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(\omega)d\omega - \frac{\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h\left(\frac{n}{L}\pi\right).$$

On veut donc comparer une intégrale avec une somme de Riemann associée. On sait que h est une fonction continue (en fait C^∞) qui décroît à l'infini. On écrit

$$|g - f|(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{n}{L}\pi}^{\frac{n+1}{L}\pi} |h(\omega) - h\left(\frac{n}{L}\pi\right)| d\omega$$

□