Université Paris-Dauphine
Centre de Recherche en Mathématiques de la Décision

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

présenté par

Boris Haspot

Analyse de quelques problèmes mathématiques en mécanique des fluides pour les équations de Navier-Stokes compressibles

---

Coordinateur : M. Olivier Glass

Soutenu le 27 Novembre 2015 après avis de

M. David Lannes,	*Directeur de recherche CNRS - Université Bordeaux I*
M. Frédéric Rousset,	*Professeur - Université Paris Sud-Orsay*
M. Alexis Vasseur,	*Professeur - Austin University*

devant le jury composé de

M. Jean-Yves Chemin,	*Professeur - Université Pierre et Marie Curie*
M. Raphaël Danchin,	*Professeur - Université Paris Est-Créteil*
M. Eduard Feireisl,	*Professeur - Académie des Sciences-Prague*
M. Olivier Glass,	*Professeur - Université Paris-Dauphine*
M. Frédéric Rousset,	*Professeur - Université Paris Sud-Orsay*
M. Didier Smets,	*Professeur - Université Pierre et Marie Curie*

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à Raphaël Danchin qui a accepté de diriger ma thèse et a suivi mon évolution scientifique tout au long de ces dernières années. Ses travaux ont toujours été une grande source d'inspiration, et je loue sa rigueur scientifique, sa disponibilité, ainsi que les nombreux conseils qu'il a toujours su me prodiguer. J'aimerais également associer à ces remerciements Frédéric Charve. Je n'oublie pas la période compliquée durant laquelle j'ai enchaîné les postdocs avant de pouvoir obtenir un poste de maître de conférence. Cher Frédéric, cher Raphaël vous m'avez toujours soutenu, suivi et conseillé à bon escient. Je suis très reconnaissant pour toute l'aide que vous m'avez procurée.

Je suis particulièrement honoré que David Lannes, Frédéric Rousset et Alexis Vasseur aient accepté d'écrire des rapports sur ce mémoire, je les en remercie très chaleureusement. Je remercie tout particulièrement David à qui je dois beaucoup.

Je remercie Olivier Glass d'avoir coordonné cette habilitation. Je suis également très touché que Jean-Yves Chemin, Eduard Feireisl et Didier Smets fassent partie de ce jury. Leurs travaux sont pour moi des références et j'espère pouvoir continuer à m'en inspirer.

Ce mémoire est en très grande partie le fruit des collaborations que j'ai pu développer ces dernières années. Je tiens donc à remercier vivement Corentin Audiard, Frédéric Charve et Ewelina Zatorska. Sans vous, tous ces travaux n'auraient pas vu le jour. Merci à Frédéric pour toutes ces passionnantes discussions autours des systèmes capillaires (parfois même lors d'hivers neigeux dans le Baden Württemberg !), merci à Corentin, « mon compère basque », pour m'avoir fait partager son goût pour l'équation d'Euler Korteweg (je n'oublierai pas notre année basque :)) et merci à Ewelina, notamment pour nos discussions sur la Pologne. J'espère que nos collaborations (ainsi que tout le reste :)) continueront longtemps et qu'elles seront toujours aussi fructueuses. J'aimerais également remercier Benoît, Bernard, Didier, Ethem, Malik, Omar, Yohan avec qui j'espère que nos travaux actuels seront féconds. J'adresse un remerciement tout particulier à Bernard qui m'a fait découvrir son île de beauté à Corte et les bons petits plats qui vont avec.

J'aimerais enfin remercier tous les membres des différents centres dans lesquels j'ai travaillé ces dernières années à savoir le LAMA de l'université Paris-Est Créteil, l'université d'Heidelberg, le BCAM à Bilbao et enfin le CEREMADE ainsi que le département MIDO à l'université Paris-Dauphine. J'ai pu y bénéficier d'une très bonne ambiance et d'une excellente atmosphère de travail qui m'ont été des plus profitables. Un petit mot amical en particulier pour Anthony, François, Guillaume, Julien, Nejla, Pierre qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire et qui ont su s'accommoder de ma présence quotidienne au cours de ces dernières années. J'ai enfin une pensée affectueuse pour tous mes amis qu'ils soient mathématiciens ou non, avec qui il est toujours agréable de passer de bons moments.

Ma famille a toujours été à mes côtés et m'a toujours soutenu. Je voudrais lui dire un immense merci.

Table des matières

Liste des travaux présentés

La numérotation reprend celle de la bibliographie générale. Certains de mes articles (notamment ceux issus de ma thèse de doctorat) ne sont pas présentés dans ce mémoire, certains d'entre eux étant seulement mentionnés dans le corps du texte.

[6] C. Audiard et B. Haspot. From Gross-Pitaevskii equation to Euler Korteweg system, existence of global strong solutions with small irrotational initial data, Preprint, soumis.

[7] C. Audiard et B. Haspot. Global well-posedness of the quasi-linear Euler-Korteweg system for small irrotational data. *Preprint*, soumis.

[33] F. Charve et B. Haspot. Convergence of compressible capillary fluid models : from the non-local to the local Korteweg system. *Indiana University Mathematics Journal.* 6 (2011) 2021-2060.

[35] F. Charve et B. Haspot. Existence of global strong solution and vanishing capillarity-viscosity limit in one dimension for the Korteweg system. *SIAM J. Math. Anal.* 45, (2) (2013), 469-494.

[105] B. Haspot. Existence of global strong solutions in critical spaces for barotropic viscous fluids. *Arch. Rational. Mech. Anal.* 202, Issue 2 (2011), 427-460.

[107] B. Haspot. Well-posedness for density-dependent incompressible fluids with non-Lipschitz velocity. *Annales de l'Institut Fourier.* 62, (5) (2012) p. 1717-1763.

[110] B. Haspot. From the highly compressible Navier-Stokes equations to fast diffusion and porous media equations, existence of global weak solution for the quasi-solutions, à paraître dans *Journal of Mathematical Fluid Mechanics.*

[112] B. Haspot. Existence of global strong solution for Korteweg system with large infinite energy initial data. à paraître dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*

[114] B. Haspot. Global existence of strong solution for shallow water system with large initial data on the irrotational part. *Preprint, soumis.*

[115] B. Haspot. New formulation of the compressible Navier-Stokes equations and parabolicity of the density, *Preprint, soumis.*

[117] B. Haspot. Existence of global strong solution for the compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coefficients in 1D, *Preprint, soumis.*

[118] B. Haspot et E. Zatorska. From the highly compressible Navier-Stokes equations to the Porous Media equation, rate of convergence, à paraître dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A.*

Résumé

Mon travail porte principalement sur l'étude du système de Navier-Stokes compressible ainsi que de systèmes capillaires introduits par D. J. Korteweg et ceci sous deux angles différents l'existence de solutions faibles globales ainsi que l'existence de solutions fortes. Pour ce faire, ceci requiert des outils d'analyse harmonique de type théorie de Littlewood-Paley afin de prouver l'existence de solutions fortes dans des espaces de données initiales critiques en terme de régularité. L'existence de solutions faibles globales nécessite de développer des arguments fins de compacité afin de prouver la stabilité des solutions faibles, ceux-ci pouvant notamment provenir de nouvelles entropies ou estimations d'énergie. La conséquence commune de ces résultats est une meilleure compréhension de ces différents systèmes via l'utilisation selon le contexte d'effets paraboliques, d'amortissement ou encore de dispersion.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre consiste en une introduction générale sur les équations de Navier-Stokes compressibles et de Korteweg, où l'on s'attache à rappeler les résultats essentiels relatifs à la théorie de l'existence globale de solutions faibles et de solutions fortes ainsi qu'aux propriétés qualitatives des solutions. Le chapitre II traite essentiellement du système de Navier-Stokes compressible. Dans la section II.1 on cherche dans un premier temps à montrer l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales petites dans des espaces de Besov critiques (c'est à dire des données initiales aussi peu régulières que possible). Par la suite on cherchera à affaiblir la notion de petitesse en permettant le choix de données initiales grandes pour le scaling du système (en effet les équations de Navier-Stokes possèdent une invariance d'échelle). Dans la section II.2 on essaiera de mieux appréhender le comportement des solutions, notamment dans certaines configurations où les coefficients de viscosité dépendent de la densité ρ, ces dernières peuvent alors dans certains cas être soumises à des effets régularisants de type parabolique. Ce genre d'observation nous permettra alors de prouver l'existence de solutions fortes globales avec données initiales grandes en une dimension pour le système de Shallow water visqueux. Dans la section II.3 on considérera la limite hautement compressible (par opposition à la limite faiblement compressible voir [68, 59]) des équations de Navier-Stokes compressibles. On observe ainsi que la densité ρ a tendance à vérifier l'équation des milieux poreux pour le régime hautement compressible (c'est à dire lorsque le Nombre de Mach ε tends vers l'infini) et ceci pour certains choix particuliers de coefficients de viscosité. Enfin dans la section II.4 on se concentrera sur les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable où l'on montrera un équivalent du théorème de Fujita-Kato pour ces équations.
Le chapitre III est quand à lui consacré aux systèmes capillaires (Korteweg, Korteweg local ou encore Euler-Korteweg). Dans la section III.1, on prouve l'existence de solutions fortes globales avec données initiales petites dans des espaces de Besov critiques et d'énergie infinie pour le système de Korteweg. Dans la section III.2 on cherche à relier le système de Korteweg local au système de Korteweg non local, on montre plus précisément que pour un noyau ϕ_ε bien choisi les solutions de Korteweg non local convergent vers les solutions de Korteweg local. Dans la section III.3 on considère via un processus de viscosités et de capillarités évanescentes la convergence des solutions du système de Korteweg local vers une solution entropique d'énergie finie du système

d'Euler compressible en une dimension. Enfin dans la section III.4 on démontre l'existence globale de solutions fortes avec données initiales petites irrotationnelles pour le système d'Euler Korteweg. Pour ce faire on tire partie du comportement dispersif du système via une analyse fine de type résonance temps-espace. Par la même il advient que les équations de Gross-Pitaevskii ne génèrent pas de vortex en dimension $N \geq 3$ si tant est que la donnée initiale soit choisie proche de l'état d'équilibre $\bar{\psi} = 1$.
Enfin on rappelle très brièvement les notions de paraproduit ainsi que la théorie de Littlewood-Paley dans l'appendice en section IV.

Chapitre I

Introduction

I.1 Équations de Navier-Stokes compressibles

I.1.1 Présentation du modèle

Dans la suite de ce manuscrit nous considérerons systématiquement le système de Navier Stokes compressible barotrope où l'on postule que la pression P ne dépend que de la densité ρ. Pour fixer les idées, on prend :

$$P(\rho) = a\rho^{\gamma}, \;\; a > 0, \;\; \gamma > 1.$$

Cette restriction consiste essentiellement à considérer une évolution adiabatique du fluide en négligeant le flux de chaleur visqueux. Le système correspondant s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho)D(u)) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div} u) + \nabla P(\rho) = \rho f, \\ (\rho, u)(0, \cdot) = (\rho_0, u_0), \end{cases} \tag{1}$$

où ρ représente la densité du fluide, le champ de vecteur $u \in \mathbb{R}^N$ la vitesse et P la pression. Les forces de masse sont décrites par le champ de vecteur f.
Les équations de (1) représentent respectivement l'équation de la masse et l'équation du moment. De plus afin d'obtenir la fermeture du système on suppose le fluide Newtonien, il existe alors deux coefficients de viscosité μ et λ vérifiant la condition de Lamé :

$$\mu(\rho) > 0 \;\text{ et }\; 2\mu(\rho) + N\lambda(\rho) > 0. \tag{2}$$

Enfin $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u +^t \nabla u)$ est le symétrisé du gradient de vitesse ∇u. Dans ce manuscrit on va s'intéresser à étudier les équations de Navier-Stokes compressibles et ceci sous au moins trois aspects différents, quoique tous reliés par la question fondamentale de « l'existence globale et l'unicité de solutions ».
Notre première considération consistera à montrer l'existence (globale pour des données petites ou en temps fini) et l'unicité de solutions pour des données initiales aussi peu régulières que possible. En effet les équations de Navier-Stokes compressibles admettent une énergie, si l'on multiplie l'équation du moment par la vitesse u, on obtient au moins formellement la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\frac{1}{2}\rho|u|^2 + (\Pi(\rho) - \Pi(\bar{\rho}))(t)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (2\mu(\rho)|D(u)|^2$$
$$+ \lambda(\rho)|\mathrm{div} u|^2)dx\, ds \leq \int_{\mathbb{R}^N} \big(\rho_0|u_0|^2 + (\Pi(\rho_0) - \Pi(\bar{\rho}))\big)dx,$$

avec $\bar{\rho} > 0$ et où Π est défini comme suit :

$$\Pi(s) = s\Big(\int_{\bar{\rho}}^{s} \frac{P(z)}{z^2}dz - \frac{P(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}\Big).$$

En imposant l'inégalité suivante sur les données initiales :

$$\epsilon_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \big(\rho_0|u_0|^2 + (\Pi(\rho_0) - \Pi(\bar{\rho}))\big)dx < +\infty\,, \tag{3}$$

on obtient les estimations à priori suivantes :

$$\Pi(\rho) - \Pi(\bar{\rho}),\ \rho|u|^2 \in L^{\infty}((0,\infty), L^1(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et} \quad (Du)_{ij},\ \text{div}u \in L^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)\ \ \forall (i,j) \in [1,N]^2.$$

Une première approche naturelle afin d'obtenir l'existence de solutions fortes globales avec données grandes est de combiner des résultats d'existence locale avec les estimations d'énergie. C'est ainsi que J. Leray en 1934 dans [161] a prouvé l'existence de solutions fortes globales en dimension $N = 2$ pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Il est donc pertinent de chercher à prouver l'existence de solutions fortes pour des données initiales aussi peu régulières que possible, afin de par la suite pouvoir espérer prouver un résultat de solutions fortes globales [1] en suivant la méthode de J. Leray. On verra malheureusement que les choses ne sont pas aussi simples pour les équations de Navier-Stokes compressibles, en effet l'existence de solutions fortes globales même en dimension $N = 2$ reste un problème ouvert (excepté pour certains choix très particuliers de viscosité, voir V. A. Vaigant et V. Kazhikhov dans [199]).

Le second axe de notre recherche concerne l'existence de solutions globales avec des données initiales "grandes" (on va préciser par la suite ce que l'on entend par "grand" selon le contexte de travail) ; il est alors judicieux de commencer par montrer l'existence de solutions faibles globales comme l'a fait J. Leray pour les équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension $N \geq 2$. De tels résultats ont également été obtenus pour les équations de Navier-Stokes compressibles dans le cadre de coefficients de viscosité constants (voir P-L Lions dans [163] et E. Feireisl et al dans [80]). Cependant si ces résultats permettent de travailler avec des données initiales grandes, ils ont l'inconvénient de ne rien pouvoir dire sur l'unicité et la régularité de la solution. Une étape intermédiaire consisterait donc à montrer l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales petites pour une certaine norme $\|\cdot\|_X$ avec X espace fonctionnel le plus grand possible. On va ainsi par la suite rappeler la notion d'invariance par échelle pour les équations de Navier-Stokes compressibles, qui permet de définir des espaces fonctionnels Y "critiques" en terme de régularité sur les données initiales ($Y = H^{\frac{N}{2}} \times (H^{\frac{N}{2}-1})^N$ par exemple), pour lesquels on peut espérer l'existence de solutions fortes. Notre question précédente peut donc se réinterpréter sous la forme suivante, peut-on prouver l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales petites dans un certain espace fonctionnel X mais grandes dans l'espace fonctionnel critique Y avec Y s'injectant dans X.

Enfin il est intéressant d'essayer de mieux appréhender le comportement des solutions de Navier-Stokes compressible, il s'agit en particulier d'obtenir des résultats qualitatifs sur ces solutions. Par exemple quels sont les mécanismes qui gouvernent la densité ρ, celle-ci est elle soumise à d'éventuels effets régularisants. De la même manière est-il possible de déterminer la limite des solutions de Navier-Stokes compressible lorsque le nombre de Mach tends vers l'infini (ce qui s'apparente à une limite hautement compressible).

On va dans cette introduction rappeler quelques premiers résultats importants répondant à ces trois axes de recherche avant de par la suite présenter les résultats obtenus dans ce mémoire.

1. au moins en dimension $N = 2$ et si tant est que l'espace de données initiales pour nos solutions fortes locales coïncide avec l'espace d'énergie.

I.1.2 Existence de solutions fortes pour les équations de Navier-Stokes compressibles avec données initiales peu régulières

On va ici s'intéresser à l'existence de solutions fortes globales à données petites pour le système de Navier-Stokes compressible barotrope (1). Nous allons ainsi rappeler quelques résultats classiques de solutions fortes pour ces équations ainsi que la notion de "scaling" développée et popularisée par H. Fujita et T. Kato dans [84] dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles.

Commençons par rappeler la notion importante de « scaling » ou invariance d'échelle qui permet au moins heuristiquement de décrire les espaces critiques (« critiques » en terme de régularité) dans lesquels on peut espérer obtenir l'existence de solutions fortes. On peut ainsi vérifier aisément que si (ρ, u) est une solution du système (1), alors $(\rho_\lambda, u_\lambda)$ est aussi solution du système avec :

$$\rho_\lambda(t,x) = \rho(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{et} \quad u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x) \tag{4}$$

où la pression P a été changée en $\lambda^2 P$.

Définition 1. *Nous dirons qu'un espace normé X est critique au sens du scaling si :*

$$\|(\rho_0, u_0)\|_X = \|(\rho_0(\lambda\cdot), \lambda u_0(\lambda\cdot))\|_X,$$

et ceci pour n'importe quel $\lambda > 0$.

Rappelons que cette approche est maintenant classique et a fait l'objet de nombreux travaux pour des équations de la mécanique des fluides en particulier Navier-Stokes incompressible (voir notamment [84, 27, 152]). Un candidat naturel vérifiant cette propriété est le produit d'espaces de Sobolev homogènes suivant $E = \dot{H}^{N/2} \times (\dot{H}^{N/2-1})^N$. Cependant les premiers résultats d'existence de solutions fortes nécessitent de travailler dans des espaces de données initiales beaucoup plus réguliers. Ainsi l'existence de solutions régulières locales ou globales pour des données petites est connue depuis J. Nash [175], A. Matsumura et T. Nishida [169] et V. A. Solonnikov [192, 193, 194]. Ce dernier a en particulier obtenu des résultats d'existence de solution forte en temps fini pour des données initiales $(\rho_0, u_0) \in \big(L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^N)\big) \times W^{1,2-\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^N)$ avec $q > N$ et $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M$ partout dans $\mathbb{R}^N$. On peut ainsi observer qu'en dimension $N = 2$ ces données initiales ne sont pas loin d'être critiques ce qui n'est déja plus le cas lorsque $N \geq 3$.
Travailler au niveau des espaces de régularité critique nécessite souvent des techniques plus avancées en terme d'analyse harmonique et fait appel en particulier à la théorie de Littlewood-Paley. R. Danchin dans [52, 53, 54, 57] fut le premier à prouver l'existence de solutions fortes pour Navier-Stokes compressible dans des espaces de données initiales critiques. Il montra ainsi l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales proches de l'équilibre et qui appartiennent à des espaces de Besov critiques en terme de scaling. Plus précisément dans [52] les données initiales $(\rho_0 - 1, u_0)$ sont petites dans l'espace $(B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1} \cap B^{\frac{N}{2}}_{2,1}) \times (B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})^N$. Une des subtilités importantes de ce résultat est d'établir un effet d'amortissement sur la densité qui appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}}_{2,1})$ et ceci par des estimations d'énergie très fines en fréquences (après découpage dyadique à la Littlewood-Paley).
On peut observer qu'on demande dans ce résultat une hypothèse supplémentaire sur la densité initiale puisqu'elle appartient également à l'espace de Besov $B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}$; ceci est assez naturel puisque l'on a besoin de tenir compte du comportement basses fréquences de la densité. Ajoutons que dans tous ces résultats un point essentiel concerne le contrôle du « vide » afin de tirer profit au mieux des effets paraboliques de l'équation du moment. C'est pourquoi dans [52], $\rho_0 - 1$ appartient à $B^{\frac{N}{2}}_{2,1}$ qui s'injecte dans L^∞ ; cela implique que tout au long du temps la densité ρ reste proche de l'état d'équilibre $\bar{\rho} = 1$ et ne s'annule donc jamais. En particulier cela nécessite que le troisième

indice de l'espace de Besov soit égal à 1, ceci est crucial puisque l'injection $B^{\frac{N}{2}}_{2,r}$ dans L^∞ n'est vraie que pour $r=1$. Enfin un point commun à tous ces théorèmes est de montrer que la vitesse u est Lipschitzienne, c'est à dire ∇u appartient $L^1_T(L^\infty)$; ceci permet de propager la régularité de la densité ρ_0 pour tout $\rho(t,\cdot)$ via l'équation de masse.
R. Danchin a également montré l'existence de solutions fortes en temps fini pour (ρ_0-1,u_0) dans $B^{\frac{N}{p}}_{p,1}\times(B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1})^N$; plus précisément il prouve l'existence de solutions pour $p<2N$ et leur unicité pour $p\leq N$ (voir [54, 57, 58]). Ces restrictions sur le choix de p proviennent des lois de paraproduit lorsque l'on considère le terme $\frac{1}{\rho}\Delta u$. Ces résultats ont ensuite été généralisés au cadre d'espaces de Besov n'ayant pas le même indice pour la densité et la vitesse (voir [106]). Pour ce faire on introduit une vitesse efficace qui a l'avantage de diagonaliser le système et ainsi découpler les termes de vitesse et de pression. Pour le cas de viscosité dépendant de la densité on renvoie à [102, 42]. Enfin très récemment R. Danchin a étendu les résultats précédents au cas $1\leq p<2N$, en effet il montre l'unicité de ces solution pour des p appartenant également à l'itervalle $]N,2N[$. Pour ce faire il réécrit le système en coordonnées Lagrangiennes ce qui lui permet de réduire l'interaction entre densité et vitesse, cela suit des travaux très intéressants sur les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable sur lesquels nous reviendrons (voir [63, 64]).
Comme on l'a vu, la plupart des travaux sur les solutions fortes considèrent donc des densités initiales minorées par un nombre strictement positif et ceci afin de mieux prendre en compte les effets paraboliques de l'équation du moment ; cependant peu de travaux sur les solutions fortes traitent le cadre d'une densité initiale admettant l'état de vide. Cette situatation est d'autant plus intéressante que si l'on s'intéresse aux solutions faibles globales de P.-L. Lions (voir [166]), celles-ci sont construites pour une densité initiale ρ_0 proche du vide puisqu'elle appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ [2].
Une autre raison rend l'étude des solutions fortes avec données initiales admettant du vide particulièrement importante, cela concerne la notion de « solutions autosimilaires » largement développée notamment dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles (voir en particulier [27, 160, 136]). En effet on a vu qu'il existe une certaine invariance d'échelle pour les équations de Navier-Stokes compressibles (voir (4)), cependant cette invariance d'échelle n'est que partiellement vraie à cause du terme de pression. Par contre on peut définir une invariance d'échelle absolument exacte lorsque la densité est proche du vide (voir [110]), cela induit donc la possibilité de l'existence de solutions autosimilaires si tant est que l'on travaille avec des données homogènes respectant cette invariance d'échelle.
L'un des premiers à avoir considéré le problème de l'existence de solutions fortes avec du « vide » est B. Desjardins dans [66] qui considère le problème de Navier-Stokes compressible isotherme sur un tore. Il obtient alors dans le cas de la dimension $N=2,3$ un résultat d'existence de solutions faibles « régulières » en temps fini en prenant $\rho_0\geq 0$, $\rho_0\in L^\infty(\mathbb{T}^N)$ et $u_0\in H^1(\mathbb{T}^N)^N$. En effet ces solutions sont régulières au sens où la vitesse u appartient à $L^\infty(H^1(\mathbb{T}^N))$ et la pression efficace $P(\rho)-(2\mu+\lambda)\mathrm{div}u$ est dans $L^2(H^1(\mathbb{T}^N))$, la densité est quand à elle bornée dans L^∞. De plus il obtient pour la première fois un résultat d'unicité fort-faible pour ces solutions.
Enfin dernièrement Y. Cho, H. J. Choe et H. Kim dans [45] (voir aussi [46]) obtiennent de véritables solutions fortes avec des données initales qui autorisent le vide. Effectivement ils généralisent les résultats de B. Desjardins dans le cas $N=3$ et montrent ainsi l'existence et l'unicité de solutions en temps fini pour un domaine Ω et ceci en choisissant des données initiales vérifiant $0\leq\rho_0\in H^1\cap W^{1,q}$ (avec $3<q<+\infty$), $u_0\in H^1_0\cap H^2$ ainsi que la condition de compatibilité suivante :

$$Lu_0+\nabla P(\rho_0)=\sqrt{\rho_0}g\quad\text{avec}\quad g\in L^2.$$

Tous ces résultats s'obtiennent en utilisant de subtiles inégalités d'énergie. Ces résultats ont été récemment étendus au cas de l'existence globale de solutions fortes avec données petites par X.

2. Mentionnons cependant que P.-L. Lions obtient aussi de tels résultats dans des espaces d'Orlicz où la densité est proche d'un état stable strictement positif ce qui serait le pendant des travaux sur les solutions fortes préalablement cités.

Huang et al dans [132] ; ce résultat est extrêmement intéressant, il ne couvre malheureusement pas le cadre des solutions autosimilaires. En effet la preuve repose sur de nombreuses estimations d'énergie « à la D. Hoff » et nécessite en particulier de choisir des données initiales vérifiant les estimations d'énergie (3) avec $\bar{\rho} = 0$; malheureusement l'inégalité (3) est incompatible avec les conditions d'autosimilarité sur les données initiales (en effet celle-ci doivent être homogènes avec un degré dépendant du choix de la pression P).

I.1.3 Existence de solutions globales avec "faible" condition de petitesse pour les équations de Navier-Stokes compressibles

Cas des solutions faibles globales

On va à présent considérer les conditions initiales suivantes pour le système (1) :

$$\begin{cases} \rho_{/t=0} = \rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\gamma(\mathbb{R}^N), \\ (\rho u)_{/t=0} = m_0 \ \text{ et } \ \dfrac{|m_0|^2}{\rho_0} \in L^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

avec pour fixer les idées la pression suivante :

$$P(\rho) = a\rho^\gamma, \ \ a > 0, \ \ \gamma > 1,$$

et où par convention $\frac{|m_0|^2}{\rho_0}(x) = 0$ lorsque $\rho_0(x) = 0$.
Nous allons maintenant rappeler un résultat fondamental dû à P.L. Lions dans [163] qui montre l'existence de solutions faibles globales pour le système (1) de Navier-Stokes compressible barotrope avec des coefficients de viscosité constants. Ce résultat est à voir comme le pendant du théorème d'existence globale de solutions faibles de J. Leray pour le système de Navier-Stokes incompressible. P.-L. Lions obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 1. *Si $\gamma \geq \frac{3}{2}$ et $N = 2$, $\gamma \geq \frac{9}{5}$ et $N = 3$, ou $\gamma > \frac{N}{2}$ et $N \geq 4$, alors il existe une solution faible globale (ρ, u) dans $L^\infty(0,\infty; L^\gamma(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^1(\mathbb{R}^N))$. De plus ρ est dans $C([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^N))$ si $1 \leq p < \gamma$, $\rho|u|^2 \in L^\infty(0,\infty; L^1(\mathbb{R}^N))$, et $\rho \in L^q((0,T) \times \mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [1, \gamma - 1 + \frac{2\gamma}{N}]$ si $N \geq 3$, et $q \in [1, 2\gamma - 1)$ si $N = 2$. En outre, pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité d'énergie :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma)(t,x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div} u|^2)(s,x)dxds \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{1}{2}\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + \frac{a}{\gamma-1}\rho_0^\gamma)(x)dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Nous allons maintenant expliquer succinctement les idées de la démonstration de ce théorème. Dans un premier temps il s'agit de construire des solutions approchées $(\rho_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour (1) vérifiant uniformément en n les inégalités d'énergie du système ; ces solutions sont construites après plusieurs niveaux d'approximation du système (1) et ceci notamment en introduisant des effets de viscosité sur la densité. La partie la plus délicate consiste ensuite à prouver la stabilité des solutions faibles (ou en d'autres termes le passage à la limite lorsque n tends vers l'infini). Un des points clé est la notion de pression efficace $\widetilde{P} = P(\rho) - (2\mu + \lambda)\mathrm{div}u$ introduite par D. Hoff dans [126]. P.-L. Lions montre ainsi que cette expression multipliée par ρ^ε avec $\varepsilon > 0$ est plus régulière au sens des distributions que les inégalités d'énergie initiales ne pouvaient le laisser présager. L'utilisation astucieuse de cette expression dans l'équation du moment couplée avec un théorème de commutateur de type R. Coiffman, Y. Meyer (voir dans [47]) permet ainsi d'avoir des résultats

de convergence forte sur la suite ρ_n dans $L^{\gamma}_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ vers une limite ρ. Un des éléments essentiels pour cela est la notion de solutions renormalisées introduite par P.-L. Lions et R. Di Perna dans [71], [72] et qui permet en effet de tester la convergence forte de la suite approchée $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ρ via l'utilisation de fonctions concaves.
On peut cependant observer que pour $N=2,3$, on ne peut atteindre le même seuil limite, c'est à dire $\gamma > \frac{N}{2}$. En effet la difficulté majeure dans ce cadre correspond à pouvoir renormaliser l'équation de masse sans supposer nécessairement que ρ appartient à $L^2_{loc}(L^2)$; c'est pourquoi P.-L. Lions choisit γ assez grand pour s'assurer que ρ soit bien dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N)$ et ceci via un gain classique d'intégrabilité sur la densité ρ (celui-ci dépend du coefficient γ).

Le théorème 1 de P.-L. Lions a ensuite été amélioré par E. Feireisl, A. Novotný et H. Petzeltová dans [77, 78, 79, 80, 176] en ce qui concerne le coefficient γ de la pression dans les cas spécifiques $N=2$ et $N=3$. Effectivement pour $N=2,3$ E. Feireisl et al dans [80] arrivent à atteindre le seuil critique $\gamma > \frac{N}{2}$ comme c'est le cas chez P.-L. Lions pour les dimensions supérieures.
Afin de contourner cette difficulté relative à la renormalisation de l'équation de masse, E. Feireisl dans [77] introduit une nouvelle notion appelée *oscillations defect measure* et notée $\text{osc}_p[\rho_n\to\rho]$.

Définition 2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\rho_n \to \rho \ \textit{ faiblement dans } \ L^1(\Omega).$$

Nous définissons l'expression $osc_p[\rho_n\to\rho]$ comme suit :

$$osc_p[\rho_n\to\rho](\Omega)=\sup_{k\geq 1}\big(\lim\sup_{n\to+\infty}\int_{\Omega}|T_k(\rho_n)-T_k(\rho)|^p dxdt\big),$$

où T_k est une fonction troncature.

La subtilité de ces *oscillations defect measures* $\text{osc}_p[\rho_n\to\rho]$ s'explique par le fait que leur contrôle permet d'être dans l'une des situations suivantes :
- ρ_n converge vers ρ fortement dans $L^1(O)$, $O\subset(0,T)\times\Omega$ un ouvert.
- ρ_n est borné dans $L^2\big(((0,T)\times\Omega)\setminus O\big)$.

Chacun de ces deux phénomènes considérés individuellement permet alors aisément en s'appuyant sur la démonstration de P.-L. Lions de conclure à la convergence forte de ρ_n vers ρ.

Nous allons toujours nous intéresser au système de Navier-Stokes compressible (1), mais cette fois-ci avec des coefficients de viscosité qui dépendent de la densité ρ. On peut observer qu'il n'est pas aisé dans ce cadre d'appliquer les techniques de P.-L. Lions si l'on veut prouver l'existence de solutions faibles globales. Effectivement il s'avère délicat de pouvoir exhiber une pression efficace en appliquant un opérateur différentiel du type $(\Delta)^{-1}\text{div}$ comme c'est le cas lorsque les coefficients de viscosité sont constants. Il n'est donc même pas clair de pouvoir obtenir un gain d'intégrabilité sur la densité ρ et ceci afin de traiter le terme de pression.
Les premiers résultats donnant une réponse partielle à cette question sont dûs à D. Bresch et B. Desjardins dans [22]. En effet ils ont découvert une nouvelle entropie souvent appelée BD entropie qui permet un contrôle du gradient de la densité si les coefficients de viscosité vérifient la relation algébrique suivante :

$$\lambda(s)=2(s\mu^{'}(s)-\mu(s)). \tag{6}$$

Il est à noter cependant que cette condition (6) sur les coefficients de viscosité n'englobe pas le cas des coefficients constants étudiés par P.-L. Lions. Par contre elle s'applique aux fameux système de Saint-Venant où les coefficients de viscosité sont de la forme $\mu(\rho)=\mu\rho$ et $\lambda(\rho)=0$. Plus précisément la BD entropie implique que si $\sqrt{\rho_0}\nabla\varphi(\rho_0)$ (avec $\varphi'(\rho)=\frac{2\mu'(\rho)}{\rho}$) est dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ alors au moins heuristiquement $\sqrt{\rho}\nabla\varphi(\rho)$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\mathbb{R}^N))$.

On arrive ainsi pour ce choix de coefficients de viscosité (6) à avoir quasiment des renseignements en norme $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^N))$ sur la densité ρ, ce qui permet par la même de gérer facilement le terme de pression lorsque l'on s'intéresse à l'existence de solutions faibles globales. En effet par les injections de Sobolev on peut montrer sans difficulté la convergence forte de $P(\rho_n)$ vers $P(\rho)$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$ et ceci pour une suite approchée $(\rho_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est donc à signaler que ce qui consistait le principal obstacle en terme de compacité pour le système de Navier-Stokes compressible à coefficients constants se traite de manière simple dans le cadre des coefficients de viscosité de type (6).

Cependant ce choix de coefficients de viscosité fait apparaître une nouvelle difficulté en présence de vide ; effectivement la vitesse u ne peut être définie lorsque les coefficients de viscosité $\lambda(\rho)$ et $\mu(\rho)$ s'annulent (mentionnons que ceux-ci sont nécessairement dégénérés à cause de la relation (6)). Comparé au cas des coefficients de viscosité constants, on perd en particulier des renseignements sur le gradient de la vitesse ∇u. Cette perte d'information rend alors délicat le traitement du terme $\rho u \otimes u$ (on a en effet un manque de compacité sur la vitesse u car une perte en terme d'injections de Sobolev, on ne peut alors utiliser les résultats classiques à la P.-L. Lions).
Afin de se défaire de cette difficulté D. Bresch et B. Desjardins vont considérer deux cadres un peu plus simples. Dans un premier cas (voir [23]) ils considèrent une pression dite "froide" qui permet d'empêcher la formation de vide, celle-ci étant de plus choisie en corrélation avec les coefficients de viscosité et leur dégénérescence autour du vide. Ils imposent ainsi les relations suivantes entre la pression P et les coefficients de viscosité lorsque ρ est petit :

- Pour tout $s < A$, $\mu(s) \geq c_0 s^n$ avec A, c_0 des constantes et $\frac{N-1}{N} < n < 1$ et $c_1 s^m \leq \mu(s)$ pour $s \geq A$ avec $m > 1$.
- $P_c(\rho) \sim -\rho^{-l}$ pour $\rho \leq \rho_*$ avec ρ_* une constante. D'autre part l dépend notamment de n.

Cette pression P explose ainsi au voisinage du vide et est convexe (pour plus de détails sur le choix des coefficients on renvoie à [23]). Il est à noter que loin du vide on est proche d'une pression type gaz parfait.
En fait ce lien entre la pression froide et les termes de viscosité est essentiel et permet ainsi de contrôler ∇u dans une norme $L^p(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^N))$ pour (p, q) bien choisis. Ceci permet ensuite de passer à la compacité sur le terme $\rho u \otimes u$ (lorsque l'on considère des solutions approchées (ρ_n, u_n) vérifiant uniformément l'estimations d'énergie et la BD entropie en n) en utilisant des injections de Sobolev sur u.
Il est à noter que le résultat précédent est un résultat de stabilité des solutions faibles, il reste alors à construire une suite approchée « régulière » vérifiant uniformément l'inégalité d'énergie classique ainsi que la BD entropie. Dans [21, 23], D. Bresch et B. Desjardins construisent de telles solutions approchées du système (1) vérifiant le choix précédent sur les coefficients de viscosité ainsi que sur la pression dite « froide ». Ces solutions approchées vérifient donc uniformément les inégalités d'énergie introduite dans [22] ; la construction de ces solutions repose sur la régularisation du système (1) par un terme de type capillaire qui permet le contrôle du vide et donc l'existence globale de solutions.
Enfin dans un second temps, D. Bresch et B. Desjardins dans [23] ont prouvé l'existence de solutions faibles globales pour (1) avec le même choix de coefficients de viscosité que précédemment (vérifiant en particulier la relation (6)) mais avec en plus un terme de traînée de la forme $r_0\rho|u|u$ et avec cette fois des pressions barotropiques de la forme $a\rho^\gamma$ avec $\gamma > 1$. La clé de ce résultat repose évidemment sur le gain naturel d'intégrabilité sur la vitesse u qu'apporte le terme de traînée, il permet ainsi de traiter le terme $\rho u \otimes u$ (en effet celui ci appartient maintenant à un espace $L^{1+\varepsilon}_{loc,t,x}$ avec $\varepsilon > 0$ ce qui couplé avec des résultats de convergence presque partout permet de conclure). On renvoie également aux travaux d'E. Zatorska dans [205].

Pour pallier cette restriction qu'impose une pression froide ou encore le rajout d'un terme de traînée, A. Mellet et A. Vasseur sont parvenus dans [170] à étendre les résultats de D. Bresch et

B. Desjardins au cas d'une pression isentropique classique et ceci en montrant une nouvelle inégalité d'énergie offrant un gain d'intégrabilité sur la vitesse u. Cela leur permet ainsi de prouver la stabilité des solutions faibles globales pour des viscosités du type (6) et donc de pouvoir passer à la compacité dans le terme $\rho u \otimes u$ via ce gain d'intégrabilité sur u. A. Mellet et A. Vasseur obtiennent ainsi le théorème de stabilité suivant.

Théorème 2. *Soit $\Omega = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{T}^3$. Supposons que $\gamma > 1$ et que $\mu(\rho)$ et $\lambda(\rho)$ sont deux fonctions C^2 de ρ vérifiant les conditions de D. Bresch et B. Desjardins. Soit $(\rho_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions faibles globales de (1) avec les données initiales suivantes :*

$$\rho_n/_{t=0} = \rho_0^n \ \ et \ \ \rho_n u_n/_{t=0} = \rho_0^n u_0^n,$$

où ρ_0^n et u_0^n sont tels que :

$$\rho_0^n \geq 0, \quad \rho_0^n \to \rho_0 \ \ dans \ \ L^1(\mathbb{R}^N), \ \ \rho_0^n u_0^n \to \rho_0 u_0 \ \ dans \ \ L^1(\mathbb{R}^N),$$

et satisfont les inégalités suivantes :

$$\int_\Omega \rho_0^n \frac{|u_0^n|^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}(\rho_0^n)^\gamma < C, \qquad \int_\Omega \frac{1}{\rho_0^n}|\nabla\mu(\rho_0^n)|^2 dx < C,$$

et

$$\int_\Omega \rho_0^n \frac{1+|u_0^n|^2}{2}\ln(1+|u_0^n|^2) < C.$$

Alors à extraction près, $(\rho_n, \sqrt{\rho}_n u_n)$ converge fortement vers une solution faible de (1) satisfaisant les différentes inégalités d'énergie.
La densité ρ_n converge fortement dans $C^0(([0,T]; L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\Omega))$, de plus $\sqrt{\rho}_n u_n$ converge fortement dans $L^2(0,T; L^2_{loc}(\Omega))$ et le moment $m_n = \rho_n u_n$ converge fortement dans $L^1(0,T; L^1_{loc}(\Omega))$ pour tout $T > 0$.

Ce théorème est un résultat de stabilité, il reste afin de prouver l'existence de solutions faibles globales à construire une suite de solutions approchées $(\rho_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant uniformément en n les différentes inégalités d'énergie. Ceci s'avère délicat étant donné la complexité des différentes inégalités d'énergie, en particulier la BD entropie qui s'obtient en multipliant l'équation du moment par $\nabla\varphi(\rho)$ et l'inégalité d'énergie de Mellet-Vasseur qui consiste à multiplier l'équation du moment par $u(1+\ln(1+|u|^2))$. Il semble donc difficile de régulariser le système (1) tout en conservant chacune des deux inégalités d'énergie. On peut ainsi noter que les solutions approchées introduites par D. Bresch et B. Desjardins dans [23] ne s'adaptent pas de manière simple au cas du résultat de A. Mellet et A. Vasseur, en effet elles ne préservent pas de manière uniforme le gain d'énergie sur la vitesse u. Cependant A. Vasseur et C. Yu sont parvenus très récemment dans [202] à construire de telles solutions approchées et ceci dans le cadre des équations de Shallow water visqueux lorsque $\mu(\rho) = 0$, $\lambda(\rho) = 0$. Pour ce faire ils utilisent un résultat récent (où est introduit notamment la notion de κ entropie) de D. Bresch, B. Desjardins et E. Zatorska [25] sur l'existence de solutions faibles avec un terme de traînée combiné avec de fines renormalisations à la Di Perna-Lions. Cela leur permet donc de prouver l'existence de solutions faibles globales pour $N \geq 2$ au cas du système de Shallow water étendant par la même les résultats de P.-L. Lions qui étaient réservés aux cas des coefficients de viscosité constants. Cela est donc à ma connaissance un premier résultat concernant le cas de coefficients de viscosité dégénérés. Les techniques utilisées semblent prometteuses et devraient permettre de traiter le cas général des coefficients de viscosité vérifiant (6).

Cas des solutions fortes globales avec données "grandes"

Nous allons maintenant nous intéresser au cas des solutions fortes globales avec données initiales grandes. Il existe de nombreux résultats d'existence de solutions fortes globales en une dimension pour Navier-Stokes compressible et ceci essentiellement pour des coefficients de viscosité constants (voir D. Hoff [129] et Y. A. Kanel [143] qui fut le premier à obtenir de tels résultats). Le cas de coefficients de viscosité dépendant de la densité a quand à lui beaucoup moins été étudié. En effet un point clé pour montrer l'existence de solutions fortes globale consiste à contrôler la norme L^∞ de la densité tout en évitant l'apparition de vide, c'est à dire avoir une estimation L^∞ sur $\frac{1}{\rho}$; et ceci est beaucoup plus délicat dans le cadre de coefficients de viscosité dégénérés. A ma connaissance il existe essentiellement un résultat dû à A. Mellet et A. Vasseur [171] qui montrent l'existence de solutions fortes globales avec données initiales grandes en une dimension lorsque la viscosité $\mu(\rho)$ est de la forme $\mu(\rho) = \mu\rho^\alpha$ avec $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Le point crucial de la preuve est l'utilisation de la BD entropie qui permet de contrôler $\partial_x \rho^{\alpha-\frac{1}{2}}$ en norme $L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$ et donc par injection de Sobolev d'estimer la norme L^∞ de $\frac{1}{\rho}$. Nous verrons dans la suite comment généraliser ce résultat au cas des équations de Shallow water visqueuses.

Le cadre multidimensionel $N \geq 2$ est sans surprise encore beaucoup plus délicat. À ma connaissance le seul résultat d'existence de solutions fortes globales avec données arbitrairement grandes en dimension $N = 2$ est l'oeuvre de A. V. Kazhikhov et V. A. Vaigant dans [199]. Ce résultat est absolument remarquable et considère la cas des équations de Navier-Stokes compressibles sur le tore avec les coefficients de viscosité suivants $\mu(\rho) = \mu$ et $\lambda(\rho) = \lambda\rho^\beta$ avec $\beta > 3$. Ce choix de coefficient de viscosité permet aux auteurs de contrôler la densité ρ dans n'importe quel norme $L^\infty_T(L^p)$ avec $p \geq 2$. Par d'astucieuses estimations d'énergie sur la pression efficace $(\mu + \lambda(\rho))\mathrm{div}u - P(\rho)$ et le rotationnel $\mathrm{curl}u$, les auteurs montrent que la régularité de la donnée initiale est préservée tout au long du temps. Dans [108], on généralise les travaux précédents au cas $\beta > 2$ en faisant intervenir des commutateurs à la R. Coifman, Y. Meyer, ce qui permet d'affaiblir les conditions nécessaires permettant l'obtention d'estimations $L^\infty_T(L^p)$ avec $p \geq 2$ pour la densité ρ.
Enfin en dimension $N = 3$ il existe des résultats d'existence de solutions faibles « régulières » avec données initiales petites, en effet la norme H^1 de la vitesse u ainsi que la norme L^∞ de la densité ρ sont conservées (on renvoie notamment aux travaux précurseurs de D. Hoff [127, 128]). On peut en particulier mentionner que la condition de petitesse est très faible puisqu'elle ne concerne que l'inégalité d'énergie (3) ; cela signifie que la petitesse s'applique à des espaces fonctionnels très "grands" comparés à ceux impliquant l'invariance par échelle des équations. Enfin ces résultats ne concernent que le cadre de coefficients de viscosité constants, en effet les estimations d'énergie très subtiles utilisées par D. Hoff ne peuvent se généraliser au cadre plus complexe de coefficients de viscosité dégénérés.

I.1.4 Comportement qualitatif des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles et régime faiblement compressible

On va commencer par rappeler quelques résultats sur la limite à faible nombre de Mach. Il est en effet assez naturel de penser que les équations de Navier-Stokes faiblement compressibles diffèrent assez peu des équations de Navier-Stokes incompressibles, dont on rappelle le système :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \mu\Delta u + \nabla\Pi = 0, \\ \mathrm{div}u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0, \end{cases} \tag{7}$$

avec u le champ de vecteur vitesse et Π le terme de pression. L'incompressibilité est exprimée à travers l'équation $\mathrm{div}u = 0$.

Dans le régime à faible nombre de Mach, le temps d'échelle est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ où ε désigne le nombre de Mach. Considérons maintenant le changement de variable $t^\varepsilon = \varepsilon t$ et le changement d'inconnue $(\rho, u)(t, x) = (\rho^\varepsilon(t^\varepsilon, x), \varepsilon u^\varepsilon(t^\varepsilon, x))$; l'équation de Navier-Stokes compressible barotrope (1) avec coefficients de viscosité constants se réécrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon) - \mathrm{div}(2\mu D(u^\varepsilon)) - \nabla(\lambda \mathrm{div} u^\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\nabla P(\rho^\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Supposons à présent que la suite de solutions $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ soit convergente dans certains espaces fonctionnels bien choisis (à préciser selon la situation, solutions faibles ou fortes) ; que peut-on alors dire sur l'équation vérifiée par la limite (ρ, u) ? D'un point de vue heuristique, une condition nécessaire pour que l'équation du moment converge est que $\nabla P(\rho^\varepsilon)$ converge vers 0 lorsque ε tends vers 0, ceci à cause de la pénalisation en $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Cela implique que ρ^ε doit converger vers une constante $\bar{\rho}$. Si l'on passe à la limite dans l'équation de masse on en déduit que $\mathrm{div} u^\varepsilon$ converge vers 0 et donc que la solution limite u est incompressible. Si l'on revient à l'équation du moment on peut alors vérifier que la vitesse u doit être solution de l'équation de Navier-Stokes incompressible (7).

Cas de données bien préparées

Passer à la limite dans l'équation du moment est à priori plus facile si $\nabla P(\rho^\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, ou de manière équivalente si on suppose que $\rho^\varepsilon - 1 = O(\varepsilon^2)$ et que $\mathrm{div} u^\varepsilon = 0(\varepsilon)$. En effet cela implique alors que $\partial_t \rho^\varepsilon$ et $\partial_t u^\varepsilon$ sont uniformément bornés en ε si bien que cela exclut toute oscillation en temps. Suivant cette heuristique, différents auteurs ont étudié le passage à la limite des solutions $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ pour des données initiales de la forme $\rho_0^\varepsilon = 1 + \varepsilon^2 \rho_{0,1}^\varepsilon$ et $u_0^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_{0,1}^\varepsilon$ avec $(\rho_{0,1}^\varepsilon, u_{0,1}^\varepsilon)$ une suite uniformément bornée dans des espaces fonctionnels bien choisis. On dit que de telles données initiales sont *bien préparées* (ceci correspond à des données initiales appartenant au noyau de l'opérateur singulier apparaissant dans (8) et ceci à des termes de plus bas degré près).
Il est alors possible de calculer l'asymptotique de $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ en terme de puissance de ε. Cette approche (historiquement la première dans le contexte des équations de Navier-Stokes compressibles) a été développée par de nombreux auteurs et notamment S. Klainerman et A. Majda dans [150], H.-O. Kreiss, J. Lorenz et M. J. Naughton dans [154] et D. Hoff dans [124].

Cas de données mal préparées

Ce cas correspond au choix suivant de données initiales $(\rho_0^\varepsilon = 1 + \varepsilon q_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon)$ avec $(q_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon)$ une suite convergente lorsque ε tends vers 0 et ceci dans un espace fonctionnel bien choisi. Dans la suite pour simplifier la présentation on choisira $(q_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon) = (q_0, u_0)$ fixé. Posons maintenant $\rho^\varepsilon = 1 + q^\varepsilon$,(8) s'écrit alors sous la forme suivante (les coefficients de viscosité sont ici constants) :

$$\begin{cases} \partial_t q^\varepsilon + \dfrac{\mathrm{div} u^\varepsilon}{\varepsilon} = -\mathrm{div}(q^\varepsilon u^\varepsilon), \\ \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon - \dfrac{\mathcal{A} u^\varepsilon}{1 + \varepsilon q^\varepsilon} + (1 + K(\varepsilon q^\varepsilon)) \dfrac{\nabla q^\varepsilon}{\varepsilon} = 0, \\ (q^\varepsilon, u^\varepsilon)(0, \cdot) = (q_0, u_0), \end{cases} \tag{9}$$

avec $\mathcal{A} u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \mathrm{div} u$ et K une fonction régulière vérifiant $K(0) = 0$. Le problème de la limite faiblement compressible (lorsque $\varepsilon \to 0$) a été étudié par de nombreux auteurs et ceci dans deux cadres radicalement différents le premier correspondant au cas des solutions faibles globales et le second au cas des solutions fortes.

Dans le premier cas il s'agit de considérer la limite des solutions faibles globales construites par P.-L. Lions dans ([166], voir aussi [77, 176]). Il s'agit en particulier de tirer profit de l'estimation d'énergie suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|u^\varepsilon|^2+(\Pi(\rho^\varepsilon)-\Pi(\bar{\rho}))(t)dx+\mu\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u^\varepsilon|^2dsdx\\ +(\lambda+\mu)|\mathrm{div}u^\varepsilon|^2)dx\leq\int_{\mathbb{R}^N}\big(|\sqrt{\rho_0^\varepsilon}u_0^\varepsilon|^2+(\Pi(\rho_0^\varepsilon)-\Pi(\bar{\rho}))\big)dx.\end{aligned}\tag{10}$$

Il est alors possible de passer à la limite dans (8) au sens des distributions, et ceci en utilisant l'énergie (10) ainsi que des estimations de Strichartz dans $\mathbb{R}^N$ afin de gérer les fortes oscillations sur $\partial_t q_\varepsilon$ et $\partial_t u_\varepsilon$. Les premiers à avoir montré de tels résultats sont B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions et N. Masmoudi dans différents contextes. En effet la preuve dépend fortement des conditions aux bords choisies et cela est dû au fait que la dispersion est différente selon que l'on soit dans un domaine borné ou non (voir [164] pour le cas de conditions périodiques, [67] pour l'espace entier et [68] pour le cas de domaine borné avec conditions Dirichlet).
Le second cadre est bien sûr celui des solutions fortes. Le premier à avoir traité ce cas dans le cadre mal préparé avec données initiales critiques est R. Danchin dans [59, 60]. Plus précisément il obtient la convergence des solutions fortes globales $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ avec données petites vers la limite $(1, u)$ où la vitesse u est solution de Navier-Stokes incompressible avec donnée initiale u_0 et ceci dans le cadre d'espaces de Besov critiques. Pour ce faire comme dans [67] l'utilisation d'estimations de Strichartz est importante afin de gérer les fortes oscillations sur $\partial_t q_\varepsilon$ et $\partial_t u_\varepsilon$. D'un point de vue heuristique le comportement basses fréquences est prépondérant et se propage vers les hautes fréquences au sens qu'il existe une fréquence de coupure l_ε distinguant comportement basses et hautes fréquences, avec l_ε tendant vers l'infini lorsque ε tends vers 0 (c'est pourquoi R. Danchin travaille avec des espaces de Besov hybrides). On rappelle que le comportement basses fréquences pour les équations de Navier-Stokes compressibles est de type équation des ondes pour $\mathrm{div}u^\varepsilon$ et q^ε ; il est donc naturel d'utiliser des estimations de Strichartz pour gérer ces termes.
Enfin R. Danchin montre également que pour n'importe quelles données initiales (q_0, u_0) en dimension $N = 2$ d'espace, le système (9) admet une solution forte globale pour tout ε inférieur à ε_0 avec ε_0 suffisamment petit et avec donnée initiale $(1+\varepsilon q_0, u_0)$ (ε_0 dépend ici du choix de (q_0, u_0)). Ce résultat apporte donc une première réponse dans le cadre faiblement compressible au problème de solutions fortes globales en dimension $N = 2$ pour Navier-Stokes compressible barotrope avec coefficients de viscosité constants (rappelons que ce problème reste ouvert en toute généralité).

Dans la suite de ce mémoire on s'intéressera à la problématique inverse à savoir comprendre la limite hautement compressible des équations de Navier-Stokes compressibles (lorsque ε le nombre de Mach tends vers l'infini). On en déduira de nouveaux comportements qualitatifs sur la vitesse de propagation de la densité en régime hautement compressible.

Résultats d'unicité fort-faible

Nous aimerions enfin rappeler quelques résultats d'unicité fort-faible. En effet une question importante est de comprendre si les solutions faibles globales à la P.-L. Lions sont acceptables d'un point de vue physique ; ou autrement dit a-t-on unicité de ces solutions faibles lorsque les données initiales (ρ_0, u_0) sont suffisamment régulières et ce sur au moins un intervalle de temps fini. En effet pour (ρ_0, u_0) assez régulières avec $\rho_0 \geq c > 0$, on a l'existence de solution forte (ρ_1, u_1) sur un intervalle de temps fini $(0, T)$; on aimerait donc prouver que toute solution faible globale à la P.-L. Lions (ρ, u) ne peut être égale qu'à (ρ_1, u_1) sur l'intervalle de temps $(0, T)$. Ce genre de résultat a d'abord été prouvé par P. Germain dans [87] en supposant une condition de régularité supplémentaire sur $\nabla\rho$ et ceci en utilisant la notion d'entropie relative (développée notamment par C. M. Dafermos dans [51] pour les lois de conservation et qui permet de tester une solution faible

par rapport à une solution particulière qu'elle soit stationnaire, unique ou autre). Il s'avère en fait que comme mentionné dans [87] cette hypothèse supplémentaire de régularité sur la densité $\nabla\rho$ est en fait ad hoc ; il suffit en effet de redéfinir les solutions faibles à la P.-L. Lions en leur permettant de vérifier en plus certaines inégalités de type relative entropie. C'est en particulier ce qu'ont fait E. Feireisl et al dans [81] en définissant des solutions faibles globales "bien choisies". Ils montrent ensuite l'unicité fort faible en utilisant les mêmes techniques d'entropie relative que P. Germain. Ce résultat est bien évidemment d'une importance capitale puisqu'il valide mathématiquement la notion de solutions faibles à la Lions. En une dimension on renvoie également aux travaux de A. Mellet et A. Vasseur dans [171].
Tous les travaux précédents sont relatifs à des coefficients de viscosité constants. Il est par contre beaucoup plus délicat d'étendre ce genre de résultats au cas de coefficients dégénérés ; en effet lorsque l'on considère les inégalités de type entropie relative, on perd des informations sur le gradient de la vitesse des solutions. On a donc besoin de contrôler la norme L^∞ de $\frac{1}{\rho}$ pour espérer appliquer la méthode développée dans [87]. Cependant dans [116] on a pu généraliser les résultats d'unicité fort faible de [87, 81, 171] au cas monodimensionnel. Pour ce faire on a introduit une nouvelle vitesse efficace qui permet de regarder l'équation du moment comme une équation de type Euler compressible ; on fait ainsi disparaitre d'une certaine manière le tenseur de viscosité ce qui nous permet d'appliquer l'outil d'entropie relative (en effet ce dernier est également bien adapté aux équations hyperboliques).

I.2 Systèmes capillaires

I.2.1 Présentation des modèles

Systèmes capillaires locaux et non locaux

Nous allons nous intéresser au cas des écoulements multi-constituants qui mettent en jeu des phénomènes de changement de phase qui ont été modélisés pour la première fois par D. J. Korteweg [153]. Ceux-ci interviennent dans de très nombreux processus industriels, en particulier dans le domaine de l'*industrie chimique* lors des processus de distillation. L'étude des coefficients d'échange de mélanges s'avère être un problème délicat et impose une bonne compréhension des *phénomènes locaux* intervenant dans les processus de changement de phases des mélanges. Cependant, les expérimentations présentent certaines limites en particulier dans le domaine des écoulements diphasiques où elles sont complexes à réaliser ; on privilégie ainsi la **Simulation Numérique Directe** (**SND**) consistant en la résolution des équations du mouvement *locales et instantanées.* La simulation numérique directe des écoulements diphasiques a eu un essor important vers la fin des années 80. Nous allons à présent nous concentrer sur les méthodes de SND basées sur la mécanique des milieux continus, en distinguant deux type de méthodes, les *méthodes à interfaces discontinues* (les interfaces sont supposées ici d'épaisseur nulle ce qui induit ici une discontinuité à leurs bords sur la densité) et les *méthodes à interfaces diffuses* (interfaces d'épaisseur non-nulle, la densité se propage ici continûment à travers les interfaces).

Présentation des systèmes d'équations

Nous rappelons ici le système général d'un fluide lors d'un mélange fluide-vapeur (voir [153, 4, 29, 65, 97] ou [82] pour plus de détails). Nous considérons ainsi un fluide de densité $\rho \geq 0$, de vitesse $u \in \mathbb{R}^N$, d'entropie s, d'énergie de densité e et de température $\theta = (\frac{\partial e}{\partial s})_\rho$. Nous notons $w = \nabla\rho$ et nous supposons que l'énergie interne spécifique e dépend de la densité, de l'entropie spécifique s et de w. En terme d'énergie libre, le principe de la thermodynamique prend la forme d'une relation de Gibbs généralisée : $de = \widetilde{T}ds + \frac{P}{\rho^2}d\rho + \frac{1}{\rho}\phi^* \cdot dw$ où $\widetilde{T}$ est la température, P la pression et ϕ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^N$ et ϕ^* le vecteur adjoint. Dans la suite nous préciserons la forme que prend ϕ, celui ci modélisant la partie capillaire du système. La conservation de masse, du moment et d'énergie s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) = \operatorname{div}(K + D) + \rho f, \\ \partial_t(\rho(e + \frac{1}{2}u^2)) + \operatorname{div}\big(u(\rho e + \frac{1}{2}\rho|u|^2 + p)\big) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \operatorname{div}\big((D+K)\cdot u - Q + W\big) + \rho f \cdot u, \end{cases} \tag{11}$$

où :

$$D = (\lambda \operatorname{div} u)I + \mu(du + \nabla u), \text{ est le tenseur de diffusion,}$$

$$Q = -\eta \nabla \widetilde{T}, \text{ est le flux de chaleur.}$$

Le terme $W = (\partial_t \rho + u^* \cdot \nabla \rho)\phi = -(\rho \operatorname{div} u)\phi$ correspond au travail intersticiel qui a pour but d'assurer l' équilibre entropique, il a été introduit pour la première fois par J. E. Dunn et J. Serrin dans [75]. K est le tenseur de capillarité et nous préciserons ultérieurement sa forme selon les méthodes SDN employées. Concernant les coefficients (λ, μ), ils représentent la viscosité du fluide et dépendent à la fois de la densité ρ et de la température $\widetilde{T}$. Le coefficient thermal η est une fonction positive dépendant de la température $\widetilde{T}$ et de la densité ρ.

Cas du système de Korteweg local

Nous rappelons ici sucinctement la forme du système de Korteweg et plus précisément la forme du tenseur de capillarité K, en suivant le modèle de J. E. Dunn et J. Serrin dans [75]. Il existe trois fonctions Π_0, Π_1 et φ telles que la pression et l'énergie interne s'écrivent sous la forme : $P(\rho, \widetilde{T}) = \widetilde{T} P_1(v) + P_0(v)$, $e_0 = -\Pi_0(v) + \varphi(\widetilde{T}) - \widetilde{T}\varphi'(\widetilde{T})$, avec $v = \frac{1}{\rho}$ et où $P_1 = \Pi_1'$ et $P_0 = \Pi_0'$. De plus en supposant que l'énergie interne soit une fonction croissante de la température $\widetilde{T}$, on pose :

$$\Psi(\widetilde{T}) = \varphi(\widetilde{T}) - \widetilde{T}\varphi'(\widetilde{T}) \quad \text{avec} \quad \Psi'(\widetilde{T}) > 0\,.$$

Enfin pour simplifier les notations, on pose $\theta = \Psi(\widetilde{T})$. On peut alors réécrire le système (11) sous la forme suivante :

$$(NHV) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \dfrac{\operatorname{div}(D)}{\rho} + \dfrac{\nabla(P_0(\rho) + \Psi^{-1}(\theta) P_1(\rho))}{\rho} = \operatorname{div} K, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta - \dfrac{\operatorname{div}(\chi \nabla \theta)}{\rho} + \Psi^{-1}(\theta)\dfrac{P_1(\rho)}{\rho}\operatorname{div}(u) = \dfrac{D : \nabla u}{\rho}, \end{cases}$$

avec χ le coefficient thermal. K représente le tenseur de capillarité et celui-ci s'écrit sous la forme suivante : $K = (\rho \operatorname{div} \phi)I - \phi w^*$, avec $\phi = \kappa w$ où κ est le coefficient de capillarité dépendant de ρ. Par la suite on considérera essentiellement le cas du système isotherme, c'est à dire lorsque la température est constante. Le tenseur de capillarité s'écrit alors :

$$\operatorname{div} K = \nabla\big(\rho\kappa(\rho)\Delta\rho + \frac{1}{2}(\kappa(\rho) + \rho\kappa'(\rho))|\nabla\rho|^2\big) - \operatorname{div}\big(\kappa(\rho)\nabla\rho \otimes \nabla\rho\big), \tag{12}$$

avec $\kappa(\rho)$ le coefficient de capillarité.

Cas du système de Korteweg non-local

Nous allons ici seulement rappeler le système sous sa forme moderne en insistant sur la forme du tenseur de capillarité modélisé par C. Rohde dans [181] (voir aussi [50, 183]). Précisons ici que

C. Rohde emploie une méthode à interfaces discontinues. De plus on ne s'intéressera ici qu' au cas du système isotherme. Le système s'écrit sous la forme suivante :

$$(NSK) \qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho\, u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}u + \nabla(P(\rho)) = \kappa\rho\nabla D[\rho] \\ (\rho_{t=0}, u_{t=0}) = (\rho_0, u_0), \end{cases}$$

avec : $D[\rho] = \kappa(\phi * \rho - \rho)$, κ le coefficient de capillarité et ϕ vérifie :

$$\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N), \ \int \phi(x)dx = 1 \ \text{ et } \ \phi \geq 0.$$

Cas du système de Euler-Korteweg et de l'équation de Gross-Pitaevskii

Rappelons la forme du système d'Euler-Korteweg :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P(\rho) = \mathrm{div}K, \\ (\rho, u)_{/t=0} = (\rho_0, u_0). \end{cases} \tag{13}$$

Ici $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^N$ représente le champ de vitesse, $\rho = \rho(t,x) \in \mathbb{R}^+$ la densité. Le tenseur de capillarité est défini comme dans (12). Lorsque $\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho}$ le tenseur de capillarité s'apparente à la fameuse pression quantique. En particulier dans ce cadre, si l'on suppose $u = \nabla\theta$ irrotationnel, on peut retrouver l'équation de Gross-Pitaevskii au moins heuristiquement via la transformation de Madelung. En effet il suffit de poser $\psi = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2\sqrt{\kappa}}}$ et ψ vérifie alors l'équation suivante :

$$\begin{cases} 2i\sqrt{\kappa}\partial_t\psi = -2\kappa\Delta\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi, \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0. \end{cases} \tag{14}$$

La solution à valeurs complexes ψ est définie sur l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Cette équation fut à l'origine introduite pour modéliser la condensation de Bose-Einstein, ou la superfluidité (voir[180, 96, 49]).

I.2.2 Intérêt théorique des systèmes capillaires

Le système de Korteweg a donc non seulement pour mission de modéliser les mélanges liquide-vapeur, mais a aussi et surtout un intérêt théorique. En effet celui-ci a pour but de sélectionner les solutions physiques des équations d'Euler compressibles (en particulier lorsque le système n'est pas strictement hyperbolique) via un processus de limite évanescente sur les coefficients de viscosité et de capillarité. Le cas typique correspond au choix d'une pression Van der Waals, en effet dans ce cas le système n'est pas strictement hyperbolique dans la région elliptique (qui correspond à la région où l'on a un changement de phase).

Un autre intérêt majeur consiste à construire des solutions du système d'Euler compressible pouvant admettre des chocs dispersifs et qui auront ainsi naturellement tendance à transgresser les conditions de Lax-Oleinik sur les chocs pour des solutions entropiques. Pour plus de références sur ces questions on renvoie à l'excellent mémoire de C. Rohde [183].

Dans le cadre adiabatique en dimension $N = 1$ ($P(\rho) = \rho^\gamma$ et $\gamma > 1$), le système d'Euler compressible est strictement hyperbolique, la théorie est alors classique. Plus précisément on peut résoudre le problème de Riemann lorsque la donnée initiale (une fonction de type Heaviside) est petite en norme BV. En effet on est dans le cadre d'un système strictement hyperbolique "vraiment non linéaire" à la P. Lax ([156]). Cela signifie que l'on a l'existence de solutions globales $\mathcal{C}^1$ par morceaux et uniques dans la classe des solutions entropiques. Ce résultat a ensuite été étendu par J. Glimm dans le cadre plus général de données initiales petites dans BV en utilisant un schéma numérique et en approximant les données initiales BV par des fonctions $\mathcal{C}^1$ constantes par morceaux (ce qui implique de résoudre localement le problème de Riemann via les résultats de P. Lax). Pour l'unicité de telles solutions on réfère à l'article de S. Bianchini et A. Bressan ([15]). Dans le cadre d'une pression de type Van der Waals

$$P(\rho, T^*) = \frac{RT^*\rho}{b-\rho} - a\rho^2, \tag{15}$$

(avec R la constante spécifique du gaz, a, b sont des constantes positives ; le paramètre a représente les forces attractives entre les molécules du fluide et b est relié à la taille des molécules) l'existence de solutions globales ainsi que la nature de ce qu'est une solution physique reste un problème ouvert. En effet le système n'est plus strictement hyperbolique et vraiment non linéaire. Cela s'explique par le fait que la pression n'est pas strictement croissante et convexe. Si l'on réécrit le système d'Euler compressible en coordonnées Lagrangiennes en utilisant le volume spécifique $\tau = 1/\rho$ dans $(\frac{1}{b}, \infty)$ et la vitesse u ; le système satisfait dans $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - \partial_x(\widetilde{P}(\tau)) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

avec la fonction $\widetilde{P} : (\frac{1}{b}, \infty) \to (0, \infty)$ donnée par :

$$\widetilde{P}(\tau) = P(\frac{1}{\tau}), \quad \tau \in (\frac{1}{b}, \infty).$$

Les deux valeurs propres du système sont :

$$\lambda_1(\tau, v) = -\sqrt{-\widetilde{P}'(\tau)}, \quad \lambda_2(\tau, v) = \sqrt{-\widetilde{P}'(\tau)}. \tag{17}$$

Les vecteurs propres correspondant r_1, r_2 sont :

$$w_1(\tau, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-\widetilde{P}'(\tau)} \end{pmatrix}, \quad w_2(\tau, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-\widetilde{P}'(\tau)} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Un petit calcul montre que :

$$\nabla\lambda_1(\tau, v) \cdot w_1(\tau, v) = \frac{\widetilde{P}''(\tau)}{2\sqrt{-\widetilde{P}'(\tau)}}, \quad \nabla\lambda_2(\tau, v) \cdot w_2(\tau, v) = \frac{-\widetilde{P}''(\tau)}{2\sqrt{-\widetilde{P}'(\tau)}}. \tag{19}$$

On rappelle maintenant la définition d'une *loi de conservation standard* au sens de P. Lax (c'est à dire une solution entropique) :
- Le système est *strictement hyperbolique* si les valeurs propres sont distinctes et réelles.
- Les vecteurs caractéristiques sont **vraiment non linéaires** si on a pour tout (τ, v),

$$\nabla\lambda_1(\tau, v) \cdot w_1(\tau, v) \neq 0 \text{ et } \nabla\lambda_2(\tau, v) \cdot w_2(\tau, v) \neq 0,$$

pour plus de détails on réfère à [187]. La définition de "vraiment non linéaire" est une extension de la notion de convexité pour les fonctions à valeurs vectorielles (ceci se voit en considérant le cas particulier des ondes progressives). Les hypothèses précédentes tendent à assurer l'existence et l'unicité du problème de Riemann (voir [76] et [187]).

Lorsque P est une pression de Van der Waals, nous pouvons observer que le système d'Euler compressible 1D (voir [187, 76]) est loin d'être un système hyperbolique standard, en effet :
- il n'est pas hyperbolique (mais elliptique pour certaines valeurs de la densité ρ).

– les champs de caratéristiques ne sont pas vraiment non linéaires.
Ainsi la théorie classique de Lax-Glimm ne peut être appliquée. De plus il n'existe pas de paires d'entropie-flux (ceci est dû au fait que la pression n'est pas convexe croissante) ce qui suggère que la notion de solution entropique n'est pas adaptée dans ce cadre pour sélectionner les solutions physiques. Afin de traiter ce problème, J. F. Van der Waals et D. J. Korteweg (voir [204, 153]) commencèrent par considérer le problème stationnaire avec vitesse nulle et résolvèrent le problème $\nabla P(\rho) = 0$ (pour plus de détails nous renvoyons à [183]). Cela consiste à minimiser la fonctionnelle suivante (voir [183]) :

$$F[\rho] = \int_\Omega W(\rho(x))dx,$$

(avec W la fonctionnelle d'énergie de la densité vérifiant $P(\rho) = \rho W'(\rho) - W(\rho)$) dans l'espace fonctionnel suivant :

$$A_0 = \{\rho \in L^1(\Omega)/W(\rho) \in L^1(\Omega), \int_\Omega \rho(x)dx = m\}.$$

Malheureusement ce problème de minimisation a une infinité de solutions, et beaucoup d'entre elles ne sont pas physiques. Afin de parer à cette difficulté, J. F. Van der Waals au 19 ième siècle fut le premier à régulariser la fonctionnelle précédente en ajoutant un terme quadratique en le gradient de la densité. Plus précisément il considéra la fonctionnelle suivante :

$$F^\varepsilon_{local} = \int_\Omega \big(W(\rho^\varepsilon(x)) + \gamma\frac{\varepsilon^2}{2}|\nabla\rho^\varepsilon|^2\big)dx,$$

avec :

$$A_{local} = H^1(\Omega) \cap A_0.$$

Ce problème variationnel admet une unique solution et sa limite (lorsque ε tend vers 0) converge vers une solution physique pour le problème d'Euler compressible à l'équilibre avec pression de Van der Waals ; ce résultat a été prouvé par L. Modica dans [173] en utilisant la notion de Gamma convergence. Par le principe d'Euler-Lagrange, la minimisation de la fonctionnelle de Van der Waals consiste à résoudre le problème stationnaire suivant :

$$\nabla P(\rho^\varepsilon) = \gamma\varepsilon^2\rho^\varepsilon\nabla\Delta\rho^\varepsilon,$$

où le terme de droite correspond à la divergence du tenseur de capillarité. Heuristiquement on peut donc également espérer que le processus limite pour une capillarité et une viscosité évanescente sélectionne aussi les solutions physiques pour le problème non stationnaire d'Euler compressible avec pression Van der Waals. La justification mathématique rigoureuse de cette affirmation reste actuellement ouverte et ceci même dans le cadre de la dimension $N = 1$.
Cependant on peut noter que ce processus de viscosité et de capillarité évanescentes a été particulièrement étudié dans le cadre plus simple de l'équation de Burgers. Il s'agit ici de considérer l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + u\partial_x u_\varepsilon - \alpha(\varepsilon)\partial_{xx}u_\varepsilon + \kappa(\varepsilon)\partial_{xxx}u_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon(0,\cdot) = u_0, \end{cases} \tag{20}$$

avec $\alpha(\varepsilon), \kappa(\varepsilon) \geq 0$. Lorsque $\kappa(\varepsilon) = 0$ on retrouve l'équation de Burgers visqueuse qui a un comportement de type parabolique ; à l'inverse lorsque $\alpha(\varepsilon) = 0$ et $\kappa(\varepsilon) > 0$ on travaille alors avec l'équation de Korteweg de Vries qui a un comportement de type dispersif. Chacune de ces deux équations sont globalement bien posées (on réfère en particulier à [162] pour l'équation de Korteweg de Vries, ceci se prouve en combinant les théorèmes d'existence locale avec donnée initiale dans dans $H^{-\frac{3}{4}}(\mathbb{R})$ et la conservation de la norme L^2). Il est bien connu qu'il existe une unique solution entropique pour l'équation de Burger pour des données $L^\infty \cap BV$ ce qui n'est rien d'autre que le fameux théorème de S. N. Kruzhkov (voir [187] pour une preuve). On peut obtenir cette solution entropique (voir [187]) comme limite de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ solutions de (20) avec $\kappa(\varepsilon)=0$ lorsque ε convergent vers 0 (ici $\alpha(\varepsilon)$ tends vers 0 lorsque ε converge vers 0).

De la même manière le cadre limite de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ solutions de (20) avec $\alpha(\varepsilon)=0$ lorsque ε tends vers 0 a également été étudié dans les travaux de P. Lax et D. Levermore dans [157, 158]. La preuve est assez technique ; elle repose sur le fait que l'équation de Korteweg de Vries est complètement intégrable ce qui permet d'utiliser la théorie du *scattering inverse*. On peut donc pour certaines données initiales (reliées à l'équation de Gelfand-Marchenko) résoudre presque explicitement l'équation via une étude spectrale fine d'un opérateur elliptique avec pour potentiel la donnée initiale ; le point clé étant que les propriétés spectrales de cette opérateur sont conservées au cours du temps si le potentiel est changé par la solution de Korteweg de Vries au temps t. Une fois obtenue une formulation explicite de la solution de (20) P. Lax et D. Levermore étudient la limite au sens des distributions de u_ε lorsque ε tends vers 0 et obtiennent ainsi une solution pouvant admettre des chocs "dispersifs", par opposition au choc admis dans le cadre de solutions entropiques à la Lax-Oleinik. Notons pour conclure que l'on a trois régimes bien différents ; on posera ici $\alpha(\varepsilon)=\varepsilon$:

- $\kappa(\varepsilon) << \varepsilon^2$, la viscosité domine et on obtient à la limite une solution entropique,
- $\kappa(\varepsilon) \simeq \varepsilon^2$, régime intermédiaire,
- $\kappa(\varepsilon) >> \varepsilon^2$, la capillarité domine, et on a à la limite des solutions à la Lax-Levermore.

Pour plus de détails sur cette étude, on renvoie au livre de P. G. Lefloch [159].

I.2.3 Quelques résultats importants sur les systèmes capillaires

Système de Korteweg local et non local

On va s'intéresser ici au système (NHV) sous sa forme isotherme que l'on réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u\otimes u) - \operatorname{div}(2\mu(\rho)Du) - \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div}u) + \nabla P(\rho) = \operatorname{div}K, \end{cases} \tag{21}$$

avec $\operatorname{div}K$ défini dans (12). Nous allons commencer par décrire les inégalités d'énergie liées au système ; ceci nous permettra de détecter les éventuels termes délicats à contrôler en terme de compacité et ceci dans l'optique de montrer l'existence de solutions faibles globales. On suppose (ρ,u) une solution "régulière" (en fait approchée) du système (21), et l'on multiplie l'équation du moment par u, on obtient alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (\frac{1}{2}\rho|u|^2 + (\Pi(\rho)-\Pi(\bar\rho)) + \frac{\kappa(\rho)}{2}|\nabla\rho|^2)(t)dx + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(\mu(\rho)|Du|^2 \\ &\qquad\qquad + \lambda(\rho)|\operatorname{div}u|^2)dx \le \int_{\mathbb{R}^N}(\frac{|m_0|^2}{2\rho} + (\Pi(\rho_0)-\Pi(\bar\rho)) + \frac{\kappa(\rho_0)}{2}|\nabla\rho_0|^2)dx, \end{aligned} \tag{22}$$

où Π est défini comme suit : $\Pi(s) = s\bigg(\int_{\bar\rho}^s \frac{P_0(z)}{z^2}dz - \frac{P_0(\bar\rho)}{\bar\rho}\bigg)$. En imposant l'inégalité suivante sur les données initiales :

$$\epsilon_0 = \int_{\mathbb{R}^N}(\frac{|m_0|^2}{2\rho} + (\Pi(\rho_0)-\Pi(\bar\rho)) + \frac{\kappa(\rho_0)}{2}|\nabla\rho_0|^2)dx < +\infty\,, \tag{23}$$

on obtient les estimations à priori suivantes :

$$\Pi(\rho)-\Pi(\bar\rho),\;\; \text{et}\;\; \rho|u|^2 \in L^\infty(0,\infty,L^1(\mathbb{R}^N))$$

$$\sqrt{\kappa(\rho)}\nabla\rho \in L^\infty(0,\infty,L^2(\mathbb{R}^N))^N, \ \ \sqrt{\mu(\rho)}Du \in L^2(0,\infty,\mathbb{R}^N)^{N^2} \ \text{ et } \ \sqrt{\lambda(\rho)}\text{div}u \in L^2(0,\infty,\mathbb{R}^N).$$

Afin de montrer l'existence de solutions faibles globales, une première étape consiste à vérifier la stabilité des solutions faibles. Pour ce faire considérons une suite de solutions approchées globales régulières $(\rho_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du système (21) vérifiant uniformément en n l'estimation (22). On va ensuite chercher à passer à la limite lorsque n tends vers l'infini pour chaque terme non linéaire et ceci en utilisant des résultats de compacité. On se rend alors rapidement compte que le terme quadratique $\kappa(\rho_n)\nabla\rho_n \otimes \nabla\rho_n$ provenant du tenseur de capillarité est délicat à traiter. En effet d'après les estimations d'énergie, $\kappa(\rho_n)\nabla\rho_n \otimes \nabla\rho_n$ est seulement uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^N))$. On obtient donc une convergence au sens de la mesure à extraction près et ceci vers une mesure ν. Toute la difficulté repose sur le fait de savoir si ν correspond réellement à $\nabla\rho \otimes \nabla\rho$ avec ρ défini comme limite faible de ρ_n dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^N))$ (ceci grâce aux effets régularisants provenant du coefficient de capillarité). Il est à préciser que par rapport à Navier-Stokes compressible le terme de pression $P(\rho_n)$ est aisé à traiter étant donné la régularité $L^\infty(L^2)$ que l'on a sur $\sqrt{\kappa(\rho_n)}\nabla\rho_n$, il suffit en effet simplement d'appliquer des injections de Sobolev.

Solutions faibles globales

Le problème des solutions faibles globales pour le système isotherme en toute généralité reste ouvert ; il existe cependant des réponses partielles selon le choix des coefficients de viscosité et de capillarité. D. Bresch, B. Desjardins et C.-K. Lin dans [24] se sont intéressés au cas où les coefficients de viscosité étaient variables. Ils se sont concentrés tout particulièrement sur le cas des coefficients intervenant dans le modèle de Saint-Venant $\mu(\rho) = \mu\rho$, $\lambda(\rho) = 0$ avec $\mu > 0$ et avec une capillarité constante κ. Pour ce choix de coefficients physiques ils obtiennent une nouvelle entropie qui leur fournit un gain de régularité sur la densité puisque $\Delta\rho$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N))$ dans ce cadre. Cela est alors suffisant pour prouver la stabilité des solutions faibles globales, en effet le terme quadratique $\nabla\rho_n \otimes \nabla\rho_n$ peut être estimé par des injections de Sobolev ce qui permet de montrer une convergence forte de $\nabla\rho_n$ dans $L^2_{loc,t,x}$. On peut remarquer cependant que ces solutions sont très « faibles » dans la mesure où les fonctions tests dépendent elles-mêmes de la solution et s'écrivent sous la forme $\rho\varphi$ avec $\varphi \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$. En effet puisque le coefficient de viscosité est dégénéré on a une perte d'information sur le gradient de la vitesse ∇u_n lorsque le vide intervient. C'est pourquoi D. Bresch, B. Desjardins et C.-K. Lin ont besoin d'utiliser ces fonctions tests $\rho\varphi$ pour avoir suffisamment de compacité afin de traiter le terme $\rho u \otimes u$.

Dans [104] on montre l'existence de solutions faibles globales en dimension $N = 2$ avec des données initiales petites dans l'espace d'énergie pour des coefficients de viscosité constants et avec une capillarité en $\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho^2}$ avec $\kappa > 0$. Pour ce faire on démontre de nouveaux effets régularisants sur la densité ρ qui nous permettent de traiter le terme quadratique en le gradient de la densité. D'autre part puisque les coefficients de viscosité ne sont pas dégénérés, on travaille avec des fonctions tests classiques $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
A. Jungel dans [140] montre l'existence de solutions faibles globales à la D. Bresch et al lorsque l'on considère des coefficients de viscosité de type shallow water et une capillarité de type pression quantique c'est à dire $\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho}$. Pour ce faire il montre une nouvelle entropie permettant également un gain de régularité sur $\nabla\rho_n$ en introduisant une vitesse efficace de type $v_n = u_n + \mu\nabla\ln\rho_n$. Dans [113] on montre l'existence de solutions faibles globales lorsque $\mu(\rho) = \mu\rho$, $\lambda(\rho) = 0$ et $\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho}$ avec $\kappa = \mu^2$. En effet on peu réécrire le système (21) sous la forme d'un système de Navier-Stokes compressible visqueux en densité en utilisant la même vitesse efficace que A. Jüngel dans [140]. On peut alors obtenir un gain d'inégrabilité sur v à la A. Mellet, A. Vasseur ainsi qu'un gain de régularité sur ρ ce qui nous permet de conclure. Cette fois ci on a des solutions faibles au sens classique (les fonctions tests ne dépendent pas de la solution elle même comme dans [24, 140]).

Solutions fortes

Les premiers à avoir vérifié que le modèle complet *non isotherme* était bien posé sont H. Hattori et D. Li dans [120] et [121]. Ils obtiennent des résultats d'existence globale et d'unicité avec des données initiales proches d'un état stable dans les espaces de Sobolev $H^s \times H^{s-1} \times H^{s-2}$ avec $s \geq \frac{N}{2} + 4$ (où N représente la dimension), ainsi que des résultats d'existence en temps fini et unicité avec des données initiales grandes. R. Danchin et B. Desjardins ont amélioré dans [20] les résultats précédents dans le cas *isotherme*, effectivement ils obtiennent des solutions avec des données initiales dans des espaces critiques du point de vue du scaling des équations. En effet le système de Korteweg local vérifie le même scaling que Navier-Stokes compressible barotrope modulo le terme de pression. R. Danchin et B. Desjardins prouvent ainsi des résultats de solutions fortes globales avec données initiales petites dans l'espace $F = (B_{2,1}^{\frac{N}{2}-1} \cap B_{2,1}^{\frac{N}{2}}) \times (B_{2,1}^{\frac{N}{2}-1})^N$. Ce choix d'espace de Besov critique permet ainsi de contrôler le vide (ou en d'autres termes la norme L^∞ de $\frac{1}{\rho}$) via l'injection suivante $B_{2,1}^{\frac{N}{2}} \hookrightarrow L^\infty$. En effet il est important de pouvoir estimer $\frac{1}{\rho}$ en norme L^∞ afin d'exploiter la parabolicité de l'équation du moment qui permet un gain de deux dérivées sur la vitesse. Enfin on remarque que les solutions obtenues dans [20] vérifient également un effet régularisant sur la densité ρ de type équation de la chaleur et celui ci provient du terme de capillarité. Ce phénomène est radicalement nouveau par rapport aux résultats de solutions fortes pour le système de Navier-Stokes compressible puisque dans ce cadre la densité subit un simple effet d'amortissement. Ces résultats on ensuite été généralisés au cas non isotherme dans [101].

Système de Korteweg non local

Nous allons considérer ici le système (NSK), ce genre de système est particulièrement important d'un point de vue numérique. En effet il est plus simple à étudier en terme de simulations numériques et ceci essentiellement car il nécessite moins de calculs ; ceci est dû au fait que ce système ne possède que des dérivées d'ordre une sur la densité alors que la capillarité dans le système de Korteweg local engendre des dérivées d'ordre trois.
De la même manière que pour Korteweg local, on montre des résultats de solutions fortes locales pour le système non local (NSK) dans des espaces de Besov critiques $B_{p,1}^{\frac{N}{p}} \times B_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}$ avec $p \leq N$ ainsi que des résultats globaux à données petites (voir [102]). Le système de Korteweg non local est plus proche de Navier-Stokes compressible puisqu'il n'apparaît pas d'effets régularisants sur la densité ρ, si ce n'est un effet d'amortissement en temps long pour des données petites. Dans [103] on prouve également l'existence de solutions faibles globales en dimension $N = 2, 3$ à la P.-L. Lions et ceci pour n'importe quelle pression $P(\rho) = \rho^\gamma$ avec $\gamma > 1$. Notons que ce résultat est meilleur que pour Navier-Stokes compressible où l'on impose la condition $\gamma > \frac{N}{2}$, et ceci s'explique par le fait que la capillarité fournit naturellement un contrôle $L^\infty(L^2)$ sur la densité qui permet de pouvoir renormaliser l'équation de masse à la Di Perna-Lions.

Une question importante sur ce sujet est de comprendre le lien entre système de Korteweg local et Korteweg non local ; en d'autres termes comment le système de Korteweg non local plus intéressant d'un point de vue numérique peut approcher le système de Korteweg local. Cela sera le but de la section III.2. On renvoie également aux travaux de F. Charve [31, 30] qui montrent la convergence des solutions fortes du système de Korteweg non local vers celles de Korteweg local pour un noyau ϕ_ε bien choisi et ceci dans le cadre de solutions fortes locales critiques pour le scaling des équations. Dans [30], F. Charve étudie un autre modèle de Korteweg non-local dit « à paramètre d'ordre » modélisé par C. Rohde dans [182]. Celui-ci a l'avantage de ne pas faire intervenir d'opérateur de convolution mais est plutôt un système augmenté d'une troisième équation pour l'inconnue c_α, un paramètre d'ordre qui mesure la discontinuité ou non des interfaces du mélange (et ceci en fonction de α). L'intérêt de ce système est à nouveau un cadre plus agréable pour les simulations numériques puisque cette fois ci on n'a pas d'opérateur non local de type convolution à gérer. F. Charve montre alors la convergence des solutions de ce système vers celles du système de Korteweg local lorsque α tends vers l'infini dans le cadre de solutions critiques pour le scaling des équations.

Système d'Euler Korteweg

On s'intéresse ici au système (13), rappelons donc une de ses caractéristiques essentielles ; celui ci peut être vu comme un système dispersif. En effet si l'on considère le changement de variables suivant $z = u + iw$ avec $w = \nabla f(\rho)$ et $L = \mathcal{L}(\rho)$ (avec $\nabla f(\rho) = \sqrt{\frac{\kappa(\rho)}{\rho}} \nabla \rho$ et $\mathcal{L}$ une primitive de $\sqrt{\frac{\kappa(\rho)}{\rho}}$) le système se réécrit alors sous la forme suivante (voir [12, 28]) :

$$\begin{cases} \partial_t L + u \cdot \nabla L + a \mathrm{div} u = 0, \\ \partial_t z + u \cdot \nabla z + i(\nabla z) \cdot w + i \nabla (a(L) \mathrm{div} z) = \nabla q(L), \end{cases} \tag{24}$$

avec a et g des fonctions régulières dépendant respectivement du coefficient de capillarité et du terme de pression. La seconde équation de (III.94) est donc une équation de Schrödinger quasilinéaire dégénérée, en effet le Laplacien a la forme suivante $\nabla(a(L)\mathrm{div} z)$, en conséquence on ne peut espérer de la dispersion sur z seulement si z est irrotationnel ce qui est équivalent à u irrotationnel. Mentionnons enfin que lorsque la capillarité est de la forme $\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho}$ on retrouve une équation de Schrödinger dégénérée semi linéaire ceci car on a alors $a(L) = \kappa$. Cela correspond au fameux cas du système d'Euler compressible quantique.
Les premiers résultats d'existence globale de solutions faibles sont dûs à P. Antonelli et P. Marcati dans [5] dans le cadre particulier de la pression quantique et d'une vitesse initiale irrotationnelle. La construction de solutions approchées s'obtient facilement en utilisant la transformation de Madelung (ici les auteurs travaillent avec une densité proche du vide, il est donc important de considérer la variable $\sqrt{\rho} u$ et non u pas définie sur l'ensemble $\{\rho = 0\}$), la difficulté principale concerne le passage à la limite du terme quadratique du gradient de la densité. Les auteurs réécrivent ce terme en fonction de z et montrent que z converge fortement dans $L^2_{loc,t,x}$ en utilisant des résultats de continuité par rapport à la donnée initiale (voir aussi [28]). Le problème de l'existence de solutions faibles globales reste ouvert en toute généralité.
Concernant l'existence de solutions fortes rappelons les résultats de S. Benzoni, R. Danchin et S. Descombes dans [11], [12] qui considèrent le système (13) en toute généralité, c'est à dire pour n'importe quel coefficient de capillarité $\kappa(\rho)$ avec κ fonction régulière. Plus précisément ils obtiennent des résultats de solutions fortes en temps fini avec les données initiales $(\rho_0 - 1, u_0)$ dans $H^{\frac{N}{2}+2+\varepsilon} \times H^{\frac{N}{2}+1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. Ils emploient une méthode d'énergie afin d'estimer $(\Delta\rho, \nabla u)$ en norme $L^\infty_T(L^\infty(\mathbb{R}^N))$, pour ce faire les auteurs emploient une méthode d'énergie nécessitant l'introduction d'une jauge afin de ne pas perdre de dérivées combinée avec des théorèmes de commutateurs. Nous nous intéresserons dans la suite (section III.4) à l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales petites et irrotationnelles.
D'autres travaux sur la stabilité des ondes progressives sont à noter, on renvoie aux travaux [9, 10, 177].

I.2.4 Quelques problématiques pour l'équation de Gross-Pitaevskii

On a vu précédemment que l'on retrouve au moins heuristiquement les équations de Gross-Pitaevskii via la transformation de Madelung lorsque l'on étudie le système d'Euler compressible avec pression quantique. On va donc rappeler quelques questions importantes reliées à cette équation. Rappelons d'abord la forme de l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$\begin{cases} 2i\sqrt{\kappa}\partial_t\psi = -2\kappa\Delta\psi + (|\psi|^2-1)\psi, \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0, \end{cases} \tag{25}$$

avec une condition limite $\lim_{|x|\to+\infty}\psi = 1$. L'équation de Gross-Pitaevskii est une équation d'évolution Hamiltonienne associée à l'énergie de Ginzburg-Landau :

$$\begin{aligned} E(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \big(\kappa|\nabla\psi(t,x)|^2 + \frac{1}{4}(|\psi|^2-1)^2\big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \big(\kappa|\nabla\varphi(t,x)|^2 + \frac{1}{4}(2Re\varphi + |\varphi|^2)^2\big)dx, \end{aligned} \tag{26}$$

avec $\psi = 1+\varphi$. On peut alors réécrire (14) pour l'inconnue $\varphi = \psi - 1$:

$$\begin{cases} i\partial_t\varphi + \Delta\varphi - 2Re\varphi = F(\varphi), \\ F(\varphi) = (\varphi + 2\bar{\varphi} + |\varphi|^2)\varphi. \end{cases} \tag{27}$$

L'équation précédente est proche (au moins si l'on considère les termes de plus haut degré) de l'équation de Schrödinger cubique défocalisante excepté que l'équation linéaire associée s'écrit :

$$i\partial_t\varphi + \Delta\varphi - 2Re\varphi = 0. \tag{28}$$

Cette équation peut être diagonaliser si l'on considère le changement de variable suivant (voir [98, 99]) :

$$v = V\varphi = \mathrm{Re}\varphi + iU\mathrm{Im}\varphi \quad \text{avec } U = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)^{-1}},$$

en posant $H = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)}$ on obtient alors l'équation linéaire suivante qui est de type Schrödinger en hautes fréquences et équation des ondes en basses fréquences :

$$i\partial_t v - Hv = 0.$$

L'équation de Schrödinger cubique défocalisante est maintenant bien comprise. En dimension $N = 3$ cette équation est globalement bien posée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ et a en plus la propriété de scattering (voir [29, 162]). L'existence globale et la propriété de scattering pour $N = 4$ correspond au cas d'énergie critique, il a été résolu après d'intenses efforts (voir [195]) dans le cas de données initiales radiales et ceci en utilisant notamment de subtiles inégalités de Morawetz ainsi que des décompositions en profils. Rappelons ici ce que signifie la notion de « scattering ».

Définition 3. *Considérons une équation dispersive de la forme Schrödinger :*

$$\begin{cases} i\partial_t u - A(-\Delta)u = f(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $A(-\Delta)$ est un multiplieur de Fourier avec un symbole réel. Supposons que cette équation ait une unique solution globale $u \in X(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) \supset C\big(\mathbb{R}, Y(\mathbb{R}^N)\big)$ où X, Y sont des espaces de Banach tels que e^{-itA} agit continûment sur Y. La solution u disperse vers $u_+ \in Y$ ou a une propriété de scattering si $\|e^{-itA}u(t) - u_+\|_Y \to_{t\to+\infty} 0$.

Un cadre naturel où intervient la notion de scattering correspond bien évidemment au cas des équations globalement bien posées ; souvent l'existence globale se montre en combinant résultat d'existence locale (via un point fixe) et des estimations d'énergie. Comme nous l'écrivions précédemment, l'équation de Schrödinger cubique défocalisante avec donnée initiale dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ pour $N = 3, 4$ vérifie cette propriété de scattering et ceci en utilisant des inégalités de type Morawetz (voir [29] ainsi que J. Bourgain [18]).

La situation est plus complexe pour l'équation de Gross-Pitaevskii, où l'espace d'énergie n'est pas $H^1(\mathbb{R}^N)$. Mentionnons en particulier que la norme $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas conservée (cela est dû au comportement basses fréquences de (28) qui est de type équation des ondes). L'espace naturel d'énergie associé à l'équation de Gross-Pitaevskii est l'espace suivant :

$$E_1 = \{\psi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N),\ \nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}^N),\ |\psi|^2 - 1 \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

L'existence de solution forte globale pour une donnée initiale dans E_1 a été prouvé par C. Gallo et P. Gérard dans [85, 86] en dimension $N = 2, 3$ et par R. Kilipp et al dans [149] dans le cas délicat car critique de la dimension $N = 4$. Il est aussi prouvé que pour $s \geq 1$ la régularité $H^s(\mathbb{R}^N)$ est aussi préservée et ceci éventuellement avec une taille exponentielle en temps (cela n'implique pas en particulier que la solution φ reste petite dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^N))$ pour $s > \frac{N}{2}$ si $\|\varphi_0\|_{H^s}$ est petit).
Une autre différence fondamentale entre (25) et l'équation de Schrödinger cubique défocalisante est l'existence d'ondes progressives pour (25) qui rend caduque la possibilité de scattering pour n'importe quelle donnée initiale (voir [14, 13, 44, 168] pour l'existence de telles ondes progressives). Une onde progressive est une solution de la forme (à symétrie près) :

$$\psi(t, x) = u_c(x_1 - ct, x_2, \cdots, x_N),$$

où u_c satisfait :

$$ic\partial_1 u_c - \Delta u_c - u_c(1 - |u_c|^2) = 0. \tag{29}$$

De telles solutions existent pour de petit c (voir [14, 13, 44]) alors que le cadre général $0 < |c| < \sqrt{2}$ a été obtenu par M. Maris en dimension $N \geq 3$ dans [168]. Rappelons en effet qu'en dimension $N \geq 2$ il n'existe pas d'ondes progressives supersoniques ($c > \sqrt{2}$, voir [93]). Il est aussi prouvé dans [14] qu'il existe une borne inférieure sur l'énergie de toutes les ondes progressives possibles (III.51) en dimension $N = 3$:

$$\mathcal{E}_0 = \inf\{E(\psi), \psi(t, x) = u_c(x_1 - ct, x_2, \cdots, x_N) \text{ résout (III.51) pour } c > 0\}. \tag{30}$$

La situation est complètement différente en dimension $N = 2$ puisque l'énergie des ondes progressives tend vers 0 lorsque c tends vers la limite supersonique $\sqrt{2}$; ceci a été conjecturé par C. A. Jones, S. J. Putterman et P. H. Roberts (voir [139])). Cela pourrait laisser entendre qu'il n'y a pas de scattering en dimension $N = 2$ et ceci même pour de petites données initiales. Enfin mentionnons un résultat très intéressant sur le comportement asymptotique des ondes progressives conjecturé par C. A. Jones, S. J. Putterman et P. H. Roberts en dimension $N = 2, 3$ et démontré rigoureusement par P. Gravejat dans [94] ; celui-ci stipule que les ondes progressives convergent vers une constante de module 1 à l'infini, que l'on peut supposer égale à 1, quitte à multiplier par un nombre complexe de module un. La différence $u_c - 1$ a une décroissance algébrique explicite, essentiellement gouvernée par la fonction $x \to \frac{1}{|x|^{N-1}}$. Enfin concernant la stabilité des ondes progressives on renvoie à l'excellent mémoire de P. Gravejat [95] pour plus de détails sur le sujet.

Le pendant naturel de la question de l'existence d'ondes progressives est bien évidemment l'existence ou non de scattering pour les solution de (25). S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai ont prouvé dans une série de papiers [98, 99, 100] extrêmement intéressants l'existence de scattering pour des données initiales petites lorsque $N \geq 3$. Pour $N \geq 4$ ce résultat est obtenu pour des données initiales petites dans $H^{\frac{N}{2}-1}(\mathbb{R}^N)$, le cas $N = 3$ est beaucoup plus compliqué et nécessite en particulier de travailler avec des espaces $H^1(\mathbb{R}^3)$ à poids (mentionnons que cet espace est compatible avec les ondes progressives et ceci du fait du comportement asymptotique en espace des ondes progressives, voir [94]).
Nous allons maintenant rappeler quelques idées de [99] que l'on détaillera plus par la suite dans la section III.4.1. Après diagonalisation le système (27) s'écrit :

$$\begin{aligned} i\partial_t v - Hv = &U(3v_1^2 + (U^{-1}v_2)^2 + |v_1 + iU^{-1}v_2|^2 v_1) \\ &+ i(2v_1(U^{-1}v_2) + |v_1 + iU^{-1}v_2|^2(U^{-1}v_2)). \end{aligned} \tag{31}$$

Il est intéressant ici de comparer cette équation à l'équation classique NLS (focalisante ou défocalisante, en effet on considère de petites données initiales si bien que le signe de la non-linéarité ne joue aucun rôle) :

$$i\partial_t\varphi + \Delta\varphi = \lambda|\varphi|^\alpha\varphi, \tag{32}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou même $\lambda \in \mathbb{C}$. Il est bien connu qu'il existe des solutions fortes globales avec données petites dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ plus une condition additionnelle sur φ_0 en basses fréquences pour tout $\alpha_0(N) < \alpha < \frac{4}{N-2}$ (voir [29] chapitre 6) avec $\alpha_0(N)$ l'exposant de Strauss :

$$\alpha_0(N) = \frac{2 - N + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N}. \tag{33}$$

La difficulté afin d'obtenir l'existence de solutions fortes globales avec données petites est reliée à l'exposant de plus bas degré α dans les non-linéarités (évidemment le même problème se pose pour prouver des résultats de scattering). Heuristiquement cela s'explique par le fait que la décroissance en temps du terme non linéaire est meilleure lorsque α est grand. En particulier pour $N = 3$ on a $\alpha_0(3) = 1$ si bien que les non-linéarités quadratiques correspondent exactement à l'exposant de Strauss. Cela peut se comprendre de la manière suivante, en dimension $N = 3$ la dispersion pour l'équation de Schrödinger prend la forme suivante :

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \lesssim |t|^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)}, \tag{34}$$

si bien que la non linéarité quadratique $|\varphi|^2$ apartient à $L^{\frac{3}{2}}$ le dual de L^3 avec une décroissance critique en temps en $\frac{1}{t}$. Cela explique pourquoi le cas $N = 3$ est si difficile pour (25) (voir [99]).

Avant d'exposer les principales idées utilisées dans [99] afin de contourner ce genre de difficulté pour l'équation de Gross-Pitaevskii, rappelons brièvement quelques résultats similaires existant pour NLS dans le cas d'une non-linéarité quadratique en dimension $N = 3$. Dans ce genre de cas il est important de prendre en compte les résonances de l'équation (c'est-à-dire là où la phase associée aux différentes non linéarités quadratiques ainsi que son gradient en espace s'annulent, on réfère à la section III.4.1 pour une définition plus précise) . Les résultats connus d'existence globales concernent essentiellement les cas où la non-linéarité quadratique a une intersection vide en terme de résonances espace et temps. On a en particulier les travaux de N. Hayashi et P. I. Naumkin [123], N. Hayashi, T. Mizumachi et P. I. Naumkin [122], Y. Kawahara [143] pour les non linéarités suivantes $\lambda_1 u^2 + \lambda_2\bar{u}^2$ (les méthodes utilisées correspondent soit à l'introduction de formes normales ou à des méthodes de type « vector field » à la S. Klainerman). Pour une non linéarité $|u|^2$, l'espace de résonance temps espace est de dimension 3. Dans ce cas seuls des résultats d'existence presque globale ont été prouvés par J. Ginibre et N. Hayashi [91], l'existence globale de solution forte n'est quand à elle pas claire. Ces résultats ont été reformulés récemment via la notion de non résonance temps espace par P. Germain, N. Masmoudi et J. Shatah dans [179].

La situation est encore pire pour (III.37) et ceci à cause du terme singulier $U^{-1}v_2$ en basses fréquences. Afin de se soustraire de cette difficulté S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai dans [99] introduisent une forme normale afin d'annuler les effets néfastes dûs à la fois aux termes singuliers en basses fréquences (comme $U^{-1}v_2$) ainsi qu'aux zones de résonances temps-espace . L'espace fonctionnel dans lequel ils travaillent combine à la fois des espaces de type Strichartz ainsi que des espaces à poids (qui sont reliés à la transformation pseudo-conforme) qui permettent de meilleures décroissances en temps. En effet comme nous le mentionnions précédemment, l'utilisation d'estimations de Strichartz via un point fixe n'est pas suffisante pour prouver l'existence globale de solutions fortes à données petites dans le cas de l'exposant de Strauss. Dans ce cadre on n'a pas assez de décroissance en temps pour boucler le point fixe ; cela explique le besoin de travailler avec des espaces à poids qui vont combler ce manque. La principale difficulté de la preuve consiste à obtenir des estimations dans ces espaces à poids et pour ce faire les auteurs ont besoin de décomposer l'espace des fréquences en régions non résonantes en temps ou non résonantes en espace. L'intersection des résonances n'est malheureusement pas le singleton $\{(0,0)\}$ ce qui induit le besoin d'introduire en plus une forme normale qui va naturellement « nettoyer » la zone de résonance temps-espace.

Le cas de la dimension $N \geq 4$ est plus simple puisque l'on n'est pas dans le cadre critique de l'exposant de Strauss ; seule une forme normale est nécessaire afin de faire disparaître les termes singuliers en basses fréquences. Il suffit ensuite d'appliquer un point fixe en utilisant des estimations de Strichartz.

Pour conclure ce paragraphe, on aimerait rappeler deux problèmes importants qui restent encore ouverts en toute généralité. Le premier concerne l'apparition ou non de vortex pour l'équation de Gross-Pitaevskii. En d'autres termes si la donnée initiale ne s'annule pas, peut-elle s'annuler après un certain temps T. Ce problème est d'autant plus important qu'en formulation hydrodynamique, cela peut être lié à une perte de régularité sur la vitesse u (on renvoie ici à la transformation de Madelung). On verra dans la section III.4 qu'on ne peut pas avoir formation de vortex en dimension $N \geq 3$ si la donnée initiale φ_0 est suffisamment petite. Ce problème reste ouvert dans le cas général ; c'est à dire en dimension $N = 2$ mais aussi peut on quantifier l'espace de données initiales pour lequel on est sûr de ne pas avoir création de vortex.
Un problème connexe à cette question est de prouver ou non la propriété de scattering pour toute donnée initiale ψ_0 dont l'énergie $E(\psi)$ (ψ la solution associée à la donnée initiale ψ_0) soit inférieure stricte à $\mathcal{E}_0$ en dimension $N = 3$ (modulo éventuellement quelques propriétés de régularité en plus sur ψ_0). Cette question est proposée sous forme de conjecture dans [99].

I.3 Présentation des résultats obtenus

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Le chapitre II traite du système de Navier-Stokes compressible. Dans la section II.1 on s'intéressera à prouver l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales « plus ou moins petites » dans des espaces de Besov critiques. Dans le paragraphe II.1.1, on cherchera à prouver des résultats d'existence de solutions fortes globales avec des données initiales petites pour des espaces de Besov critiques aussi large que possibles. Dans le paragraphe II.1.2 on essaiera de raffiner la notion de petitesse en permettant le choix de données initiales grandes pour le scaling du système. Dans la section II.2 on cherchera à comprendre certaines propriétés qualitatives des solutions ; on observera en particulier que pour certains choix sur les coefficients de viscosité, la densité ρ bénéficie alors d'effets régularisants de type parabolique. Cette constatation nous amènera alors à prouver l'existence de solutions fortes globales avec données initiales grandes en une dimension pour le système de Shallow water visqueux. Dans la section II.3 on étudiera la limite hautement compressible (par opposition à la limite faiblement compressible voir [68, 59]) des équations de Navier-Stokes compressibles. On montrera ainsi que la densité ρ a tendance à vérifier l'équation des milieux poreux pour le régime hautement compressible (c'est à dire lorsque le Nombre de Mach ε tends vers l'infini) pour certaines données initiales bien choisies. Enfin dans la section II.4 on proposera une petite digression sur les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable où l'on montrera un équivalent du théorème de Fujita-Kato pour ces équations.

Le chapitre III est quant à lui dédié aux systèmes capillaires (Korteweg, Korteweg local ou encore Euler-Korteweg). Dans la section III.1, on montrera l'existence de solutions fortes globales avec données petites dans des espaces de Besov critiques et d'énergie infinie pour le système de Korteweg local. La section III.2 porte sur le lien entre le système de Korteweg local et non local, on montrera plus précisément que pour un noyau ϕ_ε bien choisi les solutions de Korteweg non local convergent vers les solutions de Korteweg local. Dans la section III.3 on démontrera via un

processus de viscosité et de capillarité évanescentes la convergence des solutions du système de Korteweg local vers une solution entropique du système d'Euler compressible en une dimension. Enfin dans la section III.4 on s'attachera à prouver l'existence globale de solutions fortes pour le système d'Euler Korteweg pour de petites données initiales irrotationnelles. Cette étude reposera sur les propriétés de dispersion du système via une analyse fine de type résonance temps-espace. Par la même on en déduira que les équations de Gross-Pitaevskii ne génèrent pas de vortex en dimension $N \geq 3$ si la donnée initiale est suffisamment proche de l'état stable $\bar{\psi} = 1$.
Enfin on propose quelques rappels sur le paraproduit et la théorie de Littlewood-Paley en appendice section IV.

Chapitre II

Équations de Navier-Stokes compressibles

Dans ce chapitre on va commencer par présenter quelques résultats d'existence de solutions fortes globales dans le cadre de données initiales petites peu régulières (section II.1.1), le but étant d'affaiblir autant que possible les hypothèses de régularité sur les données initiales. On cherchera par la suite à obtenir l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales "grandes" au moins pour le scaling des équations (section II.1.2) ce qui nous amènera à considérer la notion de quasi-solutions.
On cherchera ensuite à mieux décrire le comportement qualitatif des solutions, ainsi dans la section II.2 on montrera que pour certains choix de viscosité la densité a un comportement de type parabolique. Cette observation nous permettra de montrer l'existence de solutions fortes globales avec données initiales grandes pour le système de Shallow water visqueux en une dimension.
On s'intéressera ensuite à la limite hautement compressible des équations de Navier-Stokes (voir la section II.3). On montrera en particulier que les solutions des équations de Navier-Stokes compressibles convergent vers des quasi-solutions (c'est à dire des solutions du système de Navier Stokes compressible sans pression) dont la densité vérifie pour des données initiales et des coefficients de viscosité bien choisis les équations des milieux poreux ou de diffusion rapide. On proposera même un taux de convergence de cette limite en fonction du Nombre de Mach.
Enfin on conclura ce chapitre (section II.4) par une petite digression sur les solutions fortes pour le système de Navier-Stokes non homogène. On y établira un pendant des résultats de Cannone-Meyer-Planchon (voir [27]) pour Navier Stokes incompressible. Pour ce faire on utilisera des estimations avec perte de régularité pour l'équation de transport lorsque le champ de vitesse u est seulement log *Lipschitz.*

II.1 Solutions fortes dans des espaces critiques pour Navier-Stokes compressible

Dans ce chapitre on va essentiellement s'intéresser aux équations de Navier Sokes compressibles que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho) D(u)) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div} u) + \nabla P(\rho) = \rho f, \\ (\rho, u)(0, \cdot) = (\rho_0, u_0), \end{cases} \tag{II.1}$$

où ρ représente la densité du fluide, $u \in \mathbb{R}^N$ le champ de vitesse, P la pression. De plus pour obtenir la fermeture du système on suppose le fluide Newtonien, μ et λ représentent les coefficients de viscosité vérifiant la condition de Lamé :

$$\mu(\rho) > 0 \ \text{ et } \ 2\mu(\rho) + N\lambda(\rho) > 0,$$

de plus $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u +^t \nabla u)$ est le symétrisé du gradient de vitesse ∇u. Pour simplifier les notations on réécrira le système précédent et ceci dès que la densité ρ ne s'annule pas sous la forme suivante avec $q = \rho - 1$:

$$\begin{cases} \partial_t q + u \cdot \nabla q = -(1+q)\mathrm{div} u, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \dfrac{1}{1+q}\mathcal{A}(q,u) + \dfrac{\nabla P(1+q)}{1+q} = f. \end{cases} \tag{II.2}$$

On note ici $\mathcal{A}(q,u) = \mathrm{div}(2\mu(1+q)D(u)) + \nabla(\lambda(1+q)\mathrm{div} u)$. Dans la suite on va s'intéresser à l'existence de solutions fortes globales à données petites pour le système (1). Notre objectif sera double, il consistera dans un premier temps à montrer de tels résultats pour des données initiales aussi peu régulières que possible. On peut rappeler maintenant qu'une des problématiques majeures dans l'étude des équations liées à la mécanique des fluides consiste à démontrer l'existence globale et l'unicité des solutions pour n'importe quelles données initiales. On cherchera donc dans un second temps à affiner les résultats précédents en permettant le choix de données initiales grandes au moins en terme de scaling (on peut effectivement vérifier que ces équations vérifient certaines invariances d'échelle).

Comme on le rappelait dans l'introduction de ce mémoire, le premier résultat d'existence de solutions fortes globales à données petites critiques pour le scaling des équations (voir la définition I.1.2) est dû à R. Danchin dans [52]. Plus précisément il travaille avec des données initiales (q_0, u_0) dans $(B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1} \cap B^{\frac{N}{2}}_{2,1}) \times (B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})^N$. La méthode employée utilise d'astucieuses inégalités d'énergie après découpages dyadiques en fréquences à la sauce Littlewood-Paley. Une question naturelle consiste à généraliser ces résultats au cas d'espaces de Besov construits sur les espaces de Lebesgue L^p avec $p \neq 2$. Pour ce faire il apparaît clair qu'une autre approche doit être proposée, en effet dans le cadre de Besov construit sur la norme L^p on perd l'aspect estimations d'énergie via des intégrations par parties. F. Charve et R. Danchin dans [32] ainsi que Q. Chen et al dans [41] ont été les premiers à supplanter cette difficulté et ainsi montrer l'existence de solutions fortes globales avec données petites dans $\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1} \times (\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1})^N$ avec $2 < p < 4$ (on réfère à l'appendice pour la définition des espaces de Besov hybrides). Pour ce faire, ils emploient une méthode relativement similaire qui consiste à étudier le système linéaire associé au système (II.2) en tenant compte du terme de convection $u \cdot \nabla q$ dans l'équation de masse (ceci car la densité n'admet pas d'effets régularisants, ce terme ne peut donc être considéré comme un terme de reste sous peine d'avoir une perte de dérivée sur q). Plus précisément afin d'obtenir de bonnes estimations dans des espaces de Besov ils ont besoin de paralinéariser le système afin de pouvoir pratiquer une analyse de Fourier spectrale en mode décomposition de Littlewood-Paley. Enfin mentionnons que l'emploi d'espaces de Besov hybrides est nécessaire puisqu'en basses fréquences le système a un comportement de type hyperbolique ce qui nécessite de travailler avec des espaces de Besov construit sur la norme L^2 (en effet ce genre de système est mal posé en général pour des normes L^p) ; alors qu'en hautes fréquences la vitesse a un comportement de type parabolique.

Dans le paragraphe II.1.1 on montrera ce résultat en utilisant une autre méthode que [32, 41], celle-ci consiste essentiellement à introduire une vitesse efficace bien choisie qui permet de diagonaliser le système (II.2) en hautes fréquences.

Enfin concentrons-nous maintenant sur la question de l'existence de solutions fortes globales pour le système de Navier-Stokes compressible (II.2) et ceci pour des données initiales critiques pour le scaling des équations et "grandes" pour ce scaling (par là on entend des données initiales éventuellement petites mais ceci pour une norme plus large que celle des espaces de Besov critiques, on parle alors de petitesse sous critique). À ma connaissance il n'existe aucun résultat dans cette direction, nous allons donc nous intéresser à ce problème dans le paragraphe II.1.2 pour le système de Shallow water visqueux. On proposera une première réponse à cette question au moins pour des données initiales irrotationnelles en utilisant la notion de quasi-solution que l'on va définir plus précisément par la suite.

II.1.1 Existence de solutions fortes globales dans des espaces critiques pour des espaces de Besov construits sur la norme L^p [105]

Dans cette section on va donc s'intéresser à prouver l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales petites dans des espaces de Besov critiques pour le scaling des équations et ceci pour des espaces de Besov construits sur les espaces de Lebesgue L^p avec $p \neq 2$. On obtient donc le résultat suivant (voir [105]).

Théorème 3. *Soit $N \geq 2$, $\mu(\rho) = \mu > 0$ et $\lambda(\rho) = \lambda$ avec $2\mu + \lambda > 0$. Soit P une fonction régulière telle que $P'(1) > 0$, et $1 \leq p_1 \leq p < 4$ avec :*

$$\frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{p},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} > \frac{1}{N} \quad et \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}.$$

Supposons que $u_0 \in \widetilde{B}_{2,p_1,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p_1}-1}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}_{2,p_1,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p_1}-1})$ et $q_0 \in \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}$. Alors il existe une constante ε_0 telle que si :

$$\|q_0\|_{\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}} + \|u_0\|_{\widetilde{B}_{2,p_1,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p_1}-1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+,\widetilde{B}_{2,p_1,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p_1}-1})} \leq \varepsilon_0,$$

il existe une solution globale (q,u) pour le système (II.1) avec $\frac{1}{\rho}$ borné et,

$$\begin{aligned} q \in \widetilde{C}(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}}) \quad et \\ u \in \widetilde{C}(\mathbb{R}^+; \widetilde{B}_{2,p_1,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p_1}-1} + \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}+, \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}+1}). \end{aligned}$$

De plus cette solution est unique si $\frac{2}{N} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}$.

Définition 4. *On a noté ici $\widetilde{B}^{s_1,s_2}_{(p_1,r_1),(p_2,r_2)}$ l'espace de Besov pour lequel le comportement basses fréquences est de la forme $B^{s_1}_{p_1,r_1}$ et $B^{s_2}_{p_2,r_2}$ en hautes fréquences. Si $r_1 = r_2$ on simplifie les notations et on écrit $\widetilde{B}^{s_1,s_2}_{p_1,p_2,1}$ pour $\widetilde{B}^{s_1,s_2}_{(p_1,1),(p_2,1)}$. Pour plus de détails on renvoie à l'appendice.*

Remarque 1. *Notons que par rapport aux résultats obtenus dans [41, 32], on peut se permettre de distinguer les exposants de Lebesgue pour la densité et la vitesse et ceci car l'introduction de la vitesse efficace permet d'affaiblir le couplage entre vitesse et pression.*

Quelques éléments de preuve du théorème 3 : Il s'agit essentiellement d'obtenir de bonnes estimations en terme d'espaces de Besov pour le système linéarisé associé au système (II.1) lorsque l'on tient compte du terme de convection dans l'équation de masse :

$$\begin{cases} \partial_t q + v \cdot \nabla q + \mathrm{div} u = F, \\ \partial_t u - 2\mu \Delta u - \lambda \nabla \mathrm{div} u + P'(1) \nabla q = G, \\ (q,u)(0,\cdot) = (q_0,u_0). \end{cases} \tag{II.3}$$

Notons en effet qu'il est crucial d'intégrer dans notre étude du linéarisé le terme $v \cdot \nabla q$ puisque l'on rappelle que le comportement de q est de type hyperbolique (on précisera plus la tard la régularité du champ de vecteur v).

On va à présent distinguer le comportement basses fréquences et hautes fréquences, rappelons qu'en basses fréquences le système (II.1) est proche (au moins heuristiquement) de se comporter comme le système d'Euler compressible, div$u$ a donc un comportement de type hyperbolique. On sait que ce genre de système n'est pas bien posé pour des espaces construits sur la norme L^p avec $p \neq 2$. On va donc travailler avec des espaces de Besov construits sur la norme L^2 en basses fréquences. Inversement en hautes fréquences la vitesse a un comportement de type parabolique, on considérera donc des espaces de Besov construit sur une norme L^p générale.
On va ici considérer la cadre simplifié $p = p_1$. On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit (q, u) une solution du système (II.3) on a alors pour $2 \leq p < 4$:*

$$\begin{aligned}
&\|q\|_{\widetilde{L}^{\infty}_T\big(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1}\big)} + \|q\|_{\widetilde{L}^1_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})} + \|u\|_{\widetilde{L}^{\infty}_T\big(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1}\big)} + \|u\|_{\widetilde{L}^1_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}+1}_{2,p,1})} \\
&\lesssim e^{V(T)}\big(\|q_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1}} + \|u_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1}} + \|F\|_{\widetilde{L}^1_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})} + \|G\|_{\widetilde{L}^1_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1})}\big),
\end{aligned}$$

avec $V(T) = \int_0^T \|v(s)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}+1}_{2,p,1}} ds.$

Comme mentionné précédemment on distingue le comportement basses fréquences et hautes fréquences, (q, u) vérifie donc le système suivant en basses fréquences :

$$\begin{cases}
\partial_t q + \mathrm{div} u = F - v \cdot \nabla q, \\
\partial_t u - 2\mu\Delta u - \lambda\nabla\mathrm{div} u + P'(1)\nabla q = G, \\
(q, u)(0, \cdot) = (q_0, u_0).
\end{cases} \tag{II.4}$$

Il suffit alors d'étudier la matrice de Green G associée au système linéraire précédent (voir [52, 41]). On peut ici se permettre de considérer le terme de convection comme un terme de reste puisqu'en basses fréquences la densité a un comportement de type parabolique dans le sens où elle admet un gain de deux dérivées sur ρ. On peut donc absorber la perte de dérivée provenant du terme de convection $v \cdot \nabla q$. Il vient donc lorsque l'on écrit la formule de Duhamel :

$$\begin{pmatrix} \Delta_j q(t) \\ \Delta_j u(t) \end{pmatrix} = W(t) \begin{pmatrix} \Delta_j q_0 \\ \Delta_j u_0 \end{pmatrix} + \int_0^t W(t-s) \begin{pmatrix} \Delta_j F(s) - \Delta_j(v \cdot \nabla q)(s) \\ \Delta_j G(s) \end{pmatrix} ds.$$

En utilisant la proposition 4.4 de [41] et des inégalités de Young on obtient pour $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\|(q, u)_{BF}\|_{\widetilde{L}^{\infty}(B^s_{2,1})} + \|(q, u)_{BF}\|_{\widetilde{L}^1(B^{s+2}_{2,1})} \leq &\|(q_0, u_0)_{BF}\|_{B^s_{2,1}} + \|(F, G)_{BF}\|_{\widetilde{L}^1(B^s_{2,1})} \\
&+ \|(v \cdot \nabla q)_{BF}\|_{\widetilde{L}^1(B^s_{2,1})}.
\end{aligned}$$

Remarque 2. *Ici la notation $\|(q, u)_{BF}\|_{\widetilde{L}^{\infty}(B^s_{2,1})}$ correspond à estimer la norme Besov en basses fréquences pour une certaine fréquence de coupure l_0 à préciser plus tard :*

$$\|(q, u)_{BF}\|_{\widetilde{L}^{\infty}(B^s_{2,1})} = \sum_{l \leq l_0} 2^{ls} \|\Delta_l(q, u)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^+, L^2)}.$$

On va ensuite comme dans [106] introduire une vitesse efficace v afin d'étudier le comportement hautes fréquences de u, celle ci va avoir pour but de diagonaliser le système (II.3). On définit v_1 de telle manière que :

$$-2\mu\Delta v_1 - \lambda\nabla\mathrm{div} v_1 = P'(1)\nabla q.$$

En particulier on choisit v_1 tel que ($\nu=2\mu+\lambda$) :

$$\begin{cases} \mathrm{div} v_1=-\dfrac{P'(1)}{\nu}q,\\ \mathrm{curl} v_1=0. \end{cases}$$

On pose ensuite $v_2=u+v_1$ qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t q+v\cdot\nabla q+\dfrac{P'(1)}{\nu}q=F-\mathrm{div}v_2,\\ \partial_t v_2-\mathcal{A}v_2=G-\dfrac{P'(1)}{\nu}\partial_t(\Delta)^{-1}\nabla q. \end{cases} \tag{II.5}$$

On observe maintenant que la seconde équation est parabolique et la première correspond à une équation de transport amortie. On peut alors estimer simplement v_2 et q en hautes fréquences en utilisant les estimations classiques dans les espaces de Besov pour l'équation de la chaleur et l'équation de transport. Il s'agit seulement de faire attention au terme $\frac{P'(1)}{\nu}\partial_t(\Delta)^{-1}\nabla q$ qui s'écrit :

$$\frac{P'(1)}{\nu}\partial_t(\Delta)^{-1}\nabla q=\frac{P'(1)}{\nu}(\Delta)^{-1}\nabla\big(-v\cdot\nabla q-\frac{P'(1)}{\nu}q+F-\mathrm{div}v_2\big).$$

Ce terme est petit en hautes fréquences, en effet si l'on considère en particulier le terme correspondant à $\frac{P'(1)}{\nu}(\Delta)^{-1}\nabla\mathrm{div}v_2$, ce dernier n'est qu'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 en v_2. On peut alors dominer ce terme par $\mathcal{A}v_2$ apparaissant sur le membre de gauche du système (II.5), il s'agit pour ce faire de choisir une fréquence de coupure l_0 (voir le remarque 2) suffisamment grande et appliquer un argument de bootstrap.
Il reste ensuite à traduire la régularité obtenue sur v_2 en une régularité sur u ce qui permet de prouver la proposition 1. Mentionnons que l'effet d'amortissement obtenu sur q (avec q appartenant à $\widetilde{L}^1_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})$) est une conséquence directe du fait que q vérifie une équation de transport amortie (voir le système (II.5)) et ceci car $P'(1)>0$ (cette hypothèse apparaît donc comme cruciale).
Le reste de la preuve est assez standard, il s'agit dans un premier temps de construire des solutions globales "régulières" $(q_n,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du système (II.1) par une méthode de type Friedrich, plus exactement il s'agit de considérer des solutions du système (II.1) pour des données initiales (q_n^0,u_n^0) régulières. Par les théorèmes d'existence en temps fini, on montre que la solution existe sur un intervalle de temps maximal $(0,T_n)$ et qu'ensuite $T_n=+\infty$ via des arguments classiques sur les critères d'explosion des solutions. La partie la plus délicate consiste à montrer que la suite (q_n,u_n) est uniformément bornée dans E avec :

$$\begin{aligned} E=\big(\widetilde{C}(\mathbb{R}^+,\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})\cap L^1(\mathbb{R}^+,\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})\big)&\\ \times\big(\widetilde{C}(\mathbb{R}^+;\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p_1}-1}_{2,p_1,1}+\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})\cap L^1(\mathbb{R}+,\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}+1}_{2,p,1})\big).& \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la proposition 1 et d'estimer les termes de reste :

$$\begin{aligned} &F_n=q_n\mathrm{div}u_n,\\ &G_n=(\frac{1}{1+q_n}-1)\mathcal{A}u_n-u_n\cdot\nabla u_n+(P'(1)-\frac{P'(1+q_n)}{1+q_n})\nabla q_n. \end{aligned}$$

dans respectivement $\widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})\times\widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1})$ et de conclure par un argument de bootstrap. Mentionnons que c'est à ce stade que les conditions sur (p,p_1) apparaissent, en particulier la condition $p<4$. En effet cela est dû aux interactions basses fréquences-hautes fréquences lorsque l'on applique les lois de paraproduits. Afin d'obtenir l'existence globale de solutions, il s'agit ensuite de vérifier que la suite $(q_n,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (q,u) solution du système (II.2) et ceci via des arguments de compacité. Cela conclut la preuve de l'existence, la preuve de l'unicité suit les arguments développés dans [52].

II.1.2 Existence de solutions fortes globales pour le système de Shallow water visqueux pour des données initiales grandes pour le scaling des équations [114]

On aimerait à présent raffiner les résultats précédents non pas en terme de "faible" régularité sur les données initiales mais plutôt en terme de "taille" . En effet on va chercher à affaiblir les hypothèses de petitesse en se plaçant dans un cadre où l'on peut choisir des données initiales grandes pour le scaling des équations. En d'autres termes on est intéressé par avoir une condition de petitesse sous critique.
Pour ce faire, il est important de prendre plus en compte la structure des équations et leurs non linéarité, plus précisément on sera intéressé par chercher des solutions sous la forme irrotationnelle, c'est à dire $u(t,x) = \nabla\theta(t,x)$. On va à présent considérer le système de Shallow water visqueux suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - 2\mu \operatorname{div}(\rho D(u)) + \nabla P(\rho) = 0. \end{cases} \tag{II.6}$$

On peut observer que lorsque $P(\rho) = 0$, il existe une solution particulière du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - 2\mu \operatorname{div}(\rho D(u)) = 0, \end{cases} \tag{II.7}$$

sous la forme $(\rho^1, -2\mu\nabla \ln \rho^1)$ (on se place dans un cadre où la densité ne s'annule pas) avec ρ^1 vérifiant l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^1 - 2\mu\Delta\rho^1 = 0, \\ \rho^1(0,\cdot) = \rho_0. \end{cases} \tag{II.8}$$

Supposons que l'on choisisse une donnée initiale ne s'annulant pas $\rho_0 \geq c > 0$ alors par le principe du maximum on observe que $\rho^1(t,\cdot) \geq c > 0$ pour tout temps $t \geq 0$ ce qui justifie rigoureusement la définition de $u^1 = -2\mu\nabla \ln \rho^1$. On appellera la solution $(\rho^1, -2\mu\nabla \ln \rho^1)$ une quasi-solution.
Il est maintenant naturel de chercher une solution globale du système (II.6) en perturbant notre quasi-solution $(\rho^1, -2\mu\nabla \ln \rho^1)$. On va alors chercher des solutions sous la forme $\ln \rho = \ln \rho^1 + h^2$ avec $\rho_1 = 1 + q^1$, $\rho = \rho^1 e^{h^2}$ et $u = -2\mu\nabla \ln \rho_1 + u^2$. En supposant que la densité ne s'annule pas, on peut réécrire le système (II.6) sous la forme suivante avec $P(\rho) = a\rho$ (ce choix de pression n'a que pour but de simplifier la présentation) et h^2, u^2 les nouvelles inconnues :

$$\begin{cases} \partial_t h^2 + u \cdot \nabla h^2 + \operatorname{div} u^2 + u^2 \cdot \nabla \ln \rho^1 = 0, \\ \partial_t u^2 + u^1 \cdot \nabla u^2 + u^2 \cdot \nabla u^1 - 2\mu \nabla \ln \rho^1 \cdot Du^2 - 2\mu\nabla h^2 \cdot Du^1 - \mu\Delta u^2 - \mu\nabla \operatorname{div} u^2 \\ \qquad\qquad + a\nabla h^2 = -a\nabla \ln \rho^1 - u^2 \cdot \nabla u^2 + 2\mu\nabla h^2 \cdot Du^2, \\ (h^2, u^2)_{/t=0} = (h_0^2, u_0^2). \end{cases} \tag{II.9}$$

On va à présent montrer un résultat de solutions fortes globales pour le système (II.6) en résolvant le système équivalent (II.9).

Théorème 4. *Soit $N \geq 2$, $P(\rho) = a\rho$ et $2 \leq p \leq 4$, $q \geq 2$ tels que :*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ \frac{1}{N} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ \ et\ \ \frac{1}{p} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{q}.$$

Soit $\rho_0 = \rho_0^1 e^{h_0^2}$ avec $\rho_0^1 = 1 + q_0^1$, $u_0 = -2\mu\nabla \ln \rho_0^1 + u_0^2$. De plus on suppose que $\rho_0^1 \geq c > 0$, $q_0^1 \in \widetilde{B}_{2,q,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{q}} \cap \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}$, $h_0^2 \in \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}$ et $u_0^2 \in \widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}$. Il existe ε_0, ε_1, $C > 0$ et deux *fonctions régulières g, g_1 telles que si :*

$$
\begin{aligned}
&Cg(\|(\rho_1^0,\frac{1}{\rho_1^0})\|_{L^\infty})\|q_0^1\|_{\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}}\exp\big(Cg_1(\|(\rho_1^0,\frac{1}{\rho_1^0})\|_{L^\infty})\|q_0^1\|_{\widetilde{B}_{2,q,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{q}}}\big)\le\varepsilon_1,\\
&\|h_2^0\|_{\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}}+\|u_2^0\|_{\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}}\le\varepsilon_0=g_1(\|\frac{1}{\rho_0^1}\|_{L^\infty},\|\rho_0^1\|_{L^\infty})\|q_0^1\|_{\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}}
\end{aligned}
\tag{II.10}
$$

alors il existe une solution globale (ρ,u) pour le système (II.6) qui s'écrit sous la forme : $\rho=\rho^1e^{h^2}$ et $u=-2\mu\nabla\ln\rho^1+u^2$ avec :

$$
\begin{cases}
\partial_t\rho^1-2\mu\Delta\rho^1=0,\\
\rho^1_{t=0}=\rho_0^1.
\end{cases}
\tag{II.11}
$$

Et on a :

$$
\begin{aligned}
h^2\in\widetilde{C}(\mathbb{R}^+,\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}})\cap L^1(\mathbb{R}^+,\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}})\\
\text{et }\ u^2\in\widetilde{C}(\mathbb{R}^+;\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1})\cap L^1(\mathbb{R}+,\widetilde{B}_{2,p,1}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}+1}).
\end{aligned}
$$

De plus la solution est unique si $\frac{2}{N}\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

Remarque 3. *Comme nous l'avions annoncé, on remarque que l'on peut choisir des données initiales grandes pour le scaling des équations et pourtant vérifiant les conditions (II.10). En effet on peut choisir $q_0^1(x)=\varphi(\lambda x)$ avec $\varphi\in\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{2}}$ (où $p=q=2$) et tel que $1+\varphi\ge c>0$, on observe alors que :*

$$
\begin{cases}
\|q_0^1\|_{B_{2,1}^{\frac{N}{2}}}=\|\varphi\|_{B_{2,1}^{\frac{N}{2}}},\\
\|\rho_0^1\|_{L^\infty}=\|1+\varphi\|_{L^\infty},\\
\|\dfrac{1}{\rho_0^1}\|_{L^\infty}=\|\dfrac{1}{1+\varphi}\|_{L^\infty},\\
\|q_0^1\|_{B_{2,1}^{\frac{N}{2}-2}}=\dfrac{1}{\lambda^2}\|\varphi\|_{B_{2,1}^{\frac{N}{2}-2}}.
\end{cases}
\tag{II.12}
$$

Cela implique que q_0^1 vérifie (II.10) lorsque l'on choisit λ assez grand. En particulier si φ est grand dans $B_{2,1}^{\frac{N}{2}}$ alors la densité initiale q_1^0 et donc ρ_0 (par théorèmes de composition et de produits) est grande dans l'espace de Besov $B_{2,1}^{\frac{N}{2}}$ qui est critique pour le scaling des équations. Cela implique en particulier que la norme L^∞ de la densité ρ_0 n'est pas nécessairement petite (rappelons que c'est le cas dans [32, 41, 105]).
En dimension $N=2$, il est donc possible de choisir φ grand dans $B_{2,2}^1$, rappelons que via la BD entropie l'espace d'énergie correspond à $\nabla\sqrt{\rho_0}\in L^2(\mathbb{R}^N)$; cela sous tend donc que l'on peut avoir des données initiales vérifiant (II.10) tout en restant grandes dans les espaces d'énergie. C'est donc un premier cas à ma connaissance de données initiales grandes dans les espaces d'énergie et admettant pourtant une solution forte globale. Rappelons que le problème de l'existence de solutions fortes globales en dimension $N=2$ avec des données initiales grandes reste ouvert en toute généralité.

Remarque 4. *Un point important de la preuve est la forme des quasi-solutions, en effet ρ^1 vérifie l'équation de la chaleur et admet donc des effets régularisants tout comme u^1. Ceci est crucial afin de pouvoir estimer le terme $u^2\cdot\nabla\ln\rho^1$ sans perte de régularité. D'autre part cet effet régularisant permet de considérer $\nabla\ln\rho^1$ comme un terme de reste "petit" en hautes fréquences.*
De manière plus générale le fait que (q^1,u^1)ait une bonne décroissance en temps long permet d'utiliser un argument perturbatif.

Remarque 5. *Mentionnons également que ce type de conditions de petitesse nonlinéaire (II.10) a également été obtenu par J.-Y. Chemin et I. Gallagher dans [37, 38] pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Dans ces travaux les auteurs montrent l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales grandes dans $B^{-1}_{\infty,\infty}$ qui est le plus large des espaces invariants pour le scaling du système. Cependant notre résultat ainsi que sa preuve sont totalement différents de [37, 38] puisque la vitesse initiale est essentiellement supposée irrotationnelle (ce qui n'est évidemment pas le cas pour Navier-Stokes incompressible). D'autre part dans notre cadre on travaille autour de quasi solutions qui absorbent naturellement le terme de convection dans l'équation du moment ce qui permet d'avoir une condition de petitesse assez explicite (II.10) alors que dans [37, 38] les auteurs travaillent autour d'une solution de l'équation de Stokes (la condition de petitesse non linéaire tend à rendre le terme de convection petit pour un bon choix de données initiales).*

On en déduit en plus le corollaire suivant qui nous assure pour n'importe quelle données initiales de type quasi-solution $(\rho_0, -2\mu\nabla\ln\rho_0)$ l'existence de solutions fortes globales en dimension $N\geq 2$ si le nombre de Mach ε avec $\varepsilon>0$ est suffisamment grand.

Corollaire 1. *Soit $P(\rho)=\frac{1}{\varepsilon^2}\rho$ avec $\varepsilon>0$, $N\geq 2$ et (ρ_0,u_0) vérifiant les mêmes conditions que dans le théorème 4. Alors il existe $\varepsilon_0>0$ (dépendant de h_1^0 et le coefficient de viscosité μ) tel que pour tout $\varepsilon\geq\varepsilon_0$, il existe $\varepsilon_1>0$ tel que si :*

$$\|h_2^0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1}}+\|u_2^0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1}}\leq\varepsilon_1, \tag{II.13}$$

alors il existe une solution forte globale (ρ,u) pour le système (II.6) .

Quelques éléments de preuve du théorème 4 : Il s'agit essentiellement de prouver l'existence de solutions fortes globales (h^2,u^2) avec données petites pour le système (II.9) avec ρ^1 solution de (II.8) et $u^1=-2\mu\nabla\ln\rho^1$. On obtient facilement par le principe du maximum puisque ρ^1 vérifie l'équation de la chaleur que :

$$0<c\leq\rho^1(t,\cdot)\leq\|\rho_0^1\|_{L^\infty}\leq 1+\|q_0^1\|_{B^0_{\infty,1}}. \tag{II.14}$$

D'autre part on déduit via la proposition 17 que q^1 apartient aux espaces de Besov suivants :

$$\begin{aligned}
&q^1\in\widetilde{L}^1\big(\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{p}}_{2,p,1}\cap\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{q}+2}_{2,q,1}\big)\cap\widetilde{L}^\infty\big(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}_{2,p,1}\cap\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{q}}_{2,q,1}\big)\\
&\text{et}\\
&u^1\in\widetilde{L}^1\big(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1}\cap\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{q}+1}_{2,q,1}\big)\cap\widetilde{L}^\infty\big(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-3,\frac{N}{p}-3}_{2,p,1}\cap\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{q}-1}_{2,q,1}\big).
\end{aligned} \tag{II.15}$$

Il s'agit à présent d'étudier le système linéaire associé au système (II.9) :

$$\begin{cases}
\partial_t h^2+u\cdot\nabla h^2+\mathrm{div}u^2+u^2\cdot\nabla\ln\rho^1=F,\\
\partial_t u^2+u^1\cdot\nabla u^2+u_2\cdot\nabla u^1-2\mu\nabla\ln\rho^1\cdot Du^2-2\mu\nabla h^2\cdot Du^1-\mu\Delta u^2-\mu\nabla\mathrm{div}u^2\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+a\nabla h^2=G,\\
(h^2,u^2)_{/t=0}=(h_0^2,u_0^2).
\end{cases} \tag{II.16}$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit $2\leq p\leq 4$, $q\geq 2$ tels que :*

$$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q},\ \frac{1}{N}<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ \ et\ \ \frac{1}{p}\leq\frac{1}{N}+\frac{1}{q}.$$

Soit (h^2,u^2) la solution de (II.16), il existe alors une constante $C>0$ telle que l'on a :

$$\begin{aligned}&\|(h^2,u^2)(t)\|_{\widetilde{L}^\infty_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1}\times B^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1})}+\|(h^2,u^2)\|_{\widetilde{L}^1_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}}_{2,p,1}\times \widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}+1}_{2,p,1})}\\&\qquad\le Ce^{V(T)}\big(\|(h^2_0,u^2_0)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1}\times B^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1}}+\|(F,G)\|_{\widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1}\times B^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1})}\big),\end{aligned}$$

avec :

$$V(T)=\int_0^t\big(\|\nabla u^1(s)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{q}}_{2,q,1}}+\|\nabla u^2(s)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{p}}_{2,p,1}}+\|u^1(s)\|^2_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{q}}_{2,q,1}}+\|u^2(s)\|^2_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{p}}_{2,p,1}}\big)ds.$$

La proposition précédente se montre en utilisant le même genre d'arguments que pour prouver la proposition 1. Il s'agit ensuite comme dans le théorème précédent de construire une suite globale de solutions approchées (h^2_n,u^2_n) du système (II.9). On montre alors en utilisant la proposition 2 et les lois de paraproduit que l'on a :

$$\|(h^2_n,u^2_n)\|_F\le Ce^{V_1(+\infty)+V_2^n(+\infty)}\big(\varepsilon_0+\|(h^2_n,u^2_n)\|^2_F+\|\nabla\ln\rho^1\|_{\widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1})}\big),\tag{II.17}$$

avec :

$$\begin{aligned}&F=\big(\widetilde{L}^\infty(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})\cap\widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}}_{2,p,1})\big)\times\big(\widetilde{L}^\infty(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{p}-1}_{2,p,1})\cap\widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{p}+1}_{2,p,1})\big),\\&V_1(+\infty)=C\int_0^{+\infty}\big(\|\nabla u^1(s)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{q}}_{2,q,1}}+\|u^1(s)\|^2_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{q}}_{2,q,1}}+\|\nabla\ln\rho^1(s)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{q}+1}_{2,q,1}}\\&\qquad\qquad+\|\nabla\ln\rho^1(s)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{q}+1}_{2,q,1}}+\|\nabla\ln\rho^1(s)\|^2_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{q}}_{2,q,1}}\big)ds,\\&\text{et}\;\;V_2^n(+\infty)=C\int_0^{+\infty}(\|\nabla u^2_n(s)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{p}}_{2,p,1}}+\|u^2_n(\tau)\|^2_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2},\frac{N}{p}}_{2,p,1}})ds.\end{aligned}$$

Le point clé de la preuve intervient à ce moment où l'on a à estimer le terme de reste $\nabla\ln\rho^1$; en effet il s'agit de montrer que ce terme est petit d'une manière ou d'une autre afin de pouvoir appliquer un argument de type bootstrap pour l'inégalité (II.17). Ce sera le cas car ce terme est en effet petit en hautes fréquences et ceci à cause de l'effet régularisant sur q^1 (cela est aussi dû au fait que les équations de Navier Stokes compressibles ne sont pas exactement invariantes par changement d'échelle puisque cette invariance est modulo le terme de pression). Plus précisément on a en utilisant des théorèmes de composition pour les espaces de Besov et le fait que ρ^1 vérifie une équation de la chaleur :

$$\|(h^2_n,u^2_n)\|_F\le Ce^{V_1(+\infty)+V_2^n(+\infty)}\big(\varepsilon_0+\|(h^2_n,u^2_n)\|^2_{F_T}+g_1(\|\frac{1}{\rho^1_0}\|_{L^\infty},\|\rho^1_0\|_{L^\infty})\|q^1_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}_{2,p,1}}\big),\tag{II.18}$$

avec g_1 une fonction régulière. On remarque donc que l'on a un contrôle de ce terme via $\|q^1_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}_{2,p,1}}$ ce qui décrit bien une forme de petitesse en hautes fréquences (en effet cela se traduit par une estimation nécessitant un espace de Besov moins régulier en hautes fréquences, seulement $B^{\frac{N}{2}-2}_{p,1}$). Cela va nous permettre de conclure en utilisant des arguments de bootstrap classiques tels que l'on ait :

$$\|(h^2_n,u^2_n)\|_F\le 4Ce^{V_1(+\infty)}g_1(\|\frac{1}{\rho^1_0}\|_{L^\infty},\|\rho^1_0\|_{L^\infty})\|q^1_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}_{2,p,1}}=\varepsilon_1,\tag{II.19}$$

sous la condition qu'il existe une fonction régulière K_1 telle que :

$$16C^2g_1(\|\frac{1}{\rho^1_0}\|_{L^\infty},\|\rho^1_0\|_{L^\infty})\|q^1_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{p}-2}_{2,p,1}}\le e^{-K_1(\|\frac{1}{\rho^1_0}\|_{L^\infty},\|q^1_0\|_{L^\infty})\|q^1_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{q}}_{2,q,1}}}.\tag{II.20}$$

Cette dernière condition correspond exactement à la condition (II.10) du théorème 4. On conclut la preuve du théorème 4 selon un schéma classique convergence de la solution $(h_n^2, u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une solution (h^2, u^2) et ceci en utilisant les estimations uniformes en n (II.20) qui fournissent assez de compacité. L'unicité est également classique (voir [52]).
Le corollaire 1 se prouve de la même manière sauf que cette fois ci c'est la paramètre $\frac{1}{\varepsilon^2}$ qui rend le terme de reste $\frac{1}{\varepsilon^2}\nabla \ln \rho^1$ petit si tant est qu'ε soit choisi assez grand, on a donc plus besoin d'une condition de petitesse non linéaire.

II.2 Parabolicité de la densité pour Navier-Stokes compressible et existence de solutions fortes globales avec données grandes en une dimension [115, 118]

Dans [115] on propose une reformulation des équations de Navier-Stokes compressibles lorsque les coefficients de viscosité vérifient la relation (6) introduite par D. Bresch et B. Desjardins dans [20]. On pose en effet $v = u + 2\nabla\varphi(\rho)$ (vitesse efficace apparaissant dans la BD entropie voir [20, 21, 23]) avec $\varphi'(\rho) = \frac{2\mu'(\rho)}{\rho}$, le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho) Du) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div} u) + \nabla P(\rho) = 0. \end{cases} \tag{II.21}$$

se réécrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho - 2\Delta\mu(\rho) + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \\ \rho\partial_t v + \rho u \cdot \nabla v - \mathrm{div}(\mu(\rho)\mathrm{curl} v) + \nabla P(\rho) = 0. \end{cases} \tag{II.22}$$

On rappelle ici que $\mathrm{curl} v = \nabla v -^t \nabla v$. Dans la suite on s'intéressera juste au cas de la viscosité $\mu(\rho) = \mu\rho^\alpha$ avec $\alpha > 1 - \frac{1}{N}$ afin de vérifier l'inégalité (2) correspondant à la condition de Lamé.

On va à présent reformuler le système (II.22) en fonction de $q = \rho - 1$, de la divergence $\mathrm{div} v$ et du rotationnel $\mathrm{curl} v$. On obtient alors le système suivant avec $F'(\rho) = \frac{P'(\rho)}{\rho}$:

$$\begin{cases} \partial_t q - 2\mu'(1+q)\Delta q - \mu''(1+q)|\nabla q|^2 + \mathrm{div}(qv) + \mathrm{div} v = 0, \\ \partial_t \mathrm{div} v + u \cdot \nabla \mathrm{div} v + \nabla v :^t \nabla u - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda(1+q)}{(1+q)^2}\nabla\rho \cdot \mathrm{divcurl} v \\ \qquad\qquad - R(\varphi, v) - \dfrac{1}{2}\nabla\nabla\varphi(1+q) : \mathrm{curl} v + \Delta F(1+q) = 0, \\ \partial_t \mathrm{curl} v + (u - \dfrac{1}{2}\nabla\varphi(1+q)) \cdot \nabla \mathrm{curl} v - \dfrac{\mu(1+q)}{1+q}\Delta \mathrm{curl} v + R_1 = 0, \end{cases} \tag{II.23}$$

et :

$$\begin{aligned} R(\rho, v) &= -\frac{1}{2}\partial_i\varphi(\rho)\partial_j(\mathrm{curl} v)_{ij}, \\ (R_1^i)_{ij} &= \sum_k (\partial_i u_k \partial_k v_j - \partial_j u_k \partial_k v_i) - \frac{1}{2}\frac{\lambda(\rho)}{\rho^2}\big(\sum_k (\partial_i\rho\partial_k(\mathrm{curl} v_{kj}) - \partial_j\rho\partial_k(\mathrm{curl} v_{ki})\big) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sum_k \big(\partial_{ik}\varphi(\rho)(\mathrm{curl} v)_{kj} - \partial_{kj}\varphi(\rho)(\mathrm{curl} v)_{ik}\big). \end{aligned}$$

On observe alors que le système (II.23) est parabolique pour la densité ρ et le rotationnel $\mathrm{curl} v$ alors qu'il est hyperbolique pour la divergence $\mathrm{div} v$. Ceci semble assez surprenant puisqu'en général on s'attend simplement pour les équations de Navier-Stokes compressibles à un comportement de type hyperbolique ou disons équation de transport pour la densité ρ (c'est le cas en particulier dans les théorèmes 3 et 4).

On montre ainsi dans [115] l'existence de solutions fortes en temps fini pour (II.22) faisant intervenir de nouveaux effets régularisants sur la densité ρ ce qui se traduit plus précisément par le résultat suivant.

Théorème 5. *Soit $N \geq 2$ et $1 \leq p < +\infty$. Soit $v_0 \in L^\infty \cap B_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}$, $q_0 \in B_{p,1}^{\frac{N}{p}}$ et $\rho_0 \geq c > 0$ alors il existe un temps $T > 0$ tel que le système (II.23) a une solution (q, v) avec :*

$$\begin{cases} v \in L_T^\infty(L^\infty), \ \mathrm{div} v \in \widetilde{C}_T(B_{p,1}^{\frac{N}{p}}), \\ \mathrm{curl} v \in \widetilde{C}_T(B_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \cap \widetilde{L}_T^1(B_{p,1}^{\frac{N}{p}+2}), \\ q \in \widetilde{C}_T(B_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \cap \widetilde{L}_T^1(B_{p,1}^{\frac{N}{p}+2}), \\ (\rho, \dfrac{1}{\rho}) \in L_T^\infty(L^\infty). \end{cases}$$

De plus si $p < 2N$ alors la solution est unique.

Remarque 6. *L'intérêt de ce résultat n'est donc pas d'affaiblir autant que faire se peut la régularité des données initiales mais plutôt d'exhiber de nouveaux effets régularisants de type paraboliques sur la densité ρ. En effet ceux ci sont fortement reliés à la structure particulière des coefficients de viscosité et la relation (6) qui permet de génèrer ces effets régularisants. On peut donc dire que ceux ci ont un aspect non linéaire. En effet de tels résultats n'existent pas par exemple dans le cadre de coefficients de viscosité constants.*

Remarque 7. *On remarque cependant que dans le cas particulier de $v_0 = 0$ c'est à dire $u_0 = -2\mu\nabla \ln \rho_0$ le théorème précédent généralise les résultats connus sur l'existence de solutions fortes en temps fini. En effet on a alors $u_0 \in B_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}$ et $q_0 \in B_{p,1}^{\frac{N}{p}}$ sans condition de type $p < 2N$ pour l'existence de solutions fortes comme c'est le cas dans [54, 106].*
D'autre part il est surprenant de remarquer que la densité ρ ainsi que la vitesse u admettent tous les deux des effets paraboliques ceci en combinant le résultat précédent et [54, 106].

On observe que la formulation (II.22) fait intervenir le curl$v$, il est alors intéressant de considérer le système (II.22) en une dimension d'espace puisque le curl$v$ est toujours nul dans ce cadre. On obtient alors le système suivant avec $v = u + \partial_x\varphi(\rho)$ et $\varphi'(\rho) = \frac{\mu(\rho)}{\rho^2}$ (voir [118]) :

$$\begin{cases} \partial_t\rho - 2\partial_{xx}\mu(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \rho\partial_t v + \rho u \partial_x v + \partial_x P(\rho) = 0, \end{cases} \tag{II.24}$$

et ceci sans aucune condition algébrique sur les coefficients de viscosité (comme c'est la cas pour la dimension $N \geq 2$). Cette formulation est vraie en particulier pour des coefficients de viscosité constants.
Il est alors intéressant de considérer le problème d'existence globale de solutions fortes pour des données initiales arbitrairement grandes. On obtient alors le résultat suivant pour l'équation de Shallow water visqueuse.

Théorème 6. *Supposons que $\mu(\rho) = \mu\rho$ et que les données initiales ρ_0 et u_0 vérifient :*

$$\begin{aligned} &0 < \alpha_0 \leq \rho_0(x) \leq \beta_0 < +\infty, \\ &\rho_0 - \bar{\rho} \in H^1(\mathbb{R}), \\ &u_0 \in H^1(\mathbb{R}), \\ &\partial_x\rho_0 \in L^\infty, \end{aligned} \tag{II.25}$$

pour des constantes α_0 et β_0. Supposons que $P(\rho) = a\rho^\gamma$ aver $\gamma \geq 2$. Alors il existe une unique solution globale (ρ, u) du système (II.1) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ telle que pour tout temps $T > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
&\rho - \bar{\rho} \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})),\\
&u \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T, H^2(\mathbb{R})),\\
&v \in L^\infty_T(L^\infty(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

De plus pour tout temps $T > 0$, il existe des constantes $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ telles que :

$$0 < \alpha(T) \leq \rho(t, x) \leq \beta(T) < +\infty \ \ \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}.$$

Remarque 8. *On rappelle que ce résultat a été prouvé par A. Mellet et A. Vasseur dans [171] pour le cas où $\mu(\rho)$ s'écrit $\mu(\rho) = \mu\rho^\alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. La difficulté majeure pour prouver ce genre de résultat correspond à contrôler le vide ou en d'autres termes estimer la norme de $\frac{1}{\rho}$ en norme $L^\infty_{t,x}$. Dans le cadre de [171], cela vient directement de la BD entropie qui offre un contrôle dans $L^\infty_t(L^2(\mathbb{R}))$ de $\partial_x \rho^{\alpha - \frac{1}{2}}$. On peut ainsi conclure en utilisant essentiellement des injections de Sobolev. Notre cadre est assez différent puisque la BD entropie a plutôt tendance à nous donner des informations sur la norme L^∞ de la densité ρ. Il s'agit donc d'estimer la norme L^∞ de $\frac{1}{\rho}$ d'une autre façon.*

Remarque 9. *Un autre intérêt de la nouvelle formulation (II.24) est lié au problème des théorèmes d'unicité fort-faible. En effet le problème reste ouvert lorsque les coefficients de viscosité dépendent de la densité ρ et ceci car on ne contrôle pas la norme L^∞ de $\frac{1}{\rho}$ avec (ρ, u) "la solution faible". Dans [116], on montre qu'en 1D on a des résultats d'unicité fort faible en employant la formulation (II.24). Ceci est essentiellement dû au fait que v vérifie une équation de type Euler compressible (il n'y a plus de tenseur de viscosité avec des coefficients dégénérés qui interviennent dans l'équation du moment), on peut alors utiliser une méthode de type entropie relative.*

Quelques éléments de preuve des théorèmes 5 et 6 : La preuve du théorème 5 est très classique et suit les idées développées dans [52, 27], on va donc plutôt passer à la preuve du théorème 6.
Pour ce faire on va rappeler un résultat d'existence en temps fini dû à V. A. Solonnikov.

Proposition 3. *([193]) Soit (ρ_0, u_0) vérifiant (II.25) et $\mu(\rho) = \mu\rho$ avec $\mu > 0$ alors il existe T_0 dépendant de $\alpha_0, \beta_0, \|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{H^1}$ et $\|u_0\|_{H^1}$ tel que (II.24) a une unique solution (ρ, u) sur $(0, T_0)$ satisfaisant :*

$$\begin{aligned}
&\rho - \bar{\rho} \in L^\infty(0, T_1, H^1(\mathbb{R})), \ \partial_t \rho \in L^2((0, T_1) \times \mathbb{R}),\\
&u \in L^2(0, T_1, H^2(\mathbb{R})), \ \partial_t u \in L^2((0, T_1) \times \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

pour tout $T_1 < T_0$.
De plus il existe des fonctions $\alpha > 0$ et $\beta < +\infty$ telles que $\alpha(t) \leq \rho(, x) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in (0, T_0)$.

Remarque 10. *Afin de prouver le théorème 6, il suffit donc de contrôler $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $\|\rho(T) - \bar{\rho}\|_{H^1}$ et $\|u(T)\|_{H^1}$ pour tout $T > 0$. En d'autres termes on souhaite vérifier que ces quantités n'explosent pas lorsque T tend vers T_0 (autrement dit que $\alpha(T)$ ne tend pas vers 0 et les autres quantités vers $+\infty$).Cela permettra ainsi de montrer que $T_0 = +\infty$ et donc de conclure à l'existence globale.*

On va essentiellement se concentrer sur l'estimation de $\frac{1}{\rho}$ en norme L^∞, en effet l'estimation de ρ en norme L^∞ s'obtient par injection de Sobolev via la BD entropie qui fournit une estimation de $\partial_x \sqrt{\rho}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}))$. Les autres estimations sur $\|\rho(T) - \bar{\rho}\|_{H^1}$ et $\|u(T)\|_{H^1}$ s'obtiennent en utilisant les effets paraboliques sur l'équation du moment et suivent les idées développées dans [171]. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 4. *Pour tout $T > 0$ il existe une constante $\alpha(T) > 0$ tel que pour tout $T < T_0$:*

$$\alpha(T) \leq \rho(t,x) \ \ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

Preuve : Puisque (ρ, u) est une solution régulière sur $(0, T_0)$ du système (II.21), (ρ, v) est également solution du système (II.24) sur $(0, T_0)$ avec :

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \mu \partial_{xx} \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \rho \partial_t v + \rho u \partial_x v + \partial_x P(\rho) = 0. \end{cases} \tag{II.26}$$

On souhaite donc estimer $\frac{1}{\rho}$ en norme $L^\infty_{t,x}$, il est alors alors naturel d'utiliser le principe du maximum sur la première équation de (II.26). Pour ce faire il suffit juste d'estimer la vitesse efficace v dans un bon espace de Lebesgue $L^p_T(L^q(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$.
On remarque alors que v vérifie quasiment une équation de transport ce qui suggère de contrôler v en norme $L^\infty_t(L^\infty)$. Puisque $P(\rho) = \rho^\gamma$ avec $\gamma \geq 2$ et $v = u + \mu \partial_x \ln \rho$ on a alors en utilisant la seconde équation de (II.26) :

$$\partial_t v + u \partial_x v + \frac{\gamma}{\mu} \rho^{\gamma-1} v = \frac{\gamma}{\mu} \rho^{\gamma-1} u.$$

On retrouve donc une équation de transport amortie avec un terme de reste $\frac{\gamma}{\mu}\rho^{\gamma-1}u$, on a alors pour tout $t \in (0, T_0)$:

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \lesssim \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \int_0^t \|\rho^{\gamma-1} u(s)\|_{L^\infty} ds.$$

On veut à présent montrer que le terme de droite est borné, pour ce faire on va montrer que ρu appartient à $L^2_T(L^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$. On a alors :

$$\partial_x(\rho u) = \sqrt{\rho}\sqrt{\rho}\partial_x u + 2\rho^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \rho^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon}} u \partial_x \sqrt{\rho},$$

cela implique alors que $\partial_x(\rho u)$ appartient à $L^2_T(L^2(\mathbb{R})) + L^\infty_T(L^p(\mathbb{R}))$ qui est inclus dans $L^2_T(L^2(\mathbb{R}) + L^p(\mathbb{R}))$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\varepsilon}$. En effet on a utilisé l'inégalité d'énergie, la BD entropie, le gain d'intégrabilité à la Mellet-Vasseur ([170]) et le fait que ρ appartiennent à $L^\infty_{t,x}$ qui assure que $\sqrt{\rho}\partial_x u$, $\partial_x \sqrt{\rho}$ et $\rho^{\frac{1}{2+\varepsilon}} u$ soient respectivement dans $L^2_T(L^2(\mathbb{R}))$, $L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}))$ et $L^\infty_T(L^{2+\varepsilon}(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$. On en déduit donc que $1_{\{|\xi| \geq 1\}} \mathcal{F}(\rho u)(\xi)$ appartient à $L^2_T(L^1(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$ et ceci en utilisant le théorème de Riesz-Thorin et l' inégalité de Hölder. D'autre part puisque ρu est dans $L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$ en utilisant le fait que $\rho \in L^\infty_T(L^\infty(\mathbb{R}))$ et $\sqrt{\rho} u \in L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$, on obtient que $1_{\{|\xi| \leq 1\}} \mathcal{F}(\rho u)(\xi)$ appartient à $L^2_T(L^1(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$. Cela nous permet de conclure que ρu appartient à $L^2_T(L^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$.
Si $\gamma \geq 2$, on en déduit donc que $\rho^{\gamma-1} u$ est dans $L^2_T(L^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$ et donc que v appartient à $L^\infty_T(L^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$. Il suffit alors d'utiliser le principe du maximum sur la première équation de (II.26) pour conclure que $\frac{1}{\rho}$ est dans $L^\infty_T(L^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$. ■

II.3 Solutions faibles globales pour Navier-Stokes compressible et la limite hautement compressible [109, 110, 119]

Dans [110, 109], on considère la limite hautement compressible des solutions faibles globales pour le système de Navier Stokes compressible, en d'autres termes on étudie la limite de ces solutions lorsque le nombre de Mach ε tends vers l'infini. Cela nous amène naturellement à introduire la notion de quasi-solution. Il s'agit en effet d'étudier les éventuelles solutions du modèle de Navier-Stokes compressible avec pression nulle :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho) D u) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div} u) = 0, \end{cases} \tag{II.27}$$

où μ et λ correspondent aux coefficients de viscosité et vérifient comme dans [21] la relation algébrique suivante :

$$\lambda(\rho) = 2\rho\mu'(\rho) - 2\mu(\rho). \tag{II.28}$$

En introduisant comme dans [115] la vitesse efficace $v = u + \nabla\varphi(\rho)$ avec $\varphi'(\rho) = \frac{2\mu'(\rho)}{\rho}$ le système (II.27) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho - 2\Delta\mu(\rho) + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \\ \rho\partial_t v + \rho u \cdot \nabla v - \mathrm{div}(\mu(\rho)\mathrm{curl} v) = 0, \\ (\rho(0,\cdot), v(0,\cdot)) = (\rho_0, v_0). \end{cases} \tag{II.29}$$

On va par conséquent chercher à montrer l'existence globale de solutions faibles pour les systèmes (II.27) et (II.29), mais avant cela on observe que l'on peut exhiber des solutions particulières des systèmes (II.27)-(II.29) de la forme $(\rho, u = -\nabla\varphi(\rho))$ (ce qui correspond à $v = 0$) où ρ vérifie l'équation :

$$\partial_t \rho - 2\Delta\mu(\rho) = 0. \tag{II.30}$$

On observe en particulier que lorsque $\mu(\rho) = \rho^\alpha$ alors l'équation (II.30) correspond à :
- pour $\alpha > 1$ à l'équation des milieux poreux,
- pour $\alpha = 1$ à l'équation de la chaleur,
- pour $\alpha < 1$ à l'équation à diffusion rapide.

On rappelle que ces équations ont des comportements très différents si l'on considère la vitesse de propagation de la densité ρ. En effet pour l'équation des milieux poreux on rappelle que le support de la donnée initiale se propage à vitesse finie, en d'autres termes si la donnée initiale est à support compact la solution associée (mentionnons en effet que l'on a une théorie L^1 de solutions fortes globales pour toutes ses équations, voir [203, 204]) reste à support compact tout au long du temps. Pour l'équation de la chaleur ainsi que les équations à diffusion rapide la donne est radicalement différente puisque la vitesse de propagation est infinie, ainsi on peut exprimer explicitement la solution associée à une masse de Dirac (les "Barrenblatt") et vérifier que son support en temps arbitrairement petit recouvre l'espace entier. Enfin lorsque α appartient à l'intervalle $(0, m_c)$ avec $m_c = \max(0, \frac{N-2}{N})$ il peut même apparaître des phénomènes d'extinction en temps fini. Un exemple typique (voir [203]) correspond au choix suivant :

$$\rho(t,x) = c_\alpha \Big(\frac{T-t}{|x|^2}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

avec $c_\alpha^{1-\alpha} = 2(N - \frac{2}{1-\alpha})$. Ce ne sera jamais le cas dans notre configuration puisque la relation (2) combinée avec notre choix de coefficients de viscosité (II.28) impose que $\alpha > m_c$.

Équations des milieux poreux et équations à diffusion rapide

On va ici faire quelques rappels succincts sur les équations des milieux poreux et les équations à diffusion rapide. Il existe une théorie de solutions fortes globales pour des données initiales $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, celle-ci repose en particulier sur le principe du maximum (voir [203]). M. Pierre dans [179] a même étendu le cadre de la théorie au cas de données initiales des mesures de Radon bornées ce qui englobe en particulier le cas des masses de Dirac correspondant aux fameuses

"Barrenblatt".
Une propriété essentielle des équations (II.30) est leur invariance d'échelle, on peut ainsi introduire la notion d'autosimilarité. Cela correspond à chercher des solutions sous la forme suivante $\rho(t,x) = t^{-\gamma}F(\frac{x}{t^\beta})$, avec γ et β à déterminer. Dans notre cadre γ et β vérifient : $\gamma(\alpha-1)+2\beta = 1$, et F est alors solution de l'équation suivante :

$$\Delta F^\alpha + \beta\eta\cdot\nabla F + \gamma F = 0.$$

En particulier il existe des solutions autosimilaires avec donnée initiale la masse de Dirac et telle que pour tout $t > 0$ la solution ait une masse constante en norme L^1. Ce sont les fameuses solutions de Barrenblatt (on prend ici $\alpha > 1$) que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$U_m(t,x) = t^{-\gamma_1}F(\frac{x}{t^\beta}) \ \text{ avec } \ F(x) = (C - \frac{(\alpha-1)\gamma_1}{2\alpha}|x|^2)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}, \tag{II.31}$$

et $C > 0$ avec $\gamma_1 = \frac{N}{N(\alpha-1)+2}$, $\beta = \frac{1}{N(\alpha-1)+2}$. On a donc ici la conservation de la masse $\int U_m(t,x)dx = m$ pour tout t avec m dépendant de la donnée initiale correspondant à la masse de Dirac suivante $m\delta_0$. De manière similaire lorsque $m_c < \alpha < 1$ avec $m_c = \max(0, \frac{N-2}{N})$ il existe aussi des solutions de Barrenblatt définies comme ceci :

$$U_m(t,x) = t^{-\gamma_1}F(xt^{-\beta}) \ \text{ avec } \ F(x) = (C + \kappa_1|x|^2)_+^{\frac{-1}{\alpha-1}},$$

et $\kappa_1 = \frac{(1-\alpha)\gamma_1}{2N\alpha}$. On rappelle également que les solutions faibles globales avec donnée initiale L^1 converge asymptotiquement en temps vers une solution de Barrenblatt déterminée par sa masse $m = \|\rho_0\|_{L^1}$ (voir A. Friedman et S. Kamin [83], J.-L. Vázquez et S. Kamin [141, 142] et J. Dolbeault et M. Del Pino [73]). Comme nous le mentionnions précédemment lorsque α est dans l'intervalle $(0, m_c)$ avec $m_c = \max(0, \frac{N-2}{N})$ on a pas nécessairement conservation de la norme L^1 ce qui peut même engendrer l'extinction de la solution (voir [204, 203]). On réfère à [203, 204] pour une condition nécessaire d'extinction, la donnée initiale doit être dans des espaces de Marcinkewitz appropriés $M_{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 11. *On peut également observer que comme pour les milieux poreux les équations de Navier-Stokes compressibles admettent une invariance par échelle. En effet si (ρ,u) est une solution de (II.21) alors pour tout $\lambda > 0$:*

$$\rho_\lambda(t,x) = \lambda^\alpha\rho(\lambda t, \lambda^\beta x) \ \text{ et } \ u_\lambda(t,x) = \lambda^{\alpha_1}u(\lambda t, \lambda^\beta x),$$

est une solution de (II.1) avec $\alpha_1 + \beta = 1$, $(\lambda-1)\alpha + 2\beta = 1$, $\alpha(\gamma-1)+\beta = \alpha_1 + 1$ et $f = 0$. Cela implique que :

$$\alpha = \frac{-1}{\lambda-\gamma}, \ \alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2(\lambda-\gamma)} \ \text{ et } \ \beta = \frac{2\lambda-\gamma-1}{2(\lambda-\gamma)}.$$

On réfère à [110] pour plus de détails.

On va maintenant énoncer un premier résultat qui exprime le fait que l'on a des solutions particulières pour le système (II.41) qui correspond à des quasi-solutions lorsque $v_0 = 0$. Cela correspond à une donnée initiale $u_0 = -\nabla\varphi(\rho_0)$ (voir [203] pour plus de détails).

Théorème 7. *Soit $\mu(\rho) = \mu\rho^\alpha$ avec $\alpha \geq 1 - \frac{1}{N}$ et $\lambda(\rho)$ vérifiant la relation (II.28).*
Soit $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ avec $\rho_0 > 0$ continue et $u_0 = -\nabla\varphi(\rho_0)$. Alors il existe une solution globale au sens classique pour le système (II.27) de la forme $(\rho, u = -\nabla\varphi(\rho))$ avec (ρ,u) appartenant à $C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)\cap C([0,+\infty]\times\mathbb{R}^N)$ et solution du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\rho - 2\Delta\mu(\rho) = 0, \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0. \end{cases} \tag{II.32}$$

De plus on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \|\rho(t) - U_m(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0 \ \ et \ \ \lim_{t\to+\infty} t^{\beta}\|\rho(t) - U_m(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0, \tag{II.33}$$

avec $\beta = \frac{N}{N(\alpha-1)+2}$ *et* U_m *la Barrenblatt de masse* $m = \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$*. Pour tout* $p \in (1, +\infty)$ *on a le gain d'intégrabilité suivant,* $\rho(t,\cdot)$*appartient à* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *et :*

$$\|\rho(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\sigma_p}\|\rho_0\|^{\alpha_p}_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

avec $\sigma_p = \frac{N(\alpha-1)+2p}{(N(\alpha-1)+2)p}$ *et* $\alpha_p = \frac{N(p-1)}{(N(\alpha-1)+2)p}$.

On va à présent montrer la stabilité des quasi solutions faibles au sens des distributions. Pour ce faire il est important d'observer que l'on conserve les trois inégalités d'énergie suivantes (à savoir l'estimation d'énergie, la BD entropie et le gain d'intégrabilité à la Mellet-Vasseur) pour toute solution "régulière " (on peut penser ici à des solutions approchées via une méthode de type Galerkin) du système (II.27).

Proposition 5. *Soit* (ρ, u) *une solution "régulière" du système (II.27) alors pour tout* $t > 0$ *on a les deux entropies suivantes :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\rho|u|^2(t,x)\,dx + \int_0^t\int_\Omega 2\mu(\rho)|Du|^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega \lambda(\rho)|\mathrm{div}u|^2 dxdt& \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0|u_0|^2(x)\,dx.& \end{aligned} \tag{II.34}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\rho|v|^2(t,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} \mu(\rho)|\nabla u -^t \nabla u|^2 dxdt& \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\rho_0|v_0|^2(x)\,dx.& \end{aligned} \tag{II.35}$$

Supposons en plus que :

$$2\mu(\rho) + N\lambda(\rho) \geq \nu\lambda(\rho)$$

pour un certain $\nu \in (0,1)$*. Il existe alors* $C > 0$ *tel que les solutions "régulières" de (II.27) vérifient :*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} \rho\frac{1+|u|^2}{2}\ln(1+|u|^2)dx + \frac{\nu}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \mu(\rho)[1+\ln(1+|u|^2)|Du|^2 dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} \mu(\rho)|\nabla u|^2 dx, \tag{II.36}$$

avec $|\nabla u|^2 = \sum_i\sum_j |\partial_i u_j|^2$.

Remarque 12. *La BD entropie nous fournit donc une estimation de type* H^1 *sur la densité* ρ *puisque l'on a un contrôle de* $\sqrt{\rho}\nabla\varphi(\rho)$ *dans* $L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}^N))$ *pour tout* $T > 0$.

On peut à présent définir la notion de quasi-solution au sens des distributions.

Définition 5. *On suppose ici que* μ *et* λ *vérifient la condition (II.28). On dit que* (ρ, u) *est une quasi-solution faible globale* (ρ, u) *si elle vérifie au sens des distributions :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho)\,\mathrm{Du}) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{divu}) = 0, \\ (\rho, u)_{\ t=0} = (\rho_0, u_0). \end{cases} \tag{II.37}$$

Plus précisément (ρ,u) est solution faible de (II.27) sur $[0,T]\times\mathbb{R}^N$ pour tout $T>0$ avec :

$$\rho_{/t=0}=\rho_0\geq 0,\ \ \rho u_{/t=0}=m_0, \tag{II.38}$$

$$\begin{aligned}&\rho_0\in L^1(\mathbb{R}^N),\ \sqrt{\rho_0}\nabla\varphi(\rho_0)\in L^2(\mathbb{R}^N),\ \rho_0\geq 0,\\ &\sqrt{\rho_0}|u_0|(1+\sqrt{\ln(1+|u_0|^2)})\in L^2(\mathbb{R}^N),\end{aligned} \tag{II.39}$$

si

- $\rho\in L^\infty_T(L^1(\mathbb{R}^N))$, $\sqrt{\rho}\nabla\varphi(\rho)\in L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}^N))$, $\sqrt{\rho}u\in L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}^N))$,
- $\sqrt{\mu(\rho)}\,\nabla u\in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)$, $\sqrt{\rho}|u|\sqrt{\ln(1+|u|^2)}\in L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}^N))$,

avec $\rho\geq 0$ et $(\rho,\sqrt{\rho}u)$ satisfait au sens des distributions sur $[0,T]\times\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\mathrm{div}(\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}u)=0,\\ \rho(0,x)=\rho_0(x),\end{cases}$$

et si l'égalité suivante a lieu pour tout $\varphi(t,x)$ fonction test régulière à support compact telle que $\varphi(T,\cdot)=0$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(\rho u)_0\cdot\varphi(0,\cdot)dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}&\sqrt{\rho}(\sqrt{\rho}u)\partial_t\varphi+\sqrt{\rho}u\otimes\sqrt{\rho}u:\nabla\varphi dx\\ &-<2\mu(\rho)\,Du,\nabla\varphi>-<\lambda(\rho)\,\mathrm{div}u,\mathrm{div}\varphi>=0;\end{aligned} \tag{II.40}$$

où les termes de diffusion ont le sens suivant avec pour inconnues $\sqrt{\rho}$ et $\sqrt{\rho}u$:

$$\begin{aligned}<2\mu(\rho)\,Du,\nabla\varphi>=&-\int\frac{\mu(\rho)}{\sqrt{\rho}}(\sqrt{\rho}u_j)\partial_{ii}\varphi_j dx\,dt-\int 2(\sqrt{\rho}u_j)\mu'(\rho)\partial_i\sqrt{\rho}\partial_i\varphi_j dx\,dt\\ &-\int\frac{\mu(\rho)}{\sqrt{\rho}}(\sqrt{\rho}u_j)\partial_{ji}\varphi_j dx\,dt-\int 2(\sqrt{\rho}u_i)\mu'(\rho)\partial_j\sqrt{\rho}\partial_i\varphi_j dx\,dt\\ <\lambda(\rho)\,\mathrm{div}u,\mathrm{div}\varphi>=&-\int\frac{\lambda(\rho)}{\sqrt{\rho}}(\sqrt{\rho}u_i)\partial_{ji}\varphi_j dx\,dt-\int 2(\sqrt{\rho}u_i)\lambda'(\rho)\partial_i\sqrt{\rho}\partial_j\varphi_j dx\,dt.\end{aligned}$$

Dans [110], on obtient donc la stabilité des solutions faibles globales pour le système (II.41) avec existence globale lorsque la donnée initiale est de la forme $(\rho_0,u_0=-\nabla\varphi(\rho_0))$. La solution s'écrit salors sous la forme $(\rho,-\nabla\varphi(\rho))$ avec la densité ρ vérifiant (II.30). De plus on étudie le comportement hautement compressible des équations de Navier-Stokes compressibles dans le cadre des solutions faibles globales du problème suivant :

$$\begin{cases}\partial_t\rho_\varepsilon+\mathrm{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon)=0,\\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon)+\mathrm{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon\otimes u_\varepsilon)-\mathrm{div}(2\mu(\rho_\varepsilon)Du_\varepsilon)-\nabla(\lambda(\rho_\varepsilon)\mathrm{div}u_\varepsilon)+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\nabla P(\rho_\varepsilon)=0,\\ (\rho_\varepsilon,u_\varepsilon)_{t=0}=(\rho_0,u_0),\end{cases} \tag{II.41}$$

avec ε le nombre de Mach tendant vers l'infini. Plus précisément on observe que $(\rho_\varepsilon,u_\varepsilon)$ converge au sens des distributions vers (ρ,u) quasi-solution de (II.30) avec donnée initiale (ρ_0,u_0). On obtient ainsi le résultat suivant (voir [110]).

Théorème 8. *Soit $N\geq 2$, $1<\gamma<p$ avec $p=+\infty$ si $N=2$ et $p=3$ si $N=3$ et $\mu(\rho)=\rho^\alpha$ avec $\alpha>1-\frac{1}{N}$ (les coefficients de viscosité vérifient (II.28)). Supposons qu'il existe une suite (ρ_n,u_n) de quasi-solutions du système (II.27) satisfaisant uniformément en n les estimations d'énergie de la proposition 5 avec les données initiales suivantes telles que :*

$$\rho_0^n\geq 0,\ \ \rho_0^n\to\rho_0\ \ in\ L^1(\mathbb{R}^N),\ \ \rho_0^n u_0^n\to\rho_0u_0\ \ in\ L^1(\mathbb{R}^N), \tag{II.42}$$

et :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_0^n (1+\frac{|u_0^n|^2}{2}) < C,\ \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{\rho_0^n} |\nabla\varphi(\rho_0^n)|^2 dx < C \ \ et \ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0^n \frac{1+|u_0^n|^2}{2} \ln(1+|u_0^n|^2) dx < C, \tag{II.43}$$

(C est une constante indépendante de n). Alors à une sous-suite près, $(\rho_n, \sqrt{\rho_n} u_n)$ converge fortement vers une quasi-solution faible $(\rho, \sqrt{\rho} u)$ de (II.27) satisfaisant les estimations de la proposition 5. De plus lorsque $v_0 = 0$ on a existence de quasi-solution faible globale au sens de la définition 5 et unicité avec ρ solution de l'équation (II.30).
Supposons qu'il existe des solutions faibles $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ vérifiant la définition de [170] du système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \mathrm{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho_\varepsilon u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon) - \mathrm{div}(2\mu(\rho_\varepsilon) D(u_\varepsilon)) - \nabla(\lambda(\rho_\varepsilon)\mathrm{div} u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \rho_\varepsilon^\gamma = 0, \\ (\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)_{/t=0} = (\rho_0, u_0). \end{cases} \tag{II.44}$$

alors $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ converge au sens des distributions vers une quasi-solution (ρ, u) avec donnée initiale (ρ_0, u_0) lorsque ε tends vers l'infini (et ceci à une sous suite près).
Si de plus $\rho_0 = -\nabla\varphi(\rho_0)$ alors la densité limite ρ est solution de (II.30).

Remarque 13. *Rappelons que l'existence de solutions faibles globales pour le système (II.44) reste un problème ouvert. Cependant le cas du système de Shallow water visqueux $\alpha = 1$ a été résolu récemment par A. Vasseur et C. Yu dans [202]. On peut alors espérer que ce résultat se généralise à toutes les viscosités vérifiant la relation (II.28) et la relation de Lamé (2) ce qui donnerait corps à l'existence de solutions faibles globales $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$.*

Remarque 14. *Mentionnons qu'à notre connaissance, il n'existe pas d'autres résultats sur la limite hautement compressible pour les équations de Navier-Stokes et ceci quel que soit le choix des coefficients de viscosité. Cela s'explique par le fait que lorsque le nombre de Mach tends vers l'infini on perd à priori toutes les estimations sur la densité si ce n'est la conservation de la masse (c'est à dire la norme L^1 de ρ^ε qui reste bornée uniformément en ε). Dans le cas des coefficients de viscosité de type Bresch-Desjardins on tire partie de la BD entropie qui nous offre une contribution additionnelle sur la densité, ce qui permet en particulier d'avoir assez de compacité pour considérer un passage à la limite.*

Remarque 15. *Lorsque $u_0 = -\nabla\varphi(\rho_0)$ et $\alpha > 1$, la densité ρ^ε converge vers une solution ρ des milieux poreux. Si l'on suppose en plus que ρ_0 est à support compact alors $\rho(t,\cdot)$ reste à support compact pour tout $t > 0$. On a donc $\rho^\varepsilon(t,\cdot) = \rho(t,\cdot) + f^\varepsilon(t,\cdot)$ avec $f^\varepsilon(t,\cdot) = \rho^\varepsilon(t,\cdot) - \rho(t,\cdot)$, on peut penser au moins heuristiquement que la masse de $f^\varepsilon(t,\cdot)$ c'est à dire la norme $\|f^\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1}$ est petite en fonction de ε (ce serait le cas si on avait une convergence forte dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^N))$. Cela signifierait que $\rho^\varepsilon(t,\cdot)$ est essentiellement supportée dans un compact pour tout $t > 0$ modulo une "petite" partie de la masse qui pourrait fuir à l'infini. C'est exactement ce que l'on va montrer dans le cas 1D dans [119].*

Remarque 16. *Rappelons que le résultat précédent assure simplement la stabilité des quasi solutions, en effet on montre l'existence de solutions faibles globales seulement dans le cas de données initiales de type $u_0 = -\nabla\varphi(\rho_0)$. Il n'est à priori pas simple de construire en général une suite de solutions approchées globales du système (II.27) qui vérifient uniformément les différentes entropies de la proposition 5. Ce problème a été récemment résolu par A. Vasseur et C. Yu dans [202] dans le cadre du système de Shallow-water visqueux (c'est à dire Navier Stokes compressible pour $\mu(\rho) = \mu\rho$ et $\lambda(\rho) = 0$), nous croyons que ces idées pourraient s'appliquer au cadre des quasi solutions et ainsi fournir l'existence de quasi solutions faibles globales.*

Quelques éléments de preuve du théorème 8 : Commençons par montrer la stabilité des quasi solutions faibles globales, pour cela supposons qu'il existe une suite $(\rho_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions faibles globales dont les données initiales vérifient (II.42) et (II.43). Grâce à la proposition 5 on déduit que $\sqrt{\rho_n}u_n$, $\sqrt{\rho_n}\nabla(\varphi(\rho_n))$ et $\sqrt{\rho_n}u_n\ln(1+|u_n|^2)$ sont uniformément bornés dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N))$ ainsi que $\sqrt{\rho_n}\nabla u_n$ dans $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N))$. Enfin via la conservation de la masse on obtient que ρ_n est également uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^N))$.
Cela permet en particulier dans le cas simple $\alpha = 1$ d'avoir un contrôle uniforme de $\sqrt{\rho_n}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^N))$. Via le théorème d'Aubin-Lions on peut alors montrer que $\sqrt{\rho_n}$ converge fortement à une sous suite près dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N)$ vers une limite $\sqrt{\rho}$ avec $\sqrt{\rho}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^N))$. Il reste à traiter les autres termes, on observe au moins pour le cas simple $\alpha = 1$ que $\nabla(\rho_n u_n) = \sqrt{\rho_n}\sqrt{\rho_n}\nabla u_n + \sqrt{\rho_n}u_n\nabla\sqrt{\rho_n}$ est uniformément borné dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^N))$ ceci via les estimations d'énergie uniformes sur ρ_n et u_n. On obtient via le théorème d'Aubin-Lions que $\rho_n u_n$ converge presque partout à extraction près vers une limite ρu. Cela nous permet de définir u sur l'ensemble $\{\rho \neq 0\}$ et de poser $u = 0$ sur l'ensemble $\{\rho = 0\}$. On montre ensuite que $\sqrt{\rho_n}u_n$ converge fortement vers $\sqrt{\rho}u$ en utilisant le gain d'intégrabilité sur u_n (c'est à dire $\sqrt{\rho_n}u_n\ln(1+|u_n|^2)$ uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N)))$ et le théorème de la Vallée Poussin. Cela conclut la stabilité des quasi solutions faibles globales.
On va maintenant considérer la limite hautement compressible pour le système (II.44) lorsque ε tends vers $+\infty$. Supposons qu'il existe une suite de solutions faibles globales $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\varepsilon>1}$ du système (II.44) au sens de la définition introduite dans [170] (voir aussi [202]) avec pour donnée initiale (ρ_0, u_0) ; alors on va montrer que $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)_{\varepsilon>1}$ converge au sens des distributions vers (ρ, u) une quasi solution avec donnée initiale (ρ_0, u_0) et ceci au moins à une sous-suite près. On peut observer qu'en adaptant la proposition 5 on obtient les mêmes estimations uniformes sur $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$, il s'agit donc essentiellement d'utiliser les mêmes arguments de compacité que pour la preuve de la stabilité des quasi-solutions. Il y a juste le terme $\frac{1}{\varepsilon^2}P(\rho_\varepsilon)$ à traiter, mais puisque (au moins pour $\gamma = 1$) $\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}$ est uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N))$ on déduit par injection de Sobolev que $P(\rho_\varepsilon)$ est uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^N))$ pour des γ pas trop grand, ce qui permet d'assurer que $\frac{1}{\varepsilon^2}\nabla P(\rho_\varepsilon)$ converge vers 0 au sens des distributions lorsque ε converge vers $+\infty$.
Observons maintenant que lorsque $u_0 = -\nabla\varphi(\rho_0)$, cela implique que $v_0 = 0$ et donc en utilisant (II.34) la BD entropie on déduit que $\sqrt{\rho_\varepsilon}v_\varepsilon$ converge fortement vers 0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N))$. Puisque $\sqrt{\rho_\varepsilon}$ est uniformément borné dans $L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}^N))$ on en déduit que $\rho_\varepsilon v_\varepsilon$ converge au sens des distributions vers 0. Si l'on considère maintenant la première équation de (II.29) cela implique que ρ vérifie l'équation II.30 :

$$\partial_t\rho - 2\mu\Delta\rho^\alpha = 0,$$

et ceci car on peut montrer que ρ_ε^α converge vers ρ^α au sens des distributions au moins à une sous suite près. Par unicité de la solution de II.30, cela conclut la preuve du théorème. ■

Dans [119] en collaboration avec Ewelina Zatorska on s'est intéressé à améliorer les résultats précédents dans le cadre monodimensionnel, en effet on obtient une estimation précise sur le taux de convergence de ρ_ε vers ρ en norme $L^\infty_T(L^2(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$. Ceci nous permet ainsi dans le cadre $\alpha > 1$ (milieux poreux) d'évaluer de manière précise la norme $\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)1_{^c\mathrm{supp}\widetilde{\rho}(t,\cdot)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$ lorsque ρ_0 est à support compact. En effet on sait alors que la solution limite $\widetilde{\rho}$ solution des milieux poreux est à support compact tout au long du temps, il est alors naturel de comprendre et d'estimer pour ρ^ε le poids de la masse "qui fuit à l'infini". On montre alors que celui-ci a tendance à être très petit en fonction de $\frac{1}{\varepsilon}$ lorsque ε est grand.

Théorème 9. *Soit $\gamma > 1$, $\alpha > 1$ et $N = 1$. De plus supposons que la donnée initiale (ρ_0, u_0) vérifie (II.39) avec :*

$$u_0 = -\sqrt{\rho_0}\partial_x\varphi(\rho_0). \tag{II.45}$$

Le système (II.44) admet une solution faible globale $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ au sens de la définition 5. De plus, ρ_ε converge fortement vers $\widetilde{\rho}$ solution forte de l'équation des milieux poreux suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\rho} - \dfrac{1}{\alpha}\partial_{xx}\widetilde{\rho}^\alpha = 0, \\ \widetilde{\rho}(0,x) = \rho_0(x), \end{cases} \tag{II.46}$$

au sens suivant, il existe une constante $C > 0$ dépendant de ρ_0 telle que :

$$\|(\rho - \rho_\varepsilon)(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}. \tag{II.47}$$

De plus lorsque $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ il existe $C > 0$ dépendant de ρ_0 tel que :

$$\|(\rho_\varepsilon - \widetilde{\rho})(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}}(1 + t^{\frac{1}{4}} 1_{t\geq 1}), \tag{II.48}$$

pour tout $t \geq 0$. Si l'on suppose en plus que ρ_0 est à support compact, et soient $-\infty < a < b < +\infty$ tels que :

$$\text{supp}[\rho_0] \subset [a, b],$$

alors il existe $C > 0$ et $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$ tels que :

$$\Omega_t := \text{supp}[\widetilde{\rho}(t,\cdot)] \subset [a_1 - Ct^{\frac{1}{\alpha+1}}, b_1 + Ct^{\frac{1}{\alpha+1}}]. \tag{II.49}$$

De plus il existe $C > 0$ dépendant seulement de ρ_0 tel que :

$$\|\rho_\varepsilon(t) 1_{\Omega_t^c}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}}(t^{\frac{1}{4}} 1_{t\geq 1} + 1)(1 + t^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}), \tag{II.50}$$

où Ω_t^c dénote le complémentaire de Ω_t.

Remarque 17. *Mentionnons que l'existence de solutions faibles globales pour le système (II.44) en une dimension a été obtenue par Q. Jiu et Z. Xin dans [138].*

Remarque 18. *Le théorème 9 fournit donc un taux de convergence vers 0 de $(\rho_\varepsilon - \widetilde{\rho})$ et étend par conséquent les résultats du théorème 8 pour le cadre $N = 1$. Le théorème précédent implique donc que la masse distribuée hors de Ω_t le support de la solution des milieux poreux correspondante est petite et d'ordre $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$. L'évolution du support Ω_t est bien connue puisque les interfaces sont gouvernées par les lois de Darcy (voir [203]). Cependant il n'est pas clair que ρ_ε soit également solution d'un problème à frontières libres. Il n'y a à priori pas de raison pour que* supp$\rho_\varepsilon(t,\cdot)$*soit compact pour tout $t > 0$. Cependant la masse en dehors de Ω_t reste petite en fonction de ε (elle augmente par contre en fonction des temps grands). On peut donc dire que $\widetilde{\rho}(t,\cdot)$ est une bonne approximation de $\rho_\varepsilon(t,\cdot)$ (au moins pour tout $t \leq \max(1, c(\varepsilon)^{-\frac{1}{1+\frac{2}{1+\alpha}}})$ avec c petit) et on peut parler de "vitesse de propagation presque finie".*

Quelques éléments de preuve du théorème 9 : On rappelle que la première équation de (II.29) s'écrit :

$$\partial_t \rho_\varepsilon - \frac{1}{\alpha}\partial_{xx}\rho_\varepsilon^\alpha + \partial_x(\rho_\varepsilon v_\varepsilon) = 0, \tag{II.51}$$

et est satisfaite au sens des distributions. La BD entropie implique que :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\sqrt{\rho_\varepsilon} v_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\varepsilon(\gamma-1)^{\frac{1}{2}}}\|\rho_0\|_{L^\gamma(\mathbb{R})}^{\frac{\gamma}{2}} \leq \frac{C}{\varepsilon}. \tag{II.52}$$

On pose ensuite $R_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \widetilde{\rho}$ (avec $\widetilde{\rho}$ solution de l'équation des milieux poreux), il découle alors via (II.51) que R_ε satisfait l'équation suivante au sens des distributions :

$$\begin{cases} \partial_t R_\varepsilon - \dfrac{1}{\alpha}\partial_{xx}(\rho_\varepsilon^\alpha - \widetilde{\rho}^\alpha) + \partial_x(\rho_\varepsilon v_\varepsilon) = 0, \\ R_\varepsilon(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{II.53}$$

On va utiliser une méthode de dualité développée en particulier par J.-L. Vázquez ([203] section 6.2.1). On va tester (II.53) par $\psi \in C_c^\infty((0,T]\times\mathbb{R})$, on obtient alors :

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\big(R_\varepsilon\partial_t\psi+\frac{1}{\alpha}(\rho_\varepsilon^\alpha-\widetilde{\rho}^\alpha)\Delta\psi\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(\rho_\varepsilon v_\varepsilon)\partial_x\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_{\mathbb{R}}(R_\varepsilon\psi)(T)\,\mathrm{d}x=0. \tag{II.54}$$

On pose maintenant :

$$a(t,x)=\begin{cases}\frac{\rho_\varepsilon^\alpha-\widetilde{\rho}^\alpha}{\rho_\varepsilon-\widetilde{\rho}} & \text{if}\quad \rho_\varepsilon\neq\widetilde{\rho}\\ 0 & \text{if}\quad \rho_\varepsilon=\widetilde{\rho},\end{cases}$$

on peut alors réécrire (II.54) comme ceci :

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\big(R_\varepsilon(\partial_t\psi+\frac{1}{\alpha}a\Delta\psi\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(\rho_\varepsilon v_\varepsilon)\partial_x\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_{\mathbb{R}}(R_\varepsilon\psi)(T)\,\mathrm{d}x=0. \tag{II.55}$$

On va ensuite résoudre le problème rétrograde suivant avec $M>0$:

$$\begin{cases}\partial_t\psi+\dfrac{1}{\alpha}a_n\Delta\psi=0, \quad (t,x)\in[0,T]\ \times\ (-M,M),\\ \psi(t,-M)=\psi(t,M)=0, \quad t\in[0,T],\\ \psi(T,x)=\theta(x), \quad x\in(-M,M),\end{cases} \tag{II.56}$$

où $\theta\in C_0^\infty((-M,M))$ et a_n est une approximation régulière de a telle que $0<\eta\le a_n\le K<+\infty$. Le système précédent (II.56) est alors parabolique et admet une unique solution ψ sur $[0,T]$. De (II.55) on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}}R_\varepsilon(T)\theta\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}R_\varepsilon(a-a_n)\Delta\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(\rho_\varepsilon v_\varepsilon)\partial_x\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{II.57}$$

et :

$$\left|\int_{\mathbb{R}}R_\varepsilon(T)\theta\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(\rho_\varepsilon v_\varepsilon)\partial_x\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|R_\varepsilon|\,|(a-a_n)|\,|\partial_{xx}\psi|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{II.58}$$

On a besoin d'informations sur ψ et on peut montrer par des estimations d'énergie que :

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(\partial_x\psi)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\alpha}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}a_n(\Delta\psi)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le c\|\partial_x\theta\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{II.59}$$

En utilisant l'inégalité précédente, (II.58) et le fait que $\operatorname{supp}\psi$ et $\operatorname{supp}\theta$ sont inclus respectivement dans $[0,T]\times[-M,M]$ et $[-M,M]$, on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}}R_\varepsilon(T)\theta\,\mathrm{d}x\right|\le c\|\partial_x\theta\|_{L^2(\mathbb{R})}\left(\left(\int_0^T\int_{-M}^M\frac{[a-a_n|^2}{a_n}|R_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+\|\rho_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))}\right). \tag{II.60}$$

Suivant J.-L. Vázquez dans [203], via une suite d'approximation de a_n on peut montrer que $\forall\eta>0$ il existe a_n tel que :

$$\int_0^T\int_{-M}^M\frac{|a-a_n|^2}{a_n}|R_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le 8\eta. \tag{II.61}$$

Cela donne donc dans (II.60) :

$$\left|\int_{\mathbb{R}}R_\varepsilon(T)\theta\,\mathrm{d}x\right|\le C\|\partial_x\theta\|_{L^2(\mathbb{R})}\big(\eta+T^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho_\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}))}\|\sqrt{\rho_\varepsilon}v_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))}\big). \tag{II.62}$$

On a alors :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} R_\varepsilon(T)\theta \,\mathrm{d}x\right| \leq C\|\partial_x\theta\|_{L^2(\mathbb{R})}\frac{\|\rho_0\|_{L^\gamma}^{\frac{\gamma}{2}}}{\gamma-1}\varepsilon^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho_\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}))} \tag{II.63}$$
$$\leq C\|\partial_x\theta\|_{L^2(\mathbb{R})}\varepsilon^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}.$$

Par dualité on en déduit que :

$$\|R_\varepsilon(T)\|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}, \tag{II.64}$$

pour tout $T > 0$. On montre ensuite facilement en utilisant les estimations d'énergie que R_ε est uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}))$, on déduit donc par interpolation que :

$$\|R_\varepsilon(T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}}(1_{T\leq 1} + T^{\frac{1}{4}}1_{T\geq 1}). \tag{II.65}$$

Cela montre donc l'inégalité (II.48). On va maintenant s'intéresser à montrer (II.50) lorsque la densité initiale ρ_0 est à support compact. Sous ces hypothèses on sait que supp $\widetilde{\rho}(t,\cdot)$ reste à support compact pour tout $t > 0$ et satisfait (II.49). En effet puisque suppρ_0 est inclu dans $[a,b]$, on peut considérer une Barrenblatt $U(t_1, M)$ telle que pour un certain temps $t_1 > 0$ on a :

$$\|\rho_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|U(t_1, M)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

La dernière inégalité est vraie si M est assez grand avec M dépendant de $\|\rho_0\|_{L^\infty}$ et de $\frac{1}{t_1}$ (voir la formule (II.31)). On peut maintenant utiliser le principe du maximum pour les équations des milieux poreux ce qui implique que :

$$\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|U(t_1 + t, M)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Cela sous-tend en particulier que supp$\widetilde{\rho}(t,\cdot)$ est inclu dans $[a_1 - C(t+t_1)^{\frac{1}{\alpha+1}}, b_1 + C(t+t_1)^{\frac{1}{\alpha+1}}]$ pour certaines constantes $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$ et $C > 0$. On a maintenant :

$$\begin{aligned}
\|\rho_\varepsilon(t)1_{\Omega_t^c}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R})} - \|\rho_\varepsilon(t)1_{\Omega_t}\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{(via la conservation de la masse)}\\
&\leq \|\widetilde{\rho}(t)1_{\Omega_t}\|_{L^1(\mathbb{R})} - \|\rho_\varepsilon(t)1_{\Omega_t}\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\leq \|(\widetilde{\rho}(t) - \rho_\varepsilon(t))1_{\Omega_t}\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\leq |\Omega_t|^{\frac{1}{2}}\|\widetilde{\rho}(t) - \rho_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{(via les inégalités de Hölder)}\\
&\leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}}(t^{\frac{1}{4}}1_{t\geq 1} + 1)(1 + t^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}) \quad \text{(en utilisant (II.49) et (II.65)).}
\end{aligned} \tag{II.66}$$

Cela conclut le théorème 9. □

II.4 Petite incursion dans l'incompressible, Navier-Stokes incompressible à densité variable [107]

On va s'intéresser ici au système de Navier-Stokes incompressible avec densité variable qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases}
\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0,\\
\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho)Du) + \nabla\Pi = \rho f,\\
\mathrm{div}u = 0,\ (\rho, u)_{/t=0} = (\rho_0, u_0).
\end{cases} \tag{II.67}$$

Ici $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^N$ correspond à la vitesse, $\rho = \rho(t,x) \in \mathbb{R}^+$ est la densité, et $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$ le symétrisé du gradient ∇u. μ est le coefficient de viscosité du fluide et vérifie $\mu > 0$. Le terme $\nabla\Pi$ (en fait le gradient de la pression) peut-être vu comme un multiplicateur de Lagrange associé à la

contrainte d'incompressibilité $\mathrm{div} u = 0$. Nous désignons en plus par (ρ_0, u_0) les données initiales du problème et f est une force extérieure.
On va considérer ici l'étude du problème de Cauchy pour le système de Navier-Stokes incompressible avec densité variable dans $\mathbb{R}^N$ lorsque $N \geq 2$. Plus précisément on va essayer de répondre à la question de l'existence de solutions fortes en temps fini pour des données initiales ayant une régularité critique pour le scaling des équations. Rappelons en effet que le système (II.67) est invariant par le changement d'échelle suivant :

$$(\rho(t,x), u(t,x), \Pi(t,x)) \longrightarrow (\rho(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^2 \Pi(\lambda^2 t, \lambda x)) \;\; \forall \lambda > 0. \tag{II.68}$$

R. Danchin dans [55, 56] a pour la première fois montré l'existence de solutions fortes en temps fini pour $N \geq 2$ dans des espaces critiques avec $(q_0 = \rho_0 - 1, u_0) \in \big(B^{\frac{N}{2}}_{2,\infty} \cap L^\infty\big) \times B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}$. Ce résultat a ensuite été amélioré par H. Abidi et M. Paicu dans [1] qui traitent des données initiales $(q_0, u_0) \in \big(B^{\frac{N}{p}}_{p,\infty} \cap L^\infty\big) \times B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}$ appartenant à des espaces de Besov plus grands avec ici (p, p_1) bien choisis. D'autre part on peut observer une certaine forme de découplage entre la densité et la vitesse puisqu'ils ne sont pas nécessairement choisis dans des espaces de Besov ayant le même indice de Lebesgue.
Enfin dans des travaux récents très intéressants R. Danchin et P. Mucha dans [63, 64] améliorent les résultats précédents en terme de régularité sur la densité initiale puisque celle ci peut être choisie dans l'espace de multiplicateur $\mathcal{M}(B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1})$ associé à $B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}$. Cela leur permet en particulier de choisir des densités initiales avec deux phases distinctes (ce qui est évidemment une problématique très importante d'un point de vue physique) . Pour ce faire ils étudient le système (II.67) d'une manière différente puisqu'ils le réécrivent en formulation Lagrangienne ce qui simplifie les choses lorsque l'on cherche à obtenir l'unicité de la solution. Mentionnons également un résultat d'existence de solutions fortes globales dû à H. Abidi et al dans [2, 3] qui prouvent l'existence de solutions fortes globales avec donnée initiale petite pour la vitesse u_0 et donnée initiale grande pour la densité ρ_0 en dimension $N = 3$.
Une particularité de ces travaux est de considérer des espaces de Besov de données initiales avec troisième indice 1. En effet sous ces conditions on peut prouver que le gradient de la solution ∇u appartient à l'espace $L^1_T(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})$ qui s'injecte dans $L^1_T(L^\infty)$. Ceci permet ainsi d'estimer la densité ρ via l'équation de transport puisque notre champ u est Lipschitz.
Rappelons que dans le cadre classique des équations de Navier-Stokes incompressibles M. Cannone, Y. Meyer et F. Planchon prouvent dans [27] l'existence de solutions fortes en temps fini pour $u_0 \in B^{\frac{N}{p}-1}_{p,r}$ avec $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq r < +\infty$ (mentionnons que ces résultats ont ensuite été étendus au cas d'une donnée initiale dans BMO^{-1} par H. Koch et D. Tataru dans [152], voir aussi le livre de P.-G. Lemarié [160]). Il est donc naturel d'essayer d'étendre les résultats [55], [56] et [1] au cas d'une vitesse initiale choisie dans $B^{\frac{N}{p}-1}_{p,r}$ avec $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq r < +\infty$. C'est ce que nous allons montrer dans le théorème suivant. On va réécrire le système (II.67) lorsque ρ ne s'annule pas sous la forme suivante avec $a = \rho^{-1} - 1$:

$$\begin{cases} \partial_t a + u \cdot \nabla a = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + (1+a)(\nabla \Pi - \mu \Delta u) = f, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ (a, u)_{/t=0} = (a_0, u_0). \end{cases} \tag{II.69}$$

On obtient alors le résultat suivant pour des espaces de Besov non homogènes.

Théorème 10. *Soit $1 \leq r < \infty$, $1 \leq p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$ et $\varepsilon > 0$ tels que :*

$$\frac{N}{p_1} + \varepsilon < \frac{N}{p_2} + 1 \quad et \quad \frac{N}{p_2} - 1 \leq \frac{N}{p_1}.$$

Supposons que $u_0 \in B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r}$ *avec* $\mathrm{div} u_0 = 0$, $f \in \widetilde{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^+, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r})$ *et* $a_0 \in B^{\frac{N}{p_1}+\varepsilon}_{p_1,\infty}$, *avec* $\rho_0 \geq c_1 > 0$. *Si* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > \frac{1}{N}$, *il existe* $T > 0$ *tel que le système (II.69) a une solution* (a, u) *avec :*

$$a \in \widetilde{C}([0,T], B^{\frac{N}{p_1}+\frac{\varepsilon}{2}}_{p_1,\infty}), \;\; u \in \big(\widetilde{C}([0,T]; B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r}) \cap \widetilde{L}^1(0,T, B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})\big)^N$$
$$\text{et } \nabla\Pi \in \widetilde{L}^1(0,T, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r}).$$

La solution est unique si $\frac{2}{N} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$.

Remarque 19. *On peut observer que la donnée initiale sur la densité* ρ_0 *est choisie légèrement surcritique, i.e* $a_0 \in B^{\frac{N}{p_1}+\varepsilon}_{p_1,\infty}$ *avec* $\varepsilon > 0$. *Cela implique que les données initiales ne sont pas invariantes par le scaling des équations (d'autant plus que l'on travaille dans des espaces de Besov non homogènes) et de ce point de vue là le résultat est plus faible que [55], [56] et [1]. Cependant notre résultat est par contre plus fin en terme d'espace critique pour la vitesse initiale puisque notre troisème indice peut être différent de* 1.
Enfin il est à noter que nos résultats permettent d'avoir l'existence de solutions faibles pour des données initiales très proches des espaces limites suivant : $L^\infty \times L^N$ *et* $W^{1,N} \times BMO^{-1}$ *qui sont à considérer comme des cas critiques.*
On peut voir ce résultat comme une extension des travaux de Fujita-Kato [84] et Cannone-Meyer-Planchon [27] au cas des équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable.

Remarque 20. *Enfin dans [34] en collaboration avec F. Charve, on montre l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales dans* $B^{\frac{N}{2}}_{2,1} \times (H^{\frac{N}{2}-1} \cap B^{-1}_{\infty,1})$ *lorsque* $\mu(\rho) = \mu\rho$. *Ce résultat est critique pour le scaling des équations et permet d'être au niveau des données initiales à la Fujita-Kato avec un petit supplément de régularité dans* $B^{-1}_{\infty,1}$. *Cependant il ne recouvre pas le cas des espaces de Besov à toisième indice plus faible que* 2.

Quelques éléments de preuve du théorème 10 : La difficulté principale consiste à estimer la densité ρ via l'équation de transport lorsque la vitesse u n'est pas Lipschitzienne. En effet lorsque l'on reprend les résultats de M. Cannone, Y. Meyer et F. Planchon [27] dans le cadre de Navier-Stokes incompressible, on ne peut espérer mieux qu'un contrôle de la vitesse u dans $\widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})$. Ceci implique que u est seulement log Lipschitz ce qui va nous permettre malgré tout d'estimer la densité ρ via l'équation de transport mais ceci avec une perte arbitrairement petite de régularité.
Commençons par rappeler certaines définitions et propositions dûes à H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin (voir [8]).

Définition 6. *Soit* Γ *une function croissante sur* $[1, +\infty[$. *On note* $B_\Gamma(\mathbb{R}^N)$ *l'ensemble des fonctions bornées à valeurs réelles telles que* $u \in B_\Gamma(\mathbb{R}^N)$ *si :*

$$\|u\|_{B_\Gamma} = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{j\geq 0} \frac{\|\nabla S_j u\|_{L^\infty}}{\Gamma(2^j)} < +\infty.$$

On rappelle maintenant une proposition dûe à J.-Y. Chemin pour l'ensemble $B_\Gamma(\mathbb{R}^N)$ (voir [8]).

Proposition 6. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $u \in \widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p}+1}_{p,r})$ *alors on a* $u \in L^1_T(B_\Gamma(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\Gamma(t) = (-\log t)^{1+\varepsilon-\frac{1}{r}}$ *pour* $0 < t \leq 1$ *.*

Afin de mesurer précisément la régularité du champ de vecteur u, on introduit comme dans [8] la notation :

$$V^{'}_{p_2,\alpha}(t) = \sup_{j\geq 0} \frac{2^{j\frac{N}{p_2}} \|\nabla S_j v(t)\|_{L^{p_2}}}{(j+1)^\alpha} < +\infty. \tag{II.70}$$

On remarque que si $p_2 = +\infty$ alors $V'_{p_2,\alpha}$ correspond exactement à la norme $\|B_\Gamma\|$ de la définition 6. On va maintenant étudier la solution de l'equation de transport suivante :

$$\begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a = g \\ a(0,\cdot) = a_0. \end{cases} \tag{II.71}$$

H. Bahouri, J.-Y Chemin et R. Danchin obtiennent dans [8] le théorème suivant.

Théorème 11. *Soient* $(p_1, p_2) \in [1, +\infty]^2$ *tels que* $1 \le p_1 \le p_2$ *avec* σ *satisfaisant* $\sigma > -1 - N\min(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{p'_1})$ *et* $\sigma < 1 + \frac{N}{p_2}$*. Supposons en plus que* $V'_{p_2,\alpha}$ *soit dans* $L^1([0,T])$ *pour* $\alpha \in]0,1[$*. Soit* $a_0 \in B^\sigma_{p_1,\infty}$*,* $g \in \widetilde{L}^1_T(B^\sigma_{p_1,\infty})$ *alors l'équation (II.34) a une unique solution* $a \in C([0,T], \cap_{\sigma'<\sigma} B^{\sigma'}_{p_1,\infty})$ *et l'estimation suivante a lieu pour* $\varepsilon > 0$ *suffisament petit :*

$$\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\sigma-\varepsilon}_{p_1,\infty})} \le C\big(\|a_0\|_{B^\sigma_{p_1,\infty}} + \|g\|_{\widetilde{L}^1_T(B^\sigma_{p_1,\infty})}\big) \exp\big(\frac{C}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}(V_{p_2,\alpha}(T))^{\frac{1}{1-\alpha}}\big), \tag{II.72}$$

où C *dépend seulement de* α*,* p*,* p_1*,* σ *et* N*.*

Remarque 21. *Dans la suite, nous utiliserons le théorème 11 et la proposition 6 lorsque* $p_1 = \infty$ *et* $\alpha = 1 + \varepsilon' - \frac{1}{r}$ *avec* $\varepsilon' > 0$*. En effet puisque nous travaillerons avec une vitesse* u *qui sera dans* $\widetilde{L}^1(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})$ *(avec* $1 \le r < \infty$*), en utilisant la proposition 6 et la définition 6 on en déduit que :*

$$\int_0^t V'_{\infty,\alpha}(t')dt' \lesssim \|u\|_{\widetilde{L}^1(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})}.$$

Cela permettra ainsi d'avoir des estimations sur la densité ρ*.*

On peut donc à présent via la remarque précédente 21 estimer la densité a modulo une perte de régularité arbitrairement petite lorsque u appartient à l'espace $\widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})$. Il s'agit maintenant de vérifier que la vitesse u appartient bien à l'espace $\widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})$. Pour ce faire on va chercher u sous la forme $u = u_L + \widetilde{u}$ avec u_L solution de l'équation de Stokes avec terme source f et donnée initiale u_0. Cela implique que via la proposition 17 :

$$u_L \in \widetilde{L}^\infty(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r}) \cap \widetilde{L}^1(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r}).$$

On remarque maintenant que $\widetilde{u}$ vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{u} - \mu(1+a)\Delta\widetilde{u} + (1+a)\nabla\widetilde{\Pi} = H(a, u, \nabla\Pi), \\ \mathrm{div}\widetilde{u} = 0, \\ \widetilde{u}(0) = 0, \end{cases} \tag{II.73}$$

avec :

$$H(a, u, \nabla\Pi) = a(\mu\Delta u_L - \nabla\Pi_L) - u \cdot \nabla u.$$

Il s'agit alors d'étudier l'équation linéaire suivante avec $\widetilde{u}$ l'inconnue :

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{u} - \mu(1+a)\Delta\widetilde{u} + (1+a)\nabla\widetilde{\Pi} = G, \\ \mathrm{div}\widetilde{u} = 0, \\ \widetilde{u}(0) = 0. \end{cases} \tag{II.74}$$

On peut montrer les estimations suivantes en s'inspirant de [57] :

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r}) \cap \widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})} \lesssim e^{\int_0^T \|a(s)\|^2_{B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,\infty} \cap L^\infty} ds} \|G\|_{\widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r})}. \tag{II.75}$$

Il est donc important à ce stade de contrôler la densité a au moins en norme $L^2_T(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,\infty} \cap L^\infty)$ et donc en particulier en norme $L^\infty_T(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,\infty} \cap L^\infty)$. Ceci se comprend assez bien si l'on regarde le terme $a\Delta\widetilde{u}$ comme un terme de reste "petit" (ceci peut se faire si on décompose a en un terme infiniment régulier "grand" plus un terme "petit", ceci par densité), en effet pour ne pas avoir de perte de dérivée sur ce terme de reste il est crucial que $a\Delta\widetilde{u}$ reste dans l'espace $\widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})$ avec $\Delta\widetilde{u}$ appartenant à ce même espace. Pour ce faire a doit être dans un espace de multiplicateur de $\widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})$ et il s'avère que $L^\infty_T(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,\infty} \cap L^\infty)$ en est un.
Le jeu consiste donc maintenant à estimer a via l'équation de transport de telle sorte que a appartienne à $L^\infty_T(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,\infty} \cap L^\infty)$. La seule possibilité est donc à priori de prendre a_0 dans $B^{\frac{N}{p_1}+\varepsilon}_{p_1,\infty}$ avec $\varepsilon > 0$ puisque l'on aura une perte de dérivée via le théorème 11.
Dans notre cas présent on peut donc utiliser l'estimation (II.75) appliquée à $\widetilde{u}$ solution de l'équation (II.74) avec G correspond au terme de reste :

$$G = H(a, u, \nabla\Pi) = a(\mu\Delta u_L - \nabla\Pi_L) - u \cdot \nabla u.$$

On estime ce G via des lois de paraproduits classiques et on applique un argument de bootstrap pour conclure que $\widetilde{u}$ est dans l'espace $\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,r}) \cap \widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,r})$. Afin d'obtenir la régularité correspondante sur a on applique le théorème 11. Cela conclut la preuve de l'existence, la partie unicité est quand à elle plus standard (voir [55]).

II.5 Ouvertures

R. Danchin et P. Mucha ont montré dans [63, 64] des résultats extrêmement intéressants concernant l'existence de solutions fortes critiques pour le système de Navier-Stokes incompressible à densité variable avec coefficients de viscosité constants ; en effet ces derniers réussissent à considérer une densité initiale pouvant admettre deux phases distinctes induisant ainsi une interface discontinue. Il serait intéressant de généraliser ce résultat au cadre du système de Navier-Stokes compressible ou du moins l'étendre au cas du système de Navier-Stokes incompressible à densité variable avec cette fois-ci des coefficients de viscosité dépendant de la densité.
Une autre question d'envergure restant actuellement en suspens est l'existence de solutions fortes globales en dimension $N = 2$ pour le système de Navier-Stokes compressible avec coefficients de viscosité constants ou non. On rappelle que le seul résultat existant à l'heure actuelle est dû à V. A. Vaigant et A. V. Kazhikhov dans [199] lorsque $\mu(\rho) = \mu > 0$ et $\lambda(\rho) = \lambda\rho^\beta$ avec $\lambda > 0$ et $\beta > 3$. Une des difficultés principales est évidemment de contrôler la norme L^∞ de ρ et $\frac{1}{\rho}$ ce qu'arrivent à faire V. A. Vaigant et V. Kazhikhov pour ce choix de coefficients de viscosité. Il serait également intéressant d'essayer de montrer un tel résultat pour les quasi-solutions sachant que l'on connait déjà certaines solutions irrotationnelles explicites avec données initiales grandes pour $N \geq 2$. Dans la même veine l'existence globale de solutions fortes en dimension $N = 2$ pour Navier-Stokes incompressible à densité variable reste ouverte dans le cas de coefficients de viscosité dépendant de la densité ρ. Si dans ce cas le contrôle L^∞ de ρ et $\frac{1}{\rho}$ est offert via l'équation de transport sur la densité, il semble cependant délicat d'obtenir de bonnes estimations de régularité pour la vitesse u.
Enfin il serait également important de pouvoir infirmer ou confirmer l'existence de solutions autosimilaires à données initiales petites pour le système de Navier-Stokes incompressible à densité variable. Ce résultat est bien connu pour Navier-Stokes incompressible (voir [27, 152]) ; dans notre cadre la difficulté provient essentiellement de l'aptitude à conserver une régularité "autosimilaire" autre que la norme L^∞ pour la densité lorsque la vitesse u n'est pas Lipschitz.

Chapitre III

Systèmes capillaires

Dans ce chapitre on va s'intéresser aux systèmes capillaires, c'est-à-dire les systèmes de Korteweg locaux et non locaux ainsi que le système d'Euler Korteweg. On étudiera dans une première partie l'existence de solutions fortes à données petites dans des espaces critiques pour le système de Korteweg local. Dans une seconde partie on s'intéresse au lien entre le système non local introduit par C. Rohde dans [181] et le système de Korteweg local, plus particulièrement on montre qu'en choisissant judicieusement le noyau ϕ_ε alors les solutions fortes globales avec données petites de (NHV) tendent vers celles de (NSK) avec un taux de convergence en ε^α. Ensuite on montrera rigoureusement que les solutions fortes du système de Korteweg local convergent en une dimension vers une solution entropique du système de Euler compressible lorsque les coefficients de viscosité et de capillarité convergent vers 0 avec $\kappa = \mu^2$. Cela montre que pour ce régime critique le système de Korteweg local permet de sélectionner les "bonnes" solutions physiques pour le système d'Euler compressible.
Dans une dernière partie on considérera le système d'Euler Korteweg et on montrera que ce système admet des solutions fortes globales pour des données irrotationnelles petites. Pour ce faire on prendra en compte les propriétés dispersives du système en utilisant la théorie de non résonances temps-espace.

III.1 Solutions fortes dans des espaces critiques pour le système de Korteweg local [112]

Commençons par rappeler les équations du système de Korteweg local :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu(\rho)\mathrm{D(u)}) - \nabla\big(\lambda(\rho))\mathrm{divu}\big) + \nabla \mathrm{P}(\rho) = \mathrm{divK}, \end{cases} \tag{III.1}$$

où le tenseur de capillarité s'écrit :

$$\mathrm{div}K = \nabla\big(\rho\kappa(\rho)\Delta\rho + \frac{1}{2}(\kappa(\rho) + \rho\kappa^{'}(\rho))|\nabla\rho|^2\big) - \mathrm{div}\big(\kappa(\rho)\nabla\rho\otimes\nabla\rho\big), \tag{III.2}$$

avec κ le coefficient de capillarité qui est une fonction régulière dépendant de la densité ρ. Le tenseur de capillarité div$K$ permet de décrire les variations de densité à l'interface entre deux phases généralement un mélange liquide-vapeur. P correspond au terme de pression et on a $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u +^t \nabla u)$. Les deux coefficients de viscosité μ et λ dépendent de la densité ρ et vérifient les conditions de Lamé. On va dans cette section considérer des coefficients de viscosité et de capillarité particuliers correspondant au cadre de Shallow water visqueux et de la pression quantique :

$$\mu(\rho) = \mu\rho,\ \lambda(\rho) = \lambda\rho \ \text{ et } \ \kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho}$$

aver $\mu, \kappa > 0$ et $2\mu + \lambda > 0$. On peut réécrire le système (III.1) sous la forme suivante avec $q = \ln \rho$ et $F'(\rho) = \frac{P'(\rho)}{\rho}$ (on suppose ici que ρ ne s'annule pas) :

$$\begin{cases} \partial_t q + u \cdot \nabla q + \mathrm{div} u = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u - 2\mu \nabla q \cdot D(u) - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u - \lambda \mathrm{div} u \nabla q + \nabla F(\rho) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \kappa \nabla \Delta q + \frac{\kappa}{2}\nabla(|\nabla q|^2), \\ (q, u)_{\ t=0} = (\ln \rho_0, u_0). \end{cases} \tag{III.3}$$

On va s'intéresser à montrer l'existence de solutions fortes globales avec données initiales petites et ceci pour des espaces de données initiales les plus grands possibles. Rappelons que R. Danchin et B. Desjardins dans [62] prouvent l'existence de solutions fortes globales avec des données initiales petites $(\rho_0 - 1, u_0)$ dans $\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}} \times (B_{2,1}^{\frac{N}{2}-1})^N$. Dans le théorème suivant on raffine donc l'espace de données initiales en permettant notamment le choix de données initiales grandes pour l'énergie du système (III.1).

Théorème 12. *Soit $N \geq 2$. Supposons que $\mu(\rho) = \mu\rho$, $\lambda(\rho) = \lambda\rho$ avec $\mu > 0$, $2\mu + \lambda > 0$ et $P(\rho) = K\rho$ avec $K > 0$. Soit $q_0 \in \widetilde{B}_{2,\infty}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}$ et $u_0 \in B_{2,\infty}^{\frac{N}{2}-1}$ alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si :*

$$\|q_0\|_{\widetilde{B}_{2,\infty}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}} + \|u_0\|_{B_{2,\infty}^{\frac{N}{2}-1}} \leq \varepsilon_0, \tag{III.4}$$

le système (III.3) admet une unique solution globale (q, u) avec :

$$q \in \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}_{2,\infty}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}) \cap \widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}_{2,\infty}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+2}) \ \text{ et } \ u \in \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+, B_{2,\infty}^{\frac{N}{2}-1}) \cap \widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, B_{2,\infty}^{\frac{N}{2}+1}). \tag{III.5}$$

Si en plus de l'hypothèse (III.4) on suppose que (q_0, u_0) apartient à l'espace $\widetilde{B}_{2,2}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}} \times B_{2,2}^{\frac{N}{2}-1}$ et que $q_0 \in L^\infty$ alors il existe une unique solution (ρ, u) du système (III.1) avec $q = \ln \rho$. De plus pour tout temps $T > 0$ il existe $C_T > 0$ dépendant de T tel que :

$$\|\frac{1}{\rho}\|_{L_T^\infty(L^\infty)} + \|\rho\|_{L_T^\infty(L^\infty)} \leq C_T.$$

Enfin pour tout temps $T > 0$ on a :

$$q \in \widetilde{L}_T^\infty(B_{2,2}^{\frac{N}{2}}) \cap \widetilde{L}^1(\widetilde{B}_{2,2}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+2}) \ \text{ et } \ u \in \widetilde{L}_T^\infty(B_{2,2}^{\frac{N}{2}-1}) \cap \widetilde{L}^1(B_{2,2}^{\frac{N}{2}+1}). \tag{III.6}$$

Remarque 22. *Il est important d'observer que les systèmes (III.3) et (III.1) ne sont équivalents que si on contrôle la norme L^∞ de $\frac{1}{\rho}$. C'est ce que l'on montre dans la seconde partie du théorème précédent et c'est aussi la partie la plus délicate puisqu'on travaille avec des espaces de Besov qui n'ont pas de troisième indice égal à 1 comme c'est le cas dans [62]. En effet dans [62] le fait de contrôler la densité dans $B_{2,1}^{\frac{N}{2}}$ qui s'injecte dans L^∞ permet d'éviter la présence de vide. Dans notre cas il s'agira d'utiliser de manière assez fine des résultats de type principe du maximum, et en particulier caractériser certains espaces de Besov en fonction du semi-groupe associé au système linéarisé associé à (III.3).*

Remarque 23. *Ce résultat étend donc les travaux de [62] en terme de régularité sur les données initiales* (q_0, u_0) *qui peuvent être choisies juste dans* $(H^{\frac{N}{2}} \cap L^\infty) \times (H^{\frac{N}{2}-1})^N$*, mais son intérêt principal est surtout de pouvoir travailler avec des données initiales pas nécessairement petites en dimension* $N = 2$ *dans les espaces d'énergie.*
Mentionnons enfin que ce résultat peut s'étendre à des pressions plus générales ou au cas des coefficients de viscosité et de capillarité constants si ce n'est que la condition de petitesse sera sur $(H^{\frac{N}{2}} \cap L^\infty) \times (H^{\frac{N}{2}-1})^N$.

Quelques éléments de preuve du théorème 12 : Dans un premier temps il s'agit de montrer l'existence de solutions fortes globales pour le système (III.3) lorsque (q_0, u_0) vérifie la condition (III.4). Il s'agit essentiellement d'étudier le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t q + \operatorname{div} u = F, \\ \partial_t u - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u + K\nabla q - \kappa\nabla\Delta q = G, \\ (q, u)_{\ t=0} = (\ln \rho_0, u_0). \end{cases} \tag{III.7}$$

et de montrer de bonnes estimations dans les espaces de Besov. On a alors la proposition suivante très proche de ce qui est fait dans [62].

Proposition 7. *Soit* (q, u) *la solution du système (III.7),* (q_0, u_0) *dans* $\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,\infty} \times B^{\frac{N}{2}-1}_{2,\infty}$ *et* (F, G) *dans* $\widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,\infty}) \times \widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, B^{\frac{N}{2}-1}_{2,\infty})$ *on a alors :*

$$\begin{aligned} \|(q, u)\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,\infty}) \times \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}^+, B^{\frac{N}{2}-1}_{2,\infty})} + \|(q, u)\|_{\widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+2}_{2,\infty}) \times \widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, B^{\frac{N}{2}+1}_{2,\infty})} \lesssim \\ \|(q_0, u_0)\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,N}_{2,\infty} \times B^{\frac{N}{2}-1}_{2,\infty}} + \|(F, G)\|_{\widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, \widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,\infty}) \times \widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, B^{\frac{N}{2}-1}_{2,\infty})}. \end{aligned} \tag{III.8}$$

On obtient alors l'existence de solutions fortes globales avec données petites via un point fixe, on peut cependant relever qu'on ne demande aucun contrôle sur la norme L^∞ de q et ceci s'explique par le fait qu'on n'a pas réellement de termes non linéaires à cause de notre choix très particulier sur la pression et les coefficients de capillarité et de viscosité. Typiquement si l'on avait choisi une pression de type $P(\rho) = K\rho^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$ on aurait eu un terme de la forme $\nabla e^{\alpha q}$ à estimer, et ce dernier aurait nécessité un contrôle L^∞ de q afin d'appliquer un théorème de composition.
Montrons maintenant la seconde partie du théorème 12 qui est la plus délicate à savoir les estimations L^∞ sur ρ et $\frac{1}{\rho}$. On va commencer par étudier le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t q + \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u - \kappa\nabla\Delta q = 0, \\ (q(0, \cdot), u(0, \cdot)) = (q_0, u_0). \end{cases} \tag{III.9}$$

Nous allons à présent caractériser certains espaces de Besov en fonction du semi-groupe $B(t)$ associé au système (III.9). Cela nous permettra d'obtenir une borne L^∞ sur q. On a la proposition suivante.

Proposition 8. *Soit* s *un réel strictement positif et* $(p, r) \in [1, +\infty]^2$*. Soit* (q, u) *la solution de (III.9) avec* $(q, u)(t) = e^{B(t)}(q_0, u_0)$ *et avec la notation suivante :*

$$(\nabla q, u)(t) = e^{B(t)}(\nabla q_0, u_0).$$

Alors il existe une constante $C > 0$ *satisfaisant :*

$$\| \, \|t^s e^{B(t)}(\nabla q_0, u_0)\|_{L^p} \, \|_{L^r(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t})} \leq C\|(\nabla q_0, u_0)\|_{B^{-2s}_{p,r}} \quad \forall (\nabla q_0, u_0) \in B^{-2s}_{p,r}. \tag{III.10}$$

Nous pouvons maintenant prouver des estimations L^∞ sur q solution du système (III.9).

Proposition 9. *Soit $q_0 \in B^{\frac{N}{2}}_{2,2}$, $u_0 \in B^{\frac{N}{2}-1}_{2,2}$ et $q_0 \in L^\infty$. Soit (q,u) la solution du système III.9, alors nous avons pour tout temps $T>0$:*

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}(\sqrt{t}\|(\nabla q,u)(t,\cdot)\|_{L^\infty}) \le C\|(\nabla q_0,u_0)\|_{B^{\frac{N}{2}-1}_{2,2}},\\
&\|q\|_{L^\infty_T(L^\infty)} \le \|q_0\|_{L^\infty} + C\|(\nabla q_0,u_0)\|_{B^{\frac{N}{2}-1}_{2,2}}.
\end{aligned} \tag{III.11}$$

Preuve : La première estimation dans (III.11) est une conséquence directe de la proposition 8 appliquée à $p=+\infty$, $r=+\infty$, $s=\frac{1}{2}$ et en utilisant l'injection de $B^{\frac{N}{2}-1}_{2,2}$ dans $B^{-1}_{\infty,\infty}$.
Soit $\mathcal{E}$ la solution fundamental du Laplacien. On va appliquer maintenant l'opérateur $(\Delta)^{-1}\mathrm{div}$ à la seconde équation de (III.9) et en utilisant la notation suivante $c=(\Delta)^{-1}\mathrm{div}u$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}
\partial_t q - \dfrac{\kappa}{\mu}\Delta q = -\dfrac{1}{\mu}\partial_t c,\\
\partial_t c - \mu\Delta c - \kappa\Delta q = 0.
\end{cases}$$

Il s'agit maintenant de prouver que q apartient à $L^\infty_T(L^\infty)$ pour tout $T>0$; par la formule de Duhamel on a :

$$q(t,x) = e^{\frac{\kappa}{\mu}t\Delta}q_0 - \frac{1}{\mu}\int_0^t e^{\frac{\kappa}{\mu}(t-s)\Delta}\partial_t c(s)ds. \tag{III.12}$$

Par le principe du maximum on sait que :

$$\|e^{\frac{\kappa}{\mu}t\Delta}q_0\|_{L^\infty(L^\infty)} \le \|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \tag{III.13}$$

Il reste à traiter le terme $\int_0^t e^{\frac{\kappa}{\mu}(t-s)\Delta}\partial_s c(s)ds$, quelques calculs donnent :

$$e^{\frac{\kappa}{\mu}(t-s)\Delta}\partial_s c(s) = \sum_i \partial_i[K(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}})] *_x (\Delta)^{-1}\partial_s u_i(s,\cdot), \tag{III.14}$$

avec $*_x$ la convolution en espace et $\bar{\mu}=\frac{\kappa}{\mu}$:

$$K(\frac{x}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{(4\pi\bar{\mu}t)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\bar{\mu}t}}.$$

On en déduit que :

$$\partial_i[K(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}})](x) = \frac{-2x_i}{\pi^{\frac{N}{2}}}\frac{1}{(4\bar{\mu}(t-s))^{\frac{N}{2}+1}}e^{-\frac{|x|^2}{4\bar{\mu}(t-s)}}$$

et on obtient après changement de variable :

$$\|\partial_i[K(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}})]\|_{L^1} \le \frac{C}{\sqrt{t-s}}.$$

Par l'inégalité de Young il vient pour tout $0<s<t$:

$$\|\partial_i[K(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}})] *_x (\Delta)^{-1}\partial_s u_i(s,\cdot)\|_{L^\infty_x} \le \frac{C}{\sqrt{t-s}}\frac{1}{\sqrt{s}}\sup_{0<s<t}\sqrt{s}\|(\Delta)^{-1}\partial_s u(s)\|_{L^\infty} \tag{III.15}$$

avec $C>0$. En appliquant $(\Delta)^{-1}$ à la seconde équation de (III.9) on observe que :

$$\partial_t(\Delta)^{-1}u = \mu u + \kappa\nabla q. \tag{III.16}$$

On peut alors conclure en utilisant (III.14), (III.15) et (III.16) qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \| \int_0^t e^{\frac{\kappa}{\mu}(t-s)\Delta} \partial_s c(s) ds \|_{L^\infty(L^\infty)} &\leq (\sup_{0<s<t} \sqrt{s} \|\Delta^{-1} \partial_s u(s)\|_{L^\infty}) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} ds, \\ &\leq \pi \sup_{0<s<t} \sqrt{s} \|\mu u(s,\cdot) + \kappa \nabla q(s,\cdot)\|_{L^\infty}, \\ &\leq C\pi \sup_{0<s<t} \sqrt{s} \|(u(s,\cdot), \nabla q(s,\cdot))\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{III.17}$$

En combinant la première estimation de (III.11) ainsi que (III.17) et(III.13) on montre que pour tout $T > 0$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|q\|_{L^\infty_T(L^\infty)} \leq \|q_0\|_{L^\infty} + C \|(\nabla q_0, u_0)\|_{B^{\frac{N}{2}-1}_{2,2}}.$$

Cela prouve la proposition III.11. □

Il s'agit à présent de montrer que q est dans $L^\infty_T(L^\infty)$ pour tout $T > 0$ avec q solution du système (III.3). On peut commencer par montrer puisque l'on suppose en plus que (q_0, u_0) sont dans $\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,2} \times H^{\frac{N}{2}-1}_{2,2}$ que la solution (q, u) du système (III.3) appartient à l'espace suivant :

$$\widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{N}{2}}_{2,2}) \cap \widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+2}_{2,2}) \times \widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{N}{2}-1}_{2,2}) \cap \widetilde{L}^1(B^{\frac{N}{2}+1}_{2,2}).$$

Pour ce faire il s'agit d'utiliser des arguments assez classiques de stabilité de la solution, en d'autres mots la régularité des données initiales est conservée. On peut maintenant utiliser une formulation de type Duhamel de tel sorte que l'on a :

$$(q(t), u(t)) = e^{B(t)}(q_0, u_0) + \int_0^t e^{B(t-s)}(R(q,u), K\nabla q_L + R_1(q,u))(s) ds.$$

$R(q, u)$ et $R_1(q, u)$ désignent des termes de reste quadratiques qui sont plus réguliers que $e^{B(t)}(q_0, u_0)$, en effet ils appartiennent à $\widetilde{L}^1_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,1}) \times \widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})$ pour tout $T > 0$. En effet lorsque l'on applique les lois de paraproduits on obtient un effet régularisant sur le troisième indice de l'espace de Besov qui devient 1 (essentiellement car on a une inégalité de Hölder sur le troisème indice de type $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Ceci permet d'observer que $\int_0^t e^{B(t-s)}(R(q,u), K\nabla q_L + R_1(q,u))(s) ds$ appartient à $\widetilde{L}^\infty_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,1}) \times \widetilde{L}^\infty_T(B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})$. On en déduit donc que q est la somme de $e(^{B(t)}(q_0, u_0))_1$ qui appartient à $L^\infty_T(L^\infty)$ pour tout $T > 0$ via la proposition précédente et d'un terme dans $\widetilde{L}^\infty_T(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,1})$ qui s'injecte dans $L^\infty_T(L^\infty)$. On a donc montré le résultat souhaité. Puisque $q = \ln \rho$ cela assure donc le contrôle de ρ et $\frac{1}{\rho}$ en norme $L^\infty_T(L^\infty)$ pour tout $T > 0$. Le système (III.3) et (III.1) sont alors équivalents et ça conclut la preuve de notre théorème.

III.2 Du système de Korteweg non local au système de Korteweg local [33]

Cette section est le fruit de collaborations avec F. Charve (Université Paris Est). On souhaite ici faire le lien entre le système de Korteweg non local à interfaces discontinues introduit par C. Rohde dans [181] et le système de Korteweg local isotherme à interfaces continues ; plus particulièrement on va montrer qu'en choisissant judicieusement le noyau ϕ_ε intervenant dans (NSK) (p 25) alors les solutions fortes globales avec données petites du système de Korteweg non local tendent vers celles du système de Korteweg local (III.1) et ceci avec un certain taux de convergence que l'on précisera. Cela induit en particulier que les solutions $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ du système non local ont tendance à se régulariser lorsque ε tends vers 0 (la régularité se propage vers les hautes fréquences) ou en

d'autres termes que l'interface discontinue se régularise petit à petit.
Dans cette section les coefficients de viscosité et de capillarité seront systématiquement choisis constants. Commençons d'abord par rappeler le système de Korteweg non local introduit par C. Rohde dans [181] :

$$(NSK) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho\, u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u + \nabla(P(\rho)) = \kappa \rho \nabla D[\rho] \\ (\rho_{t=0}, u_{t=0}) = (\rho_0, u_0), \end{cases}$$

avec : $D[\rho] = \kappa(\phi * \rho - \rho)$, κ le coefficient de capillarité et ϕ vérifie :

$$\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N), \ \int \phi(x)dx = 1 \ \text{ et } \ \phi \geq 0.$$

Puisque l'on veut passer du système non local au système de Korteweg local, on va faire varier le tenseur de capillarité en choisissant judicieusement le noyau ϕ_ε tel que :

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N}\phi(\frac{x}{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-\frac{|x|^2}{4}}.$$

Remarque 24. *Puisque la transformée de Fourier de ϕ_ε vérifie $\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi) = e^{-\varepsilon^2|\xi|^2}$, on remarque que pour ξ fixé on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\widehat{\phi_\varepsilon}(\xi) - 1}{\varepsilon^2} = -|\xi|^2.$$

Cela explique en particulier pourquoi ce choix de ϕ_ε puisqu'au moins heuristiquement le tenseur de capillarité $\rho_\varepsilon \frac{\kappa}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * \rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon)$ converge vers $-\kappa\rho\nabla\Delta\rho$ lorsque ε tends vers 0.

On est donc amener à étudier le système suivant :

$$(NSRW_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \mathrm{div}\,(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \mathrm{div}\,(\rho_\varepsilon u \otimes u_\varepsilon) - \mathcal{A} u_\varepsilon + \nabla(P(\rho_\varepsilon)) = \rho_\varepsilon \dfrac{\kappa}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * \rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon), \end{cases}$$

avec :

$$\mathcal{A} u_\varepsilon = \mu \Delta u_\varepsilon + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\, u_\varepsilon, \quad \text{et} \quad \mu > 0, \quad \nu = \lambda + 2\mu > 0.$$

De manière naturelle on peut alors réécrire les système de Korteweg local (III.1) et celui de Korteweg non local ($NSRW_\varepsilon$) sous la forme suivante :

$$(K) \qquad \begin{cases} \partial_t q + u.\nabla q + (1+q)\mathrm{div}\, u = 0, \\ \partial_t u + u.\nabla u - \mathcal{A} u + P'(1).\nabla q - \kappa \nabla \Delta q = K(q).\nabla q - I(q)\mathcal{A} u, \end{cases}$$

et

$$(RW_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t q_\varepsilon + u_\varepsilon.\nabla q_\varepsilon + (1+q_\varepsilon)\mathrm{div}\, u_\varepsilon = 0, \\ \partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon.\nabla u_\varepsilon - \mathcal{A} u_\varepsilon + P'(1).\nabla q_\varepsilon - \dfrac{\kappa}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * q_\varepsilon - q_\varepsilon) \\ \qquad\qquad = K(q_\varepsilon).\nabla q_\varepsilon - I(q_\varepsilon)\mathcal{A} u_\varepsilon, \end{cases}$$

où K et I sont donnés par :

$$K(q) = \left(P'(1) - \frac{P'(1+q)}{1+q}\right) \quad \text{et} \quad I(q) = \frac{q}{q+1}.$$

Rappelons à présent la définition des espaces de Besov hybrides que nous allons utiliser et dont la fréquence de coupure sera déterminée en fonction de notre problèmatique correspondant à une certaine puissance en $\frac{1}{\varepsilon}$.

Définition 7. *Pour* $l_\varepsilon = [\frac{1}{2}\log_2(\frac{\gamma}{C_0\varepsilon^2}) - 1]$ *avec* $C_0 > 0$ *et* $s, t \in \mathbb{R}$*, on définit la norme de Besov hybride suivante :*

$$\|q\|_{\dot{B}_\varepsilon^{s,t}} \overset{def}{=} \sum_{l \leq l_\varepsilon} 2^{ls}\|\dot{\Delta}_l q\|_{L^2} + \sum_{l > l_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} 2^{lt}\|\dot{\Delta}_l q\|_{L^2}. \tag{III.18}$$

Donnons à présent une définition des espaces dans lesquels nous allons travailler.

Définition 8. E_ε^s *est l'espace de fonctions* (q, u) *appartenant à l'espace suivant :*

$$\Big(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{s-1} \cap \dot{B}_{2,1}^{s}) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \dot{B}_\varepsilon^{s+1,s} \cap \dot{B}_\varepsilon^{s+2,s})\Big) \times \Big(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{s-1}) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \dot{B}_{2,1}^{s+1})\Big)^N$$

muni de la norme :

$$\begin{aligned}\|(q,u)\|_{E_\varepsilon^s} \overset{def}{=} \|u\|_{L^\infty \dot{B}_{2,1}^{s-1}} + \|q\|_{L^\infty \dot{B}_{2,1}^{s-1}} + \|q\|_{L^\infty \dot{B}_{2,1}^{s}} \\ + \|u\|_{L^1 \dot{B}_{2,1}^{s+1}} + \|q\|_{L^1 \dot{B}_\varepsilon^{s+1,s}} + \|q\|_{L^1 \dot{B}_\varepsilon^{s+2,s}}\end{aligned} \tag{III.19}$$

Notre premier résultat concerne l'existence de solutions fortes globales pour le système (RW_ε) avec données initiales petites, on montre en particulier une estimation uniforme sur la solution $(q_\varepsilon, u_\varepsilon)$ en ε dans l'espace $E_\varepsilon^{\frac{N}{2}}$.

Théorème 13. *Soit* $N \geq 2$, $\varepsilon > 0$ *et supposons que* $\min(\mu, 2\mu + \lambda) > 0$*. Il existe deux constantes positives* η_R *et* C *dépendant seulement de* N, κ, μ, λ *et* $P'(1) > 0$ *tels que si* $q_0 \in \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}$, $u_0 \in \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}$ *et*

$$\|q_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}} + \|u_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}} \leq \eta_R$$

alors le système (RW_ε) *admet une unique solution globale* $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ *avec* $(q_\varepsilon, u_\varepsilon) \in E_\varepsilon^{\frac{N}{2}}$ *telle que :*

$$\|(q_\varepsilon, u_\varepsilon)\|_{E_\varepsilon^{\frac{N}{2}}} \leq C(\|q_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}} + \|u_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}}).$$

Remarque 25. *On observe qu'en basses fréquences* ($l \leq l_\varepsilon$)*, la densité* q *est soumise aux même type d'effets régularisants que pour le système de Korteweg local, c'est à dire que* q *est dans* $\widetilde{L}^1(\mathbb{R}^+, \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}+1} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}+2})$*. De plus la fréquence de coupure* l_ε *converge vers l'infini lorsque* ε *tends vers* 0*. Cela sous-tend que les effets paraboliques ont tendance à se propager à toutes les fréquences de* q_ε *lorsque* ε *tends vers* 0*, ce qui est naturel puisque l'on souhaite converger vers une solution du système de Korteweg avec interfaces continues qui est elle régulière.*

On obtient ensuite le résultat principal suivant.

Théorème 14. *Soit* $N \geq 2$*. Supposons que* $\min(\mu, 2\mu + \lambda) > 0$, $P'(1) > 0$ *et que* $q_0 \in \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}$, $u_0 \in \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}$*. Il existe* $0 < \eta \leq \min(\eta_K, \eta_R)$ *tel que si :*

$$\|q_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}} + \|u_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}} \leq \eta,$$

alors les systèmes (K) *et* (RW_ε) *admettent tous les deux une unique solution globale vérifiant* $\|(q_\varepsilon - q, u_\varepsilon - u)\|_{E_\varepsilon^{\frac{N}{2}}}$ *tends vers* 0 *lorsque* ε *converge vers* 0*. De plus il existe une constante*

$C = C(\eta, \kappa, P'(1)) > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]0,1[$ (si $N = 2$) ou $\alpha \in]0,1]$ (si $N \geq 3$), et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned}\|(q_\varepsilon - q, u_\varepsilon - u)\|_{E_\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha}} &= \|u_\varepsilon - u\|_{L_t^\infty \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}} + \|q_\varepsilon - q\|_{L_t^\infty \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}} + \|q_\varepsilon - q\|_{L_t^\infty \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-\alpha}} \\ &+ \|u_\varepsilon - u\|_{L_t^1 \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-\alpha+1}} + \|q_\varepsilon - q\|_{L_t^1 \dot{B}_\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha+1,\frac{N}{2}-\alpha}} + \|q_\varepsilon - q\|_{L_t^1 \dot{B}_\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha+2,\frac{N}{2}-\alpha}} \leq C\varepsilon^\alpha. \quad \text{(III.20)}\end{aligned}$$

Remarque 26. *On peut mentionner que le même résultat a lieu pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{\phi}(\xi) = g(|\xi|^2)$ avec :*

- *$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ prend ses valeurs dans $[0, e1]$ et tel que $g(0) = 1$,*
- *$h : x \mapsto \frac{1-g(x)}{x}$ est décroissante avec $\lim_{|x|\to 0} h = 1$ et $\lim_{|x|\to+\infty} h = 0$,*
- *$k : x \mapsto 1 - g(x)$est croissante avec $\lim_{|x|\to 0} k = 0$ et $\lim_{|x|\to+\infty} k = 1$,*
- *Pour tout $1 < \beta < 2$, il existe $C_\beta > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$,*

$$0 \leq \frac{g(x) - 1 + x}{x^\beta} \leq C_\beta.$$

Remarque 27. *Il est enfin à noter que l'on peut raffiner le résultat précédent en rendant les constantes plus explicites en fonction du ratio $\frac{\kappa}{\nu^2}$ et ceci en employant une méthode de type changement de variable Lagrangien (voir [36]).*

Quelques éléments de preuve des théorèmes 13 et 14 : On va commencer par la preuve du théorème 13, il s'agit dans un premier temps d'étudier le système linéarisé associé à (RW_ε) :

$$(LR_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t q_\varepsilon + v.\nabla q_\varepsilon + \operatorname{div} u_\varepsilon = F, \\ \partial_t u_\varepsilon + v.\nabla u_\varepsilon - \mathcal{A}u + p\nabla q_\varepsilon - \dfrac{k}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * q_\varepsilon - q_\varepsilon) = G, \end{cases}$$

avec $\mathcal{A}u = \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u$ et v un champ de vecteur dont l'on va préciser la régularité dans la proposition suivante. Il s'agit par conséquent d'obtenir des estimations uniformes en ε sur $(q_\varepsilon, u_\varepsilon)$ solution de (LR_ε) dans les espaces E_ε^s.

Proposition 10. *Soit $\varepsilon > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $I = [0, T[$ ou $[0, +\infty[$ et $v \in L^1(I, \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}+1}) \cap L^2(I, \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}})$. Supposons que $(q_\varepsilon, u_\varepsilon)$ soit une solution du système (LR_ε) définie sur I. Il existe une constante $C > 0$ dépendant de N, s, μ, ν, p, k, c_0 et C_0 telle que pour tout $t \in I$ on a :*

$$\begin{aligned}&\|u\|_{\widetilde{L}_t^\infty \dot{B}_{2,1}^{s-1}} + \|q\|_{\widetilde{L}_t^\infty \dot{B}_{2,1}^{s-1}} + \|q\|_{\widetilde{L}_t^\infty \dot{B}_{2,1}^{s}} + \|u\|_{\widetilde{L}_t^1 \dot{B}_{2,1}^{s+1}} + \|q\|_{\widetilde{L}_t^1 \dot{B}_\varepsilon^{s+1,s}} + \|q\|_{\widetilde{L}_t^1 \dot{B}_\varepsilon^{s+2,s}} \\ &\leq C e^{C\int_0^t (\|\nabla v(\tau)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}} + \|v(\tau)\|^2_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}})d\tau} \Big(\|u_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{s-1}} + \|q_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{s-1}} + \|q_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{s}} \\ &\qquad + \|F\|_{\widetilde{L}_t^1 \dot{B}_{2,1}^{s-1}} + \|F\|_{\widetilde{L}_t^1 \dot{B}_{2,1}^{s}} + \|G\|_{\widetilde{L}_t^1 \dot{B}_{2,1}^{s-1}}\Big). \quad \text{(III.21)}\end{aligned}$$

La preuve de cette proposition est proche de ce qui est fait dans [52], [59] (voir aussi [8]), pour ce faire on peut procéder à un découpage dyadique à la Littlewood-Paley sur la solution $(q_\varepsilon, u_\varepsilon)$ de (LR_ε), et en utilisant des symétriseurs on obtient des estimations d'énergie sur $(\Delta_l q_\varepsilon, \Delta_l u_\varepsilon)$. La difficulté principale consiste à soigneusement estimer les terme de pénalisation $-\frac{k}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * q_\varepsilon - q_\varepsilon)$ ce qui amènera naturellement l'introduction d'une fréquence de coupure l_ε dépendant de ε et distinguant le comportement hautes et basses fréquences de ρ_ε. Afin de simplifier les notations on notera par la suite q pour q_ε et u pour u_ε.

On commence donc par localiser en fréquences le système (LR_ε) en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley homogène pour tout $l \in \mathbb{Z}$ on a :

$$(LLR_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t q_l + v.\nabla q_l + \operatorname{div} u_l = F_l + R_l, \\ \partial_t u_l + v.\nabla u_l - \mathcal{A}u_l + p\nabla q_l - \dfrac{k}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * q_l - q_l) = G_l + R'_l, \end{cases}$$

avec $R_l = [v.\nabla, \dot{\Delta}_l]q$ et $R'_l = [v.\nabla, \dot{\Delta}_l]u$. Pour $\alpha > 0$ fixé et assez petit (par exemple $\alpha = \min(\mu, \lambda + 2\mu)/4$), on introduit la variable suivante :

$$h_l^2 = \|u_l\|_{L^2}^2 + p\|q_l\|_{L^2}^2 + \alpha\left(\nu\|\nabla q_l\|_{L^2}^2 + 2(u_l|\nabla q_l)_{L^2}\right) + \frac{k}{\varepsilon^2}(q_l|q_l - \phi_\varepsilon * q_l)_{L^2}.$$

Comme première étape on établit le lemme suivant qui s'obtient via des estimations d'énergie bien choisies en symétrisant le système.

Lemme 1. *Il existe $m > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}h_l^2 &+ m\big(2^{2l}\|u_l\|_{L^2}^2 + \|\nabla q_l\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla q_l|\nabla q_l - \phi_\varepsilon * \nabla q_l)_{L^2}\big) \\ &\leq C(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}^2)h_l^2 + C\big((1+2^l)(\|F_l\|_{L^2} + \|R_l\|_{L^2}) \\ &\qquad\qquad + \|G_l\|_{L^2} + \|R'_l\|_{L^2}\big)h_l. \end{aligned} \tag{III.22}$$

Remarque 28. *Selon le lemme précédent on observe que chaque terme de h_l excepté ∇q_l admet un effet régularisant de type parabolique. Le point clé est que le terme $\frac{1}{\varepsilon^2}(q_l|q_l - \phi_\varepsilon * q_l)_{L^2}$ apparaissant dans h_l fournira également une effet parabolique sur ∇q_l et ceci jusqu'à une fréquence de coupure l_ε. Cela incite donc à employer les espaces de Besov hybrides définis dans III.18 et ceci pour une fréquence de coupure en $-\log\varepsilon$.*

On va à présent distinguer basses et hautes fréquences.

-Basses fréquences : Si l'on dénote par $0 < c_0 < C_0$ les rayons de l'anneau $\mathcal{C}$ utilisé dans la décomposition dyadique de Littlewood-Paley, on définit l_ε la fréquence de coupure comme le plus grand entier vérifiant $\varepsilon^2 2^{2l_\varepsilon}C_0 \leq \gamma$ pour un certain $\gamma > 0$ (c'est à dire $l_\varepsilon = [\frac{1}{2}\log_2(\frac{\gamma}{C_0\varepsilon^2}) - 1]$). Pour toute fréquence $l \leq l_\varepsilon$ on a alors par le théorème de Plancherel :

$$(\nabla q_l - \phi_\varepsilon * \nabla q_l|\nabla q_l)_{L^2} = C\int_{2^l\mathcal{C}}(1 - e^{-\varepsilon^2|\xi|^2})|\widehat{\nabla q_l}(\xi)|^2 d\xi \geq C\frac{\varepsilon^2 c_0^2 2^{2l}}{2}\|\nabla q_l\|_{L^2}^2.$$

En combinant l'estimation précédente et le lemme 1 on obtient pour tout $l \leq l_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}h_l^2 &+ m\left(\|\nabla u_l\|_{L^2}^2 + \|\nabla q_l\|_{L^2}^2 + \frac{2^{2l}}{2\varepsilon^2}(q_l - \phi_\varepsilon * q_l|q_l)_{L^2} + C\frac{c_0^2 2^{2l}}{2}\|\nabla q_l\|_{L^2}^2\right) \\ &\leq C(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}^2)h_l^2 + C\left((1+2^l)(\|F_l\|_{L^2} + \|R_l\|_{L^2}) + \|G_l\|_{L^2} + \|R'_l\|_{L^2}\right)h_l. \end{aligned} \tag{III.23}$$

Après intégration en temps, étude des termes de commutateurs et sommation en fréquences on obtient bien le résultat escompté en basses fréquences et on observe en particulier l'effet régularisant souhaité sur la densité (et ceci en particulier grâce au terme $C\frac{c_0^2 2^{2l}}{2}\|\nabla q_l\|_{L^2}^2$). Il reste à traiter le cas des hautes fréquences.

-Les hautes fréquences : Rappelons que l_ε vérifie :

$$\begin{cases} \varepsilon 2^{l_\varepsilon}C_0 \leq \sqrt{\gamma}, \\ \varepsilon 2^{l_\varepsilon+1}C_0 > \sqrt{\gamma}. \end{cases}$$

Pour $l \geq l_\varepsilon + 1$ et $\xi \in 2^l\mathcal{C}$, on a alors par le théorème de Plancherel :

$$(\nabla q_l|\nabla q_l - \phi_\varepsilon * \nabla q_l)_{L^2} = C\int_{2^l\mathcal{C}} (1 - e^{-\varepsilon^2|\xi|^2})|\widehat{\nabla q_l}(\xi)|^2 d\xi \geq (1 - e^{-\gamma(\frac{c_0}{C_0})^2})\|\nabla q_l\|_{L^2}^2,$$

et ceci car :

$$\varepsilon^2|\xi|^2 \geq \varepsilon^2 2^{2l} c_0^2 \geq \varepsilon^2 2^{2(l_\varepsilon+1)} C_0^2 (\frac{c_0}{C_0})^2 > \gamma(\frac{c_0}{C_0})^2. \tag{III.24}$$

Si l'on note par $m' = m.\min(\frac{\gamma}{C_0^2}, 1 - e^{-\gamma(\frac{c_0}{C_0})^2}) > 0$ on a alors pour tout $l \geq l_\varepsilon + 1$ en combinant l'estimation précédente et le lemme 1 :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}h_l + \frac{m'}{\varepsilon^2}h_l \\
&\qquad \leq C(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}^2)h_l + C\Big((1 + 2^l)(\|F_l\|_{L^2} + \|R_l\|_{L^2}) + \|G_l\|_{L^2} + \|R'_l\|_{L^2}\Big). \qquad \text{(III.25)}
\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve de la proposition 10, en effet il suffit d'intégrer en temps l'estimation précédente et de sommer les fréquences. On retrouve en particulier l'effet d'amortissement en $\frac{1}{\varepsilon^2}$ sur la densité en hautes fréquences (en effet ce dernier se lit à travers la définition de l'espace $E_\varepsilon^{\frac{N}{2}}$). □

Le reste de la preuve du théorème 13 est classique et consiste à construire des solutions approchées globales de notre système $(RW)_\varepsilon$ et de passer à la limite en utilisant la compacité offerte par la proposition 10.

Montrons à présent le théorème 14. Nous allons commencer par réécrire le système de Korteweg local (K) comme le système (RW_ε) et ceci à un terme de force près R_ε :

$$(K) \qquad \begin{cases} \partial_t q + u.\nabla q + (1+q)\mathrm{div}\, u = 0, \\ \partial_t u + u.\nabla u - \mathcal{A}u + P'(1).\nabla q - \dfrac{\kappa}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * q - q) = K(q).\nabla q - I(q)\mathcal{A}u + R_\varepsilon, \end{cases}$$

avec $R_\varepsilon \overset{def}{=} -\frac{\kappa}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * q - q - \varepsilon^2\Delta q)$. On peut alors estimer le terme R_ε comme suit.

Corollaire 2. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $\beta \in]1, 2[$, si $q \in \dot{B}_{2,1}^{s+1+2\beta}$ alors $R_\varepsilon \in \dot{B}_{2,1}^s$ et il existe une constante $C_\beta > 0$ telle que l'on ait :*

$$\|R_\varepsilon\|_{\dot{B}_{2,1}^s} \leq \kappa C_\beta \varepsilon^{2(\beta-1)}\|q\|_{\dot{B}_{2,1}^{s+1+2\beta}}.$$

Remarque 29. *Dans la suite on utilisera l'estimation précédente lorsque $\beta \in]1, 2[$ avec $s = \frac{N}{2} - \alpha - 1$ ($\alpha \in]0, 1]$), ce qui impliquera que $2\beta \in [1 + \alpha, 2 + \alpha]$.*

On peut maintenant écrire le système vérifier par $(\delta q, \delta u) = (q_\varepsilon - q, u_\varepsilon - u)$:

$$\begin{cases} \partial_t \delta q + u_\varepsilon.\nabla\delta q + \mathrm{div}\,\delta u = \delta F, \\ \partial_t \delta u + u_\varepsilon.\nabla\delta u - \mathcal{A}\delta u + P'(1).\nabla\delta q - \dfrac{\kappa}{\varepsilon^2}\nabla(\phi_\varepsilon * \delta q - \delta q) = \delta G - R_\varepsilon, \end{cases} \tag{III.26}$$

avec :

$$\begin{cases} \delta F \overset{def}{=} \sum_{i=1}^3 \delta F_i \\ \delta G \overset{def}{=} \sum_{i=1}^5 \delta G_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta F_1 = -\delta u.\nabla q \\ \delta F_2 = -\delta q.\mathrm{div}\, u_\varepsilon \\ \delta F_3 = -q.\mathrm{div}\,\delta u \end{cases} \quad \begin{cases} \delta G_1 = -\delta u.\nabla u \\ \delta G_2 = (K(q_\varepsilon) - K(q)).\nabla q_\varepsilon \\ \delta G_3 = K(q).\nabla\delta q \\ \delta G_4 = (I(q_\varepsilon) - I(q))\mathcal{A}u_\varepsilon \\ \delta G_5 = -I(q)\mathcal{A}\delta u. \end{cases}$$

En utilisant la proposition 10 avec $s=\frac{N}{2}-\alpha$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|\delta u\|_{\widetilde{L}^\infty_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}_{2,1}}+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^\infty_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}_{2,1}}+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^\infty_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha}_{2,1}}+\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha+1}_{2,1}}\\
&\qquad+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}_\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha+1,\frac{N}{2}-\alpha}}+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}_\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha+2,\frac{N}{2}-\alpha}}\leq Ce^{C\int_0^t(\|\nabla u_\varepsilon(\tau)\|_{\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2,1}}+\|u_\varepsilon(\tau)\|^2_{\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2,1}})d\tau}\\
&\qquad\qquad\times\Big(\|\delta F\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}_{2,1}}+\|\delta F\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha}_{2,1}}+\|\delta G\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}_{2,1}}+\|R_\varepsilon\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}_{2,1}}\Big).
\end{aligned}\tag{III.27}$$

Il s'agit à présent d'estimer les termes de reste de (III.27) via le paraproduit, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
h(t)\leq C_\eta\bigg(&\int_0^t h(\tau)\Big(\|q\|_{\dot{B}^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}}+\|q\|_{\dot{B}^{\frac{N}{2}+2}_{2,1}}+\|u_\varepsilon\|_{\dot{B}^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}}+\|u\|_{\dot{B}^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}}+\|q_\varepsilon\|_{\dot{B}_\varepsilon^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}}}\Big)d\tau\\
&+\kappa C_\beta\varepsilon^{2(\beta-1)}\|q\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}^{\frac{N}{2}+2\beta-\alpha}_{2,1}}+4\eta h(t)\bigg).
\end{aligned}\tag{III.28}$$

Par le lemme de Gronwall et les estimations uniformes obtenues sur $(q_\varepsilon,u_\varepsilon)$ via la proposition III.21 on a alors pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\|\delta u\|_{\widetilde{L}^\infty_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}_{2,1}}+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^\infty_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha-1}_{2,1}}+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^\infty_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha}_{2,1}}+\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}^{\frac{N}{2}-\alpha+1}_{2,1}}\\
&\qquad\qquad+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}_\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha+1,\frac{N}{2}-\alpha}}+\|\delta q\|_{\widetilde{L}^1_t\dot{B}_\varepsilon^{\frac{N}{2}-\alpha+2,\frac{N}{2}-\alpha}}\leq C_{\eta,\alpha}\kappa\varepsilon^\alpha,
\end{aligned}\tag{III.29}$$

ce qui conclut la preuve du théorème 14. ■

III.3 Du système de Korteweg local à Euler compressible [35]

On va s'intéresser à présent à la limite des solutions du système de Korteweg local lorsque les coefficients de viscosité et de capillarité tendent vers 0. Dans cet article avec F. Charve [35], on montre dans un premier temps l'existence de solutions fortes globales pour le système de Korteweg en une dimension lorsque la capillarité vérifie un régime de type pression quantique $\kappa(\rho)=\frac{\kappa}{\rho}$ avec $\kappa>0$ alors que les coefficients de viscosité sont ceux du système de Saint Venant avec $\mu(\rho)=\sqrt{\kappa}\rho$. Enfin dans un second temps on justifie rigoureusement la convergence des solutions du système de Korteweg vers des solutions entropiques du système d'Euler compressible lorsque la viscosité et la capillarité tendent vers 0. De plus on généralise les travaux de P.-L. Lions et al [165, 166] lorsqu'on ne suppose pas nécessairement les données initiales uniformément bornées dans L^∞, on utilise pour cela de nouveaux résultats de type compacité par compensation dûs à Q. Chen et M. Perepiltsa dans [40].
On va considérer ici le modèle suivant de Korteweg local :

$$\begin{cases}\partial_t\rho^\varepsilon+\partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)=0,\\ \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)+\partial_x(\rho^\varepsilon(u^\varepsilon)^2)-2\varepsilon\partial_x(\rho^\varepsilon\partial_x u^\varepsilon)+\partial_x(a(\rho^\varepsilon)^\gamma)=\varepsilon^2\partial_x K,\end{cases}\tag{III.30}$$

où le tenseur de capillarité a la forme suivante :

$$\partial_x K=\partial_x\big(\rho^\varepsilon\kappa(\rho^\varepsilon)\partial_{xx}\rho^\varepsilon+\frac{1}{2}(\kappa(\rho^\varepsilon)+\rho^\varepsilon\kappa'(\rho^\varepsilon))|\partial_x\rho^\varepsilon|^2\big)-\partial_x\big(\kappa(\rho^\varepsilon)(\partial_x\rho^\varepsilon)^2\big);\tag{III.31}$$

κ est le coefficient de capillarité et est choisi tel que $\kappa(\rho)=\rho^{-1}$ (ce qui correspond à la pression dite quantique).

Comme dans [140, 113], un point clé consiste à introduire une nouvelle vitesse efficace $v^\varepsilon = u^\varepsilon + \varepsilon\partial_x(\ln\rho^\varepsilon)$ qui permet de réécrire le système (III.30) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t\rho^\varepsilon + \partial_x(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) - \varepsilon\partial_{xx}\rho^\varepsilon = 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) + \partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon v^\varepsilon) - \varepsilon\partial_x(\rho^\varepsilon\partial_x v^\varepsilon) + \partial_x(a(\rho^\varepsilon)^\gamma) = 0, \end{cases} \tag{III.32}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{cases} \partial_t\rho^\varepsilon + \partial_x(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) - \varepsilon\partial_{xx}\rho^\varepsilon = 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) + \partial_x(\rho^\varepsilon(v^\varepsilon)^2) - \varepsilon\partial^2_{xx}(\rho^\varepsilon v^\varepsilon) + \partial_x(a(\rho^\varepsilon)^\gamma) = 0. \end{cases} \tag{III.33}$$

On va supposer maintenant que la densité ρ ne s'annule pas. En effet on va considérer les données initiales suivantes pour le système (III.32) :

$$\rho^\varepsilon(0,x) = \rho_0^\varepsilon(x) > 0, \;\; u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x), \tag{III.34}$$

telles que :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x)) = (\rho^\pm, u^\pm), \text{ avec } \rho^\pm > 0.$$

On va donc étudier la limite des solutions du système (III.32) lorsque ε tends vers 0 et montrer qu'elles convergent vers une solution entropique du système d'Euler compressible :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2) + \partial_x(a\rho^\gamma) = 0. \end{cases} \tag{III.35}$$

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats d'existence globale de solutions entropiques pour le système d'Euler compressible. On va se placer dans le cadre d'une pression de loi γ $P(\rho) = a\rho^\gamma$ avec $\gamma > 1$ et $a > 0$. Le fait que la pression soit croissante et convexe est essentiel ici car le système est alors strictement hyperbolique et de plus on a l'existence d'une infinité de paires d'entropie-flux. La théorie de P. Lax- J. Glimm permet de construire une solution entropique globale que ce soit pour le problème de Riemann ou encore pour des données initiales BV petites (voir [156, 92]). Pour l'unicité de telles solutions on réfère aux travaux de S. Bianchini et A. Bressan [15].

Au début des années 80 R. Di Perna initia un nouveau programme consistant à généraliser les travaux de J. Glimm en permettant de relaxer les conditions de régularité sur les données initiales (ρ_0, u_0) et en les choisissant en particulier seulement L^∞. Dans [69, 70], R. Di Perna prouve l'existence d'une solution globale entropique de (III.35) pour $\gamma = 1 + \frac{2}{2d+1}$ et $\gamma = 2k + \frac{3}{2k} + 1$ (avec $k \geq 1$, $d \geq 2$) en utilisant la théorie de la "compacité par compensation" introduite par L. Tartar dans [196]. Ce résultat a été étendu par Q. Chen dans [39] dans le cas $\gamma \in (1, \frac{5}{3}]$ et par P.-L. Lions et al dans [166] dans le cas $\gamma \in [3, \infty)$. Dans [165], P.-L. Lions et al généralise ce résultat au cas général $\gamma \in (1, 3)$, et finalement le cas $\gamma = 1$ est traité dans [130]. Mentionnons que ces résultats sont obtenus via un processus artificiel de viscosité et de capillarité évanescentes.

Le problème de la limite des équations de Navier-Stokes compressibles avec viscosité évanescente resta longtemps un problème ouvert jusque'à ce que Q. Chen et M. Perepelista dans [40] prouvent que les solutions du système de Navier-Stokes compressible avec viscosité constante convergent en une dimension vers une solution entropique du système d'Euler compressible avec énergie finie. Ce résultat a été généralisé dans [131] au cas de coefficients de viscosité dépendant de la densité. Inspiré par [40] et [131], nous allons montrer que les solutions du système de Korteweg (III.32) sélectionnent également lorsque la viscosité et la capillarité tendent vers 0 une solution entropique du système d'Euler compressible avec énergie finie pour une pression de type loi γ (le problème reste ouvert pour le cadre d'une pression Van der Waals et dans ce cadre la notion de solution entropique n'est pas adaptée car il n'existe aucune paire d'entropie-flux). Avant cela, nous commencerons par montrer l'existence de solutions fortes globales pour le système de Korteweg avec

des coefficients de viscosité de type Saint-Venant et une capillarité de type pression quantique en une dimension.
Commençons par rappeler quelques définitions classiques sur les paires d'entropie-flux et les estimations d'énergie. Suivant [166], [40] et [131] on a la définition de paire entropie-flux.

Définition 9. *Une paire de fonctions $(\eta(\rho, v), H(\rho, v))$ (ou dénotée $(\eta(\rho, m), H(\rho, m))$ si elle est vue en fonction de ρ et $m = \rho v$) est appelée une paire entropie-flux pour le système (III.32), si pour toute solution régulière de (III.35) on a :*

$$[\eta(\rho, v)]_t + [H(\rho, v)]_x = 0.$$

De plus $\eta(\rho, v)$ est appelée entropie faible si $\eta(0, v) = 0$ pour tout v fixé.

Définition 10. *Une entropie $\eta(\rho, m)$ est convexe si sa Hessienne $\nabla^2 \eta(\rho, m)$ est définie positive.*

De tels η satisfont l'équation des ondes ($\theta = \frac{\gamma-1}{2}$) :

$$\partial_{\rho\rho}\eta = \frac{P'(\rho)}{\rho^2} = a\rho^{\gamma-3}\partial_{vv}\eta.$$

Dans [166] P.-L. Lions et al obtiennent une représentation explicite de toutes les entropies faibles (η, H) que l'on détaillera plus tard. L'énergie mécanique est en particulier associée à la paire entropie-flux suivante :

$$\eta^*(\rho, m) = \frac{m^2}{2\rho} + e(\rho), \quad H^*(\rho, m) = \frac{m^3}{2\rho^2} + me^{'}(\rho), \tag{III.36}$$

où $e(\rho) = \frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma$ représente l'énergie interne du gaz.
Soit $(\bar{\rho}, \bar{v})$ une paire de fonctions régulières (en x) satisfaisant $(\bar{\rho}(x), \bar{v}(x)) = (\rho^\pm, v^\pm)$ lorsque $\pm x \geq L_0$ pour un certain $L_0 > 0$. L'énergie mécanique totale pour le système (III.35) dans $\mathbb{R}$ pour les paires de référence $(\bar{\rho}(x), \bar{v}(x))$ se lit :

$$\begin{aligned} E[\rho, v](t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\eta^*(\rho, m) - \eta^*(\bar{\rho}, \bar{m}) - \nabla\eta^*(\bar{\rho}, \bar{m}).(\rho - \bar{\rho}, m - \bar{m})\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{2}\rho(t, x)|v(t, x) - \bar{v}(x)|^2 + e^*(\rho(t, x), \bar{\rho}(x))\big) dx \end{aligned} \tag{III.37}$$

où $e^*(\rho, \bar{\rho}) = e(\rho) - e(\bar{\rho}) - e'(\bar{\rho})(\rho - \bar{\rho}) \geq 0$. En présence de capillarité l'énergie mécanique totale pour le système (III.30) avec $\kappa(\rho) = \frac{1}{\rho}$ correspond à :

$$E_1[\rho, u](t) = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{2}\rho(t, x)|u(t, x) - \bar{u}(x)|^2 + e^*(\rho(t, x), \bar{\rho}(x)) + 2\varepsilon^2(\partial_x \rho^{\frac{1}{2}})^2\big) dx, \tag{III.38}$$

et pour le système (III.32) cela donne :

$$E_2[\rho, v](t) = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{2}\rho(t, x)|v(t, x) - \bar{v}(x)|^2 + e^*(\rho(t, x), \bar{\rho}(x))\big) dx. \tag{III.39}$$

Nous allons maintenant définir ce qu'est une solutions entropique.

Définition 11. *Soit (ρ_0, v_0) des données initiales avec énergie finie, c'est à dire satisfaisant $E[\rho_0, v_0] \leq E_0 < +\infty$. Une paire de fonctions mesurables $(\rho, v) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est une solution entropique d'énergie finie du problème de Cauchy (III.35) si elle a les propriétés suivantes :*

1. *L'énergie totale est localement bornée en temps : c'est à dire il existe une fonction $C(E,t)$, défine sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et continue en t pour chaque $E \in \mathbb{R}^+$ telle que pour presque tout $t > 0$:*
$$E[\rho, v](t) \leq C(E_0, t).$$
2. *L'inégalité d'entropie :*
$$\eta^\psi(\rho, v)_t + H^\psi(\rho, v)_x \leq 0,$$
est satisfaite au sens des distributions pour toute fonction test $\psi(s) \in \{\pm 1, \pm s, s^2\}$. On renvoie à la proposition 11 relative à la construction des paires d'entropie-flux $\eta^\psi(\rho, v)$ et $H^\psi(\rho, v)$ en fonction de ψ.
3. *Les données initiales (ρ_0, v_0) sont atteintes au sens des distributions.*

Donnons maintenant les principales conditions que l'on va imposer sur les données initiales $(\rho_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$ du système (III.33), (voir aussi [40]).

Définition 12. *Nous dirons que les données initiales $(\rho_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$ satisfont la condition ($\mathcal{H}$) si il existe des constantes positives C_0 et C_1 indépendantes de ε telles que :*
- $\rho_0^\varepsilon > 0$ *et* $\int_{\mathbb{R}} \rho_0^\varepsilon(x)|u_0^\varepsilon(x) - \bar{u}(x)| \leq C_0 < +\infty$,
- *L'énergie est finie :*
$$E_1[\rho_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon] + E_2[\rho_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon] \leq C_1 < +\infty.$$
- $(\rho_0^\varepsilon, \rho_0^\varepsilon v_0^\varepsilon) \to_{\varepsilon \to 0} (\rho_0, \rho_0 v_0)$ *au sens des distributions avec* $\rho_0 \geq c > 0$ *p.p.*

Dans le théorème suivant on montre la convergence des solutions globales de (III.32) vers une solution entropique du système d'Euler compressible (III.35).

Théorème 15. *Soit $\gamma > 1$ et $(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ avec $m_\varepsilon = \rho^\varepsilon v^\varepsilon$ la solution forte globale du système (III.32) avec données initiales $(\rho_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$ vérifiant uniformément en ε la définition 12 et telles que ces données initiales $(\rho_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$ soient assez régulières. Alors, lorsque $\varepsilon \to 0$, il existe une sous-suite de $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ qui converge presque partout vers une solution entropique d'énergie finie $(\rho, \rho v)$ du problème de Cauchy (III.35) avec pour donnée initiale $(\rho_0, \rho_0 v_0)$. Plus précisément on a :*
- ρ^ε *converge fortement à une sous suite près vers ρ dans $L^{\gamma+1-\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ pour tout $0 < \alpha < 1$.*
- $(\rho^\varepsilon)^{\frac{1}{3}} v^\varepsilon$ *converge fortement à une sous suite près vers $\rho^{\frac{1}{3}} v$ dans $L^{3-\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ pour tout $\alpha > 0$ assez petit.*
- $(\rho^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} v^\varepsilon$ *converge fortement à une sous suite près vers $\rho^{\frac{1}{2}} v$ dans $L^{2+\frac{2\gamma}{2\gamma+3}-\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ pour tout $\alpha > 0$ assez petit.*

Remarque 30. *Rappelons que la vitesse effective v est définie de la manière suivante :*
- $v(t,x) = \frac{m(t,x)}{\rho(t,x)}$ *lorsque* $\rho(t,x) \neq 0$,
- $v(t,x) = 0$ *presque partout dans* $\{\rho(t,x) = 0\}$.

Remarque 31. *A la différence de [166] il n'est pas nécessaire de borner uniformément en ε les données initiales $(\frac{1}{\rho_0^\varepsilon}, \rho_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$ en norme L^∞, même si ces données initiales doivent appartenir à L^∞ afin d'assurer l'existence globale de solutions fortes $(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ et ceci en utilisant les invariants de Riemann.*
Mentionnons également que le système approché utilisé par P.-L. Lions et al dans [166] pour construire des solutions globales entropiques à la limite correspond exactement au système de Korteweg modulo l'introduction de la vitesse effective v.Il est enfin à noter que les résultats précédents ont été récemment étendus à des cas plus généraux en terme de choix des coefficients de capillarité et de viscosité dans [88].

On va à présent rappeler un théorème clé de compacité par compensation dû à Q. Chen et M. Perepelitsa que l'on utilisera par la suite pour la preuve du théorème 15.

Théorème 16. *(**Q. Chen- M. Perepelitsa [40]**) Soit $\psi \in C_0^2(\mathbb{R})$ et soit (η^ψ, H^ψ) les paires entropies-flux faibles générées par ψ (voir le proposition 11). Supposons que la suite $(\rho^\varepsilon(t,x), v^\varepsilon(t,x))$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ avec $m^\varepsilon = \rho^\varepsilon v^\varepsilon$ satisfasse les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $-\infty < a < b < +\infty$ et tout $t > 0$, il existe $C(t,a,b) > 0$ indépendant de ε tel que :*
$$\int_0^t \int_a^b (\rho^\varepsilon)^{\gamma+1} dx d\tau \leq C(t,a,b). \tag{III.40}$$
2. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $C(t,K) > 0$ indépendant de ε tel que (avec $\theta = \frac{\gamma-1}{2} > 0$) :*
$$\int_0^t \int_K \big((\rho^\varepsilon)^{\gamma+\theta} + \rho^\varepsilon |v^\varepsilon|^3\big) dx d\tau \leq C(t,K). \tag{III.41}$$
3. *La suite de mesure d'entropies dissipatives :*
$$\eta^\psi(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + H^\psi(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x \ \text{ est compacte dans } \ H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}). \tag{III.42}$$

Alors il existe une sous suite $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ (encore dénotée $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$) et des fonctions mesurables (ρ, m) telles que :
$$(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \to (\rho, m), \ \text{p.p lorsque } \varepsilon \to 0. \tag{III.43}$$

Remarque 32. *Rappelons que l'estimation (III.41) a été dérivée par P.-L. Lions et al dans [166] en la reliant au lemme des moments introduit par B. Perthame dans [178] pour les équations cinétiques de Vlassov-Poisson et Fokker-Planck.*

Quelques éléments de preuve du théorème 15 : Nous allons commencer par rappeler quelques propriétés liées aux paires d'entropie-flux pour le système (III.35) (voir [166] pour plus de détails). Une solution régulière de (III.35) satisfait les lois de conservations :
$$\partial_t \eta(\rho, u) + \partial_x H(\rho, u) = 0,$$
si et seulement si :
$$H_\rho = u\eta_\rho + \frac{P'(\rho)}{\rho}\eta_u, \quad H_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u,$$
ou de manière équivalente :
$$\eta_{\rho\rho} = \frac{P'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu} = a\rho^{\gamma-3}\eta_{uu}. \tag{III.44}$$
On considère ici les données initiales suivantes pour l'équation des ondes III.44 :
$$\eta(0,u) = 0, \quad \eta_\rho(0,u) = \psi(u). \tag{III.45}$$
On peut ainsi décrire η et H suivant P.-L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor dans [166].

Proposition 11. *Pour $\rho \geq 0$, $u, \omega \in \mathbb{R}$,*

- *La solution fondamentale de (III.44)-(III.45) (qui correspond à $\eta_\rho(0,u) = \delta(u)$) est donnée par :*
$$\chi(\rho, \omega) = [\rho^{2\theta} - \omega^2]_+^\lambda, \tag{III.46}$$
avec $\lambda = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} > -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\gamma-1}{2}$ *et :*
$$t_+^\lambda = \begin{cases} t^\lambda & if\, t > 0, \\ 0 & if\, t \leq 0. \end{cases}$$

– *La solution de (III.44)-(III.45) est donnée par :*

$$\eta^\psi(\rho,\rho u)=\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)\chi(\rho,\xi-u)d\xi. \tag{III.47}$$

– *η est convexe en $(\rho,\rho u)$ pour tout ρ, u si et seulement si ψ est convexe.*
– *Le flux d'entropie H^ψ associée à η^ψ est donnée par :*

$$H^\psi(\rho,\rho u)=\int_{\mathbb{R}}\psi(\xi)[\theta\xi+(1-\theta)u]\chi(\rho,\xi-u)d\xi. \tag{III.48}$$

Plus précisément, dans notre cas pour une pression de type loi γ on a (voir [40]) :

$$\eta^\psi(\rho,\rho u)=\rho\int_{-1}^{1}\psi(u+\rho^\theta s)(1-s^2)^\lambda ds, \tag{III.49}$$

et

$$H^\psi(\rho,\rho u)=\rho\int_{-1}^{1}(u+\theta\rho^\theta s)\psi(u+\rho^\theta s)(1-s^2)^\lambda ds. \tag{III.50}$$

Lorsque $\psi(s)=\frac{1}{2}s^2$, l'entropie paire correspondante est celle de l'énergie mécanique avec son flux associé :

$$\eta^*(\rho,m)=\frac{m^2}{2\rho}+e(\rho),\quad H^*(\rho,m)=\frac{m^3}{2\rho^2}+me^{'}(\rho), \tag{III.51}$$

où $e(\rho)=\frac{\kappa}{\gamma-1}\rho^\gamma$. La proposition suivante donne des informations importantes sur les paires d'entropies (voir en particulier [165], lemme 4).

Proposition 12. *Pour $\psi(s)=\frac{1}{2}s|s|$, il existe une constante positive $C>0$, dépendant seulement de $\gamma>1$, tel que la paire d'entropie-flux (η^ψ,H^ψ) vérifie :*

$$\begin{aligned}
&|\eta^\psi(\rho,u)|\le C(\rho|u|^2+\rho^\gamma),\\
&H^\psi(\rho,u)\ge C^{-1}(\rho|u|^3+\rho^{\gamma+\theta}),\quad \textit{pour tout } \rho\ge 0 \textit{ et } u\in\mathbb{R},\\
&|\eta^\psi_m(\rho,u)|\le C(|u|+\rho^\theta),\\
&|\eta^\psi_{mm}(\rho,u)|\le C\rho^{-1}.
\end{aligned} \tag{III.52}$$

On rappelle maintenant la formulation cinétique de (III.35) introduite dans [165, 166].

Théorème 17. *Soit $(\rho,\rho v)\in L^\infty(\mathbb{R}^+,L^1(\mathbb{R}))$ d'énergie finie et $\rho\ge 0$, alors il existe une solution entropique (III.35) si et seulement si il existe une mesure bornée négative m sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2$ telle que la fonction $\chi(\rho,\xi-u)$ vérifie :*

$$\partial_t\chi+\partial_x[(\theta\xi+(1-\theta)u)\chi]=\partial_{\xi\xi}m(t,x,\xi). \tag{III.53}$$

On rappelle que le système (III.32) a la forme suivante :

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\partial_x(\rho v)-\varepsilon\partial_{xx}\rho=0,\\ \partial_t(\rho v)+\partial_x(\rho v^2)-\varepsilon\partial_{xx}(\rho v)+\partial_x(a(\rho)^\gamma)=0,\end{cases} \tag{III.54}$$

et suivant R. Di Perna [69] on peut réécrire ce système en fonction du moment $m=\rho v$ ce qui donne :

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\partial_x(m)-\varepsilon\partial_{xx}\rho=0,\\ \partial_t(m)+\partial_x(\dfrac{m^2}{\rho})-\varepsilon\partial_{xx}(m)+\partial_x(a(\rho)^\gamma)=0.\end{cases} \tag{III.55}$$

Ce système a été étudié par R. Di Perna (voir [69]) où il prouve l'existence de solutions fortes globales (voir le théorème 4.1 p 29 dans [69] que l'on va rappeler). On réfère également aux travaux YA. I. de Kanel dans [143] et de A. V. Kazhikhov et V. V. Shelukhin dans [145] qui montrent l'existence de solutions fortes globales pour Navier-Stokes compressible avec coefficients de viscosité constants en une dimension.

Théorème 18 ([69])**.** *Soit* $(\rho_0 - 1, u_0 - 1) \in C^2 \cap H^2$ *et* $\rho_0 \geq c > 0$*. Il existe alors une solution forte globale* (ρ, u) *du problème de Cauchy précédent avec donnée initiale* (ρ_0, u_0) *telle que :*

$$(\rho(\cdot, t) - 1, u(\cdot, t) - 1) \in C^2 \cap H^2,\ \rho(t, \cdot) \geq c(t) > 0,$$

avec c une fonction régulière.

Afin d'obtenir un tel résultat il suffit d'obtenir des estimations sur (ρ, m) dans des espaces de Sobolev avec une régularité assez grande ; pour ce faire il s'agit de contrôler $(\rho, \frac{1}{\rho}, m)$ en norme L^∞ :

$$\|(\frac{1}{\rho}, \rho, m)(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(t, \|\frac{1}{\rho_0}\|_{L^\infty}, \|\rho_0\|_{L^\infty}, \|m_0\|_{L^\infty}), \tag{III.56}$$

avec C une fonction continue dépendant du temps, on peut alors utiliser la parabolicité du système pour avoir :

$$\begin{aligned} &\|(\rho, m)(t, \cdot)\|_{C^k} \leq a_k(t, \|\rho_0\|_{C^k}, \|m_0\|_{C^k}),\\ &\|(\rho, m)(t, \cdot)\|_{H^k} \leq b_k(t, \|\rho_0\|_{H^k}, \|m_0\|_{C^k}), \end{aligned} \tag{III.57}$$

avec a_k et b_k des fonctions régulières dépendant du temps et de $C(\cdot)$. Ces dernières estimations (III.57) sont standards et sont obtenues via des estimations d'énergie combinées avec le lemme de Gronwall (voir [69]).

La difficulté principale consiste donc à montrer les estimations (III.56) qui s'obtiennent par une adaptation astucieuse des invariants de Riemann au système (III.55). En suivant [69, 165] on a pour chaque paire d'entropie-flux $(\eta(\rho, u), H(\rho, u)$ définie par (III.47) et (III.48) où η est une fonction convexe de (ρ, m) l'égalité suivante (on écrit $\eta = \bar{\eta}(\rho, m)$) :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \partial_x H &= \varepsilon \bar{\eta}_\rho \partial_{xx} \rho_n + \varepsilon \bar{\eta}_m \partial_{xx} m_n,\\ &= \varepsilon \partial_{xx} \eta - \varepsilon(\bar{\eta}_{\rho\rho}(\partial_x \rho_n)^2 + 2\bar{\eta}_{\rho m}(\partial_x \rho_n)(\partial_x m_n) + \bar{\eta}_{mm}(\partial_x m_n)^2). \end{aligned}$$

On définit μ par :

$$\mu = \bar{\eta}_{\rho\rho}(\partial_x \rho)^2 + 2\bar{\eta}_{\rho m}(\partial_x \rho)(\partial_x m) + \bar{\eta}_{mm}(\partial_x m)^2.$$

Via la proposition 11, on vérifie que $\mu \geq 0$. On obtient alors :

$$\partial_t \eta(\rho, v) + \partial_x H((\rho, v) - \varepsilon \bar{\eta}_\rho \partial_{xx} \rho \leq 0 \ \text{ dans } \mathbb{R} \times (0, +\infty).$$

En appliquant la même méthode que pour prouver le théorème 17, on obtient la formulation cinétique suivante :

$$\partial_t \chi + \partial_x([\theta\xi + (1 - \theta)v_n]\chi) - \partial_{xx}\chi = \partial_{\xi\xi}\bar{m}_n \ \text{ sur } \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty), \tag{III.58}$$

où $\bar{m}_n$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$. Finalement on retrouve le principe du maximum en multipliant (III.58) par les fonctions convexes $g(\xi) = (\xi - \xi_0)_+$, $g(\xi) = (\xi - \xi_0)_-$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$. En effet puisque :

$$-C \leq \min_x (v_0 - \rho_0^\theta) \leq \max_x (v_0 + \rho_0^\theta) \leq C,$$

et que :

$$\text{supp}\xi = [v - \rho^\theta, v + \rho^\theta],$$

pour ξ_0 assez grand on a :

$$\mathrm{supp}\xi_0 \cap \mathrm{supp}\chi = \emptyset.$$

Cela implique que :

$$-C \leq \min_x (v_0 - \rho_0^\theta) \leq v_- \rho^\theta \leq v + \rho^\theta \leq \max_x (v_0 + \rho_0^\theta) \leq C,$$

ce qui n'est rien d'autre que ce que l'on obtient via les invariants de Riemann. En particulier ont en déduit que ρ et v appartiennent à $L^\infty(0,T,L^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T>0$. La dernière étape consiste à montrer que $\frac{1}{\rho}$ est dans $L^\infty(0,T,L^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T>0$ et ceci en utilisant le principe du maximum sur la première équation de (III.54) et le fait que v est dans $L^\infty(0,T,L^\infty(\mathbb{R}))$. Cela prouve donc l'existence de solutions fortes globales pour le système de Korteweg (III.32).

On va donc maintenant considérer $(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ les solutions fortes globales du système (III.32) vérifiant :

$$\rho^\varepsilon(t,x) \geq c^\varepsilon(t), \text{ pour un certain } c^\varepsilon(t) > 0, \tag{III.59}$$

et :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)(x,t) = (\rho^\pm, u^\pm). \tag{III.60}$$

On travaille par la suite autour d'états non constants $(\bar{\rho}, \bar{v})$ vérifiant à la limite :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\bar{\rho}, \bar{v})(x,t) = (\rho^\pm, u^\pm).$$

Il s'agit à présent de vérifier les propriétés (III.40), (III.41) et (III.42) afin d'utiliser le théorème 16 de Q. Chen et M. Perepelitsa (voir [40]) et ainsi prouver le théorème 15.
Pour simplifier les notations on va supprimer dans la suite les ε ce qui signifie que $(\rho, v) = (\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. On montre dans un premier temps une estimation d'énergie pour notre système (III.32).

Lemme 2. *Supposons que $E_1[\rho_0, u_0] \leq E_0 < +\infty$ pour un certain $E_0 > 0$ indépendant de ε, alors il existe $C(t) > 0$ dépendant de E_0, t, $\bar{\rho}$, et $\bar{u}$ tel que :*

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} E_1[\rho,u](\tau) + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho u_x^2 dx d\tau \leq C(t), \tag{III.61}$$

et :

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} E_2[\rho,v](\tau) + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho v_x^2 dx d\tau + a\gamma\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho^{\gamma-2} \rho_x^2 dx d\tau \leq C(t). \tag{III.62}$$

On va à présent montrer la propriété (III.40) qui correspond à un gain d'intégrabilité sur la pression ρ^γ.

Lemme 3. *Sous les mêmes conditions que le lemme 2, pour tout $-\infty < a < b < +\infty$ et tout $t > 0$, on a :*

$$\int_0^t \int_a^b \rho^{\gamma+1} dx d\tau \leq C(t,a,b), \tag{III.63}$$

où $C(t) > 0$ dépend de E_0, a, b, γ, t, $\bar{\rho}$, $\bar{u}$.

Remarque 33. *La preuve suit les mêmes idées que dans le cadre de Navier-Stokes compressible avec coefficients de viscosité constants lorsque l'on montre un gain d'intégrabilité sur la pression (voir [163]) pour ensuite prouver l'existence de solutions faibles globales. En effet il s'agit essentiellement d'appliquer l'opérateur $(\Delta)^{-1}\mathrm{div}$ et ensuite multiplier l'équation par ρ^α avec α petit et intégrer en temps et en espace.*

Preuve. Soit $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que :

$$0 \leq \omega(x) \leq 1, \ \omega(x) = 1 \ \text{ pour } x \in [a,b], \ \text{et} \operatorname{supp} \omega = (a-1, b+1).$$

Par l'équation du moment de (III.32) et en localisant on a :

$$(P(\rho)\omega)_x = -(\rho u v \omega)_x + (P(\rho) + \rho u v)\omega_x - (\rho v)_t \omega + \varepsilon(\rho v_x \omega)_x - \varepsilon \rho v_x \omega_x. \tag{III.64}$$

Il s'agit maintenant d'intégrer (III.64) en espace sur $(-\infty, x)$ et de multiplier l'équation obtenue ensuite par $\rho\omega$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} \rho P(\rho)\omega^2 =& \varepsilon \rho^2 v_x \omega^2 - (\rho\omega \int_{-\infty}^x \rho v \, \omega dy)_t - (\rho u \omega \int_{-\infty}^x \rho v \, \omega dy)_x \\ &+ \rho u \omega_x \int_{-\infty}^x \rho v \, \omega dy + \rho\omega \int_{-\infty}^x [(\rho u v + P(\rho))\omega_x - \varepsilon \rho v_x \omega_x] dx. \end{aligned} \tag{III.65}$$

On intègre ensuite (III.65) sur $(0,t) \times \mathbb{R}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a\rho^{\gamma+1}\omega^2 dx d\tau =& \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho^2 v_x \omega^2 - \int_{\mathbb{R}} (\rho\omega \int_{-\infty}^x \rho v \, \omega dy) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} (\rho_0 \omega \int_{-\infty}^x \rho_0 v_0 \, \omega dy) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \big(\rho u \omega_x \int_{-\infty}^x \rho v \, \omega dy\big) dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \big(\rho\omega \int_{-\infty}^x [(\rho u v + P(\rho))\omega_x - \varepsilon \rho v_x \omega_x] dx\big) dx d\tau. \end{aligned} \tag{III.66}$$

Il s'agit ensuite de contrôler chaque terme du membre de droite dans (III.66).
On va maintenant chercher à prouver un gain d'intégrabilité sur la vitesse v. On a le lemme suivant.

Lemme 4. *Supposons que (ρ_0, v_0) satisfasse les conditions du lemme 2 et qu'il existe $M_0 > 0$ indépendant de ε tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) |v_0(x) - \bar{v}(x)| dx \leq M_0 < +\infty, \tag{III.67}$$

alors pour tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $C(t,K)$ indépendant de ε tel que :

$$\int_0^t \int_K (\rho^{\gamma+\theta} + \rho|v|^3) dx d\tau \leq C(t,K). \tag{III.68}$$

Remarque 34. *Comme dans [40] et [131], afin de prouver l'inégalité (III.68), on utilisera les mêmes ingrédients utilisés dans [165] où cette inégalité a été prouvée pour la première fois.*

Preuve. Comme dans [40] on va travailler avec la fonction $\psi(s) = \frac{1}{2}|s|s$ de la proposition 12. Si l'on considère η_m^ψ comme une fonction dépendant de (ρ, v), on a pour tout $\rho \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} |\eta_{mv}^\psi(\rho, v)| \leq C, \\ |\eta_{m\rho}^\psi(\rho, v)| \leq C\rho^{\theta-1}. \end{cases} \tag{III.69}$$

Pour cette paire d'entropie faible (η^ψ, H^ψ), on remarque que :

$$\eta^\psi(\rho, 0) = \eta_\rho^\psi(\rho, 0) = 0, \ H^\psi(\rho, 0) = \frac{\theta}{2}\rho^{3\theta+1} \int_{\mathbb{R}} |s|^3 [1-s^2]_+^\lambda,$$

et :

$$\eta^{\psi}_m(\rho,0)=\beta\rho^{\theta}\ \text{ with } \beta=\int_{\mathbb{R}}|s|[1-s^2]_+^{\lambda}ds.$$

On a alors par la formule de Taylor :

$$\eta^{\psi}(\rho,m)=\beta\rho^{\theta}m+r(\rho,m), \tag{III.70}$$

avec pour une certaine constante $C>0$:

$$r(\rho,m)\le C\rho v^2. \tag{III.71}$$

On introduit maintenant une nouvelle paire d'entropie $(\widehat{\eta},\widehat{H})$ telle que :

$$\begin{cases}\widehat{\eta}(\rho,m)=\eta^{\psi}(\rho,m-\rho v^-),\\ \widehat{H}(\rho,m)=H^{\psi}(\rho,m-\rho v^-)+v^-\eta^{\psi}(\rho,m-\rho v^-),\end{cases}$$

avec $m=\rho v$ qui vérifie :

$$\begin{cases}\widehat{\eta}(\rho,m)=\beta\rho^{\theta+1}(v-v^-)+r(\rho,\rho(v-v^-)),\\ r(\rho,\rho(v-v^-))\le C\rho(v-v^-)^2,\end{cases} \tag{III.72}$$

et

$$\begin{cases}\widehat{H}_{\rho}=v\widehat{\eta}_{\rho}+a\gamma\rho^{\gamma-2}\widehat{\eta}_v,\\ \widehat{H}_v=\rho\widehat{\eta}_{\rho}+v\widehat{\eta}_v.\end{cases}$$

En sommant $(III.32)_1\times\widehat{\eta}_{\rho}+(III.32)_2\times\widehat{\eta}_v$ on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t(\widehat{\eta}(\rho,v))+\partial_x(\widehat{H}(\rho,v))&=\varepsilon\widehat{\eta}_{\rho}(\rho,v)\partial_{xx}\rho+\varepsilon\widehat{\eta}_v(\rho,v)\partial_{xx}v+2\varepsilon\widehat{\eta}_m(\rho,v)\rho_x v_x\\ &=\varepsilon\widehat{\eta}_{\rho}(\rho,v)\partial_{xx}\rho-\varepsilon\widehat{\eta}_v(\rho,v)\partial_{xx}v+2\varepsilon\widehat{\eta}_m(\rho,v)\partial_x(\rho v_x).\end{aligned} \tag{III.73}$$

En intégrant sur $(0,t)\times(-\infty,x)$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\big(\widehat{\eta}(\rho,m)-\widehat{\eta}(\rho_0,m_0)\big)dy+\int_0^t\widehat{H}(\rho,v)d\tau&=tH^{\psi}(\rho^-,0)+\varepsilon\int_0^t\left(\widehat{\eta}_{\rho}\rho_x+\widehat{\eta}_v v_x\right)d\tau\\ &-\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{x}(\widehat{\eta}_{\rho\rho}(\rho_x)^2+\widehat{\eta}_{mv}\rho(v_x)^2+2\widehat{\eta}_{m\rho}\rho\rho_x v_x)dyd\tau.\end{aligned} \tag{III.74}$$

Via (III.69), on montre comme dans [40] ou [131] que :

$$\big|\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\widehat{\eta}_{mv}\rho v_x^2dyd\tau\big|\le C\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\rho v_x^2dy\,d\tau\le C(t), \tag{III.75}$$

$$\begin{aligned}\big|\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\widehat{\eta}_{m\rho}\rho\rho_x v_xdyd\tau\big|&\le C\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\rho^{\theta-1}\rho|\rho_x v_x|dy\,d\tau,\\ &\le C\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\rho v_x^2dy\,d\tau+C\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\rho^{\gamma-2}\rho_x^2dy\,d\tau\le C(t).\end{aligned} \tag{III.76}$$

En utilisant (III.75) et (III.76) dans (III.74), et en intégrant sur K on obtient via (III.52) :

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_K\rho^{\theta+\gamma}+\rho|v-v^-|^3dxd\tau\le C(t,K)+2\sup_{\tau\in[0,t]}\big|\int_K(\int_{-\infty}^{x}\widehat{\eta}(\rho(y,\tau),(\rho v)(y,\tau))dy)dx\big|\\ &+C|v^-|\int_0^t\int_K|\eta^{\psi}(\rho,\rho(v-v^-))|dxd\tau+\int_0^t\int_K\left(\varepsilon|\widehat{\eta}_{\rho}|.|\rho_x|+\varepsilon\rho|\widehat{\eta}_m|.|v_x|\right)dxd\tau.\end{aligned} \tag{III.77}$$

En appliquant 2, on a :

$$\int_0^t \int_K |\eta^\psi(\rho, \rho(v - v^-)| dx d\tau \leq C(t, K). \tag{III.78}$$

Il s'agit ensuite de borner le menbre de droite de (III.77) via le lemme 2 et (III.52). Cela conclut la preuve du lemme 4.

On va maintenant tirer profit des estimations uniformes obtenues dans les lemmes précédents afin de montrer la compacité $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$ de la suite $(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ de mesures de dissipation d'entropie pour le système de Korteweg, et ceci pour chaque paire d'entropie-flux générée par une fonction ψ à support compact.

Lemme 5. *Soit $\psi \in C^2_0(\mathbb{R})$ et (η^ψ, H^ψ) la paire d'entropie flux générée par ψ. Soit $(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ la suite de solution du système (III.33), alors la suite suivante (avec $m^\varepsilon = \rho^\varepsilon v^\varepsilon$) :*

$$\eta^\psi(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + H^\psi(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x \text{ est compacte dans } H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^2_+). \tag{III.79}$$

Preuve : Un calcul direct $(III.32)_1 \times \eta^\psi_\rho(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon) + (III.32)_2 \times \eta^\psi_v(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)$ donne (on rappelle que $\eta^\psi_v(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon) = \rho\eta^\psi_m(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$) :

$$\eta^\psi(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + H^\psi(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x = \varepsilon\eta^\psi_\rho(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)\rho^\varepsilon_{xx} - \varepsilon\eta^\psi_v(\rho^\varepsilon, v^\varepsilon)v^\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon\eta^\psi_m(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)\partial_x(\rho^\varepsilon v^\varepsilon_x).$$

Comme dans [40] en estimant le membre de droite de (III.79) via les estimations uniformes en ε précédemment obtenues on montre que :

$$\eta^\psi_\rho(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + H^\psi_\rho(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x \text{ sont compacts dans } W^{-1,p_1}_{loc}(\mathbb{R}^2_+) \text{ pour un certain } 1 < p_1 < 2. \tag{III.80}$$

De plus via les lemmes 2-3 et (III.68), on a :

$$\eta^\psi_\rho(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_t + H^\psi_\rho(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_x \text{ sont uniformément bornés dans } L^{p_3}_{loc}(\mathbb{R}^2_+) \text{ pour } p_3 > 2, \tag{III.81}$$

avec $p_3 = \gamma + 1 > 2$ lorsque $\gamma \in (1, 3]$, et $p_3 = \frac{\gamma+\theta}{1+\theta} > 2$ quand $\gamma > 3$. Par interpolation on conclut la preuve du lemme 5.

Preuve du théorème 15

On vient donc de vérifier les conditions (i)-(iii) du théorème 16 via les lemmes 3-4-5 pour la suite de solutions $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$. En utilisant le théorème 16, il existe une sous-suite $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)$ et une paire de fonctions mesurables (ρ, m) telle que :

$$(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon) \to (\rho, m), \quad \text{p.p } \varepsilon \to 0. \tag{III.82}$$

Il est maintenant assez facile de montrer que $(\rho^\varepsilon, m^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent au sens des distributions vers une solution entropique d'énergie finie du système d'Euler compressible (III.35) en utilisant les théorèmes d'Aubin-Lions et de la Vallée Poussin.

III.4 Système d'Euler Korteweg et équation de Gross-Pitaevskii [6, 7]

Cette section correspond à des travaux en collaboration avec C. Audiard (Université Paris 6). On va montrer l'existence de solutions fortes globales pour le système d'Euler Korteweg pour des données initiales petites et pour une vitesse initiale irrotationnelle. Pour ce faire un point clé sera d'utiliser la dispersion du système ainsi que la théorie de non résonances espaces-temps développée par S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai ([99, 100]) ainsi que par P. Germain, N. Masmoudi et J. Shatah ([179, 89]). Rappelons la forme du système que l'on va considérer :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P(\rho) = \operatorname{div} K, \\ (\rho, u)_{/t=0} = (\rho_0, u_0). \end{cases} \tag{III.83}$$

Ici $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^N$ représente le champ de vitesse, $\rho = \rho(t,x) \in \mathbb{R}^+$ la densité et on a $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u +^t \nabla u)$. Le tenseur de capillarité se lit :

$$\operatorname{div} K = \nabla\big(\rho\kappa(\rho)\Delta\rho + \frac{1}{2}(\kappa(\rho) + \rho\kappa^{'}(\rho))|\nabla\rho|^2\big) - \operatorname{div}\big(\kappa(\rho)\nabla\rho \otimes \nabla\rho\big). \tag{III.84}$$

κ représente le coefficient de capillarité. On s'intéressera dans un premier temps au cas particulier du système d'Euler avec pression quantique correspondant au coefficient de capillarité suivant :

$$\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{avec} \quad \operatorname{div} K = 2\kappa\rho\nabla(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}). \tag{III.85}$$

Ce cas est spécifique dans le sens où l'on peut au moins heuristiquement se ramener à l'étude de l'équation de Gross-Pitaevskii via la fameuse transformation de Madelung $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2\sqrt{\kappa}}}$ avec $u = \nabla\theta$ (celle ci peut être utilisé de manière rigoureuse essentiellement si la densité ρ ne s'annule pas, c'est d'ailleurs ce que l'on s'attachera à prouver).
Dans une seconde partie on traitera le cas général, c'est à dire un coefficient de capillarité $\kappa(\rho)$ avec $\kappa(\rho) = \rho^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$). Ce cas correspond à étudier via une transformation bien choisie une équation de Schrödinger quasi-linéaire dégénérée.

III.4.1 Système d'Euler compressible avec pression quantique [6]

On va donc considérer le cadre particulier où le coefficient de capillarité s'écrit comme dans (III.85). Ce cas correspond donc à la fameuse pression quantique. On obtient en particulier l'estimation d'énergie suivante en multipliant l'équation du moment par $2u$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} 4\kappa_1|\nabla\sqrt{\rho}|^2(t,x) + (\rho|u|^2)(t,x) + (\rho-1)(t,x)^2\big)dx \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^N} 4\kappa_1|\nabla\sqrt{\rho_0}|^2(x) + (\rho_0|u_0|^2)(x) + (\rho_0-1)(x)^2\big)dx. \end{aligned} \tag{III.86}$$

Lorsque $u = \nabla\theta$, la transformation de Madelung qui consiste à poser $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2\sqrt{\kappa}}}$ permet heuristiquement de réécrire le système (III.83) avec $P(\rho) = \rho^2$ et $u = \nabla\theta$ comme l'équation de Gross-Pitaevskii [1] :

$$\begin{cases} 2i\sqrt{\kappa}\partial_t\psi = -2\kappa\Delta\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi, \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0, \end{cases} \tag{III.87}$$

avec la condition limite $\lim_{|x|\to+\infty} \psi = 1$. L'équation de Gross-Pitaevskii est l'équation d'évolution associée à l'Hamiltonien de l'énergie de Ginzburg-Landau :

$$\begin{aligned} E(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \big(\kappa_1|\nabla\psi(t,x)|^2 + \frac{1}{4}(|\psi|^2 - 1)^2\big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \big(\kappa_1|\nabla\varphi(t,x)|^2 + \frac{1}{4}(2Re\varphi + |\varphi|^2)^2\big)dx, \end{aligned} \tag{III.88}$$

1. On verra dans la suite que dans le cadre d'une capillarité générale on peut également se ramener à l'étude d'un système dispersif

avec $\psi = 1 + \varphi$. Dans la suite on va se concentrer sur l'équation de Gross-Pitaevskii en montrant que pour des données initiales bien choisies la solution ψ de Gross-Pitaevskii est globale, reste régulière et ne s'annule pas dans le sens où $\|\varphi\|_{L^\infty_{x,t}} < \frac{1}{2}$. Ceci nécessitera certaines conditions de petitesse sur la donnée initiale φ_0.

Remarque 35. *On montrera en particulier que pour de telles données initiale sur φ_0 il n'apparaît pas de formation de vortex. C'est à dire que la solution de Gross-Pitaevskii ne s'annule jamais.*

Sur l'équation de Gross Pitaevskii

À changement de variable près dans (III.87), on peut se ramener à considérer l'équation suivante sur $\varphi = \psi - 1$:

$$\begin{cases} i\partial_t \varphi + \Delta\varphi - 2Re\varphi = F(\varphi), \\ F(\varphi) = (\varphi + 2\bar{\varphi} + |\varphi|^2)\varphi. \end{cases} \tag{III.89}$$

L'équation précédente est proche si l'on considère les termes principaux de l'équation de Schrödinger cubique défocalisante excepté que l'équation linéaire associée s'écrit :

$$i\partial_t \varphi + \Delta\varphi - 2Re\varphi = 0. \tag{III.90}$$

Cette équation peut être diagonalisée en considérant le changement de variable (voir [98]) :

$$v = V\varphi = \mathrm{Re}\varphi + iU\mathrm{Im}\varphi \quad \text{avec} \quad U = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)^{-1}},$$

en effet en posant $H = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)}$ on obtient l'équation linéaire suivante qui est de type Schrödinger en hautes fréquences et équation des ondes en basses fréquences :

$$i\partial_t v - Hv = 0.$$

Rappelons le théorème suivant dû à S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai sur l'existence de solutions fortes globales pour les équations de Gross-Pitaevskii lorsque les données initiales sont petites. De plus la solution obtenue disperse puisqu'elle vérifie la propriété de "scattering".

Théorème 19 (S. Gustafson, K. Nakanishi, T.-P. Tsai [99])**.** *Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varphi_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant :*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \langle x\rangle^2 \big(|Re(\varphi_0)|^2 + |\nabla\varphi_0|^2\big) < \delta, \tag{III.91}$$

alors il existe une solution forte globale $\psi = 1 + \varphi$ de (III.89) telle que $v = V\varphi = Re\varphi + iUIm\varphi$ vérifie $e^{itHv}v \in C(\mathbb{R}, H^1/\langle x\rangle)$ et pour un certain $v_+ \in \langle x\rangle^{-1}H^1$ on a :

$$\|v(t) - e^{-itH}v_+\|_{H^1} = O_{+\infty}(t^{-1/2}),\ \|\langle x\rangle(v(t) - e^{-itH}v_+)\|_{H^1} \longrightarrow_{+\infty} 0. \tag{III.92}$$

De plus on a $E(\psi) = \|\langle\nabla\rangle v_+\|^2_{L^2}$, et l'application $v(0) \to v_+$ définit un difféormorphisme dans un voisinage de 0 pour la topologie $\langle x\rangle^{-1}H^1$.

On verra par la suite que le théorème de S. Gustafson et al est crucial afin de montrer l'existence globale de solutions fortes avec données initiales irrotationnelles petites pour le système d'Euler Korteweg avec pression quantique. En effet il permet de contrôler la norme L^∞ de φ tout au long du temps tout en conservant sa petitesse lorsque les données initiales sont choisies petites. On obtient alors le théorème suivant qui stipule l'existence de solutions fortes globales pour le système d'Euler Korteweg (III.83) lorsque $\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho}$ avec $\kappa > 0$ et $P(\rho) = \rho^2$.

Théorème 20. *Soit $N = 3$ et $q_0 = \rho_0 - 1$, $u_0 = \nabla\theta_0$. De plus on a $\rho_0 \in L^\infty$ avec $\rho_0 \geq c > 0$. Supposons que*[2] *$\langle x\rangle\nabla\sqrt{\rho_0} \in L^2$, $\langle x\rangle u_0 \in L^2$, $q_0 \in L^2$, $\cos\theta_0 - 1 \in L^2$ et $|x|(\sqrt{\rho_0}\cos\theta_0 - 1) \in L^2$. Soit $\varphi_0 = \sqrt{\rho_0}e^{i\theta_0} - 1$ tel que $\varphi_0 \in H^{\frac{4}{3}+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ et $\widehat{\varphi_0} \in L^1$. Il existe $\delta > 0$ dépendant de $\|\varphi_0\|_{H^{\frac{4}{3}+\varepsilon}}$ tel que si :*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \langle x\rangle^2\big(|\nabla\rho_0|^2 + |u_0|^2\big) + \langle x\rangle^2(\sqrt{\rho_0}\cos\theta_0 - 1)^2 dx + \|\widehat{\varphi_0}\|_{L^1} + \|\varphi_0\|_{H^{\frac{4}{3}+\varepsilon}} < \delta, \tag{III.93}$$

alors il existe une solution faible globale (ρ, u) du système (III.83) telle que :

$$\max(\rho, \frac{1}{\rho}) \in L^\infty(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^3)), \quad \rho \in 1 + L^\infty_{loc}(H^{\frac{4}{3}+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \ \text{ et } \ u \in L^\infty_{loc}(H^{\frac{1}{6}+2\varepsilon}(\mathbb{R}^3)).$$

Si $\varphi_0 \in H^{\frac{N}{2}+1+\varepsilon}$ cette solution est en plus unique et vérifie les propriétés supplémentaires suivantes :

$$\rho \in 1 + L^\infty_{loc}(H^{\frac{N}{2}+1+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \ \text{ et } \ u \in L^\infty_{loc}(H^{\frac{N}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(B^{\frac{N}{2}+\varepsilon}_{6,2}(\mathbb{R}^3)).$$

Remarque 36. *Un point clé de la preuve de ce théorème est le contrôle du vide ou disons l'estimation de $\frac{1}{\rho}$ en norme L^∞ ce qui est équivalent à prouver que φ reste petit tout au long du temps. Pour ce faire un moyen naturel revient à estimer φ en norme $H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ (en effet il est bien connu que la norme L^∞ n'est pas préservée pour l'équation de Schrödinger ou même l'équation de Gross-Pitaevskii ; en effet on peut montrer que pour des φ_0 bien choisi dans L^∞ $e^{it\Delta}\varphi_0$ explose en norme L^∞ pour des temps t aussi petit que l'on veut), on va cependant procéder différemment en tirant partie des effets régularisants de type Kato associés à l'équation de Gross-Pitaevskii pour affaiblir la régularité de la donnée initiale φ_0 avec $\varphi_0 \in H^{\frac{4}{3}+\varepsilon}$. En outre φ_0 appartient bien à L^∞ puisque $\widehat{\varphi_0}$ est dans L^1. La preuve reposera fortement sur le théorème 19 de S. Gustafson et al.*

III.4.2 Système d'Euler-Korteweg quasi-linéaire [7]

On va considérer ici le système (III.83) dans la cadre le plus général, c'est à dire pour des coefficients de capillarité $\kappa(\rho)$ seulement supposés réguliers en fonction de ρ. La question de l'existence de solutions fortes globales avec données initiales petites reste un problème ouvert auquel on va donner une réponse lorsque la vitesse initiale est irrotationnelle. Le problème de l'existence de solutions fortes en temps fini a été résolu par S. Benzoni et al dans [11, 12].
Ces résultats sont reliés à l'étude d'un système étendu, en effet si $\mathcal{L}$ est une primitive de $\sqrt{\frac{\kappa(\rho)}{\rho}}$, en posant $L = \mathcal{L}(\rho)$, $w = \sqrt{K/\rho}\nabla\rho = \nabla L$, $a = \sqrt{\rho K(\rho)}$, on peut réécrire le système (III.83) comme ceci :

$$\begin{cases} \partial_t L + u\cdot\nabla L + a\mathrm{div}u = 0, \\ \partial_t u + u\cdot\nabla u - w\cdot\nabla w - \nabla(a\mathrm{div}w) = -\nabla g, \\ \partial_t w + \nabla(u\cdot w) + \nabla(a\mathrm{div}w) = 0, \end{cases}$$

ou de manière équivalente pour l'inconnue $z = u + iw$ (voir [12]) on a :

$$\begin{cases} \partial_t L + u\cdot\nabla L + a\mathrm{div}u = 0, \\ \partial_t z + u\cdot\nabla z + i(\nabla z)\cdot w + i\nabla(a\mathrm{div}z) = \nabla\widetilde{g}(L). \end{cases} \tag{III.94}$$

On pose ici $\widetilde{a}(L) = a\circ\mathcal{L}^{-1}(L)$, $\widetilde{g}(L) = g\circ\mathcal{L}^{-1}(L)$ qui sont bien définis puisqu'on a $\sqrt{\frac{\kappa(\rho)}{\rho}} > 0$ ce qui implique que $\mathcal{L}$ est inversible.
Le changement de variable z a le bon goût de rendre explicite la structure dispersive du système puisque l'on retrouve une équation de Schrödinger quasilinéaire dégénérée. Dans [12] les auteurs

2. Ces hypothèses ne sont rien de plus que la traduction des conditions sur φ_0 dans le théorème 19, voir (III.91).

prouvent l'existence de solutions fortes en temps fini en employant une méthode d'énergie ce qui nécessite l'introduction d'une jauge, en effet cela leur permet d'estimer z en norme H^s pour $s > \frac{N}{2} + 1$ et ceci sans pertes de dérivées. On peut cependant observer que les éventuels effets dispersifs du système (III.94) ne sont pas pris en compte.
Dans la section précédente, on montre l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales petites avec une vitesse initiale irrotationnelle pour le cas particulier $\kappa(\rho) = \frac{\kappa}{\rho}$ avec $P(\rho) = \rho^2$. Ce cas correspond au système d'Euler avec pression quantique et se ramène aux équations de Gross-Pitaevskii via la transformation de Madelung. L'essentiel de notre étude dans [6] consiste à contrôler la norme L^∞ de la densité ρ en tirant profit de la nature dispersive des équations de Gross-Pitaevskii (voir [98, 99, 100]). Seulement l'équation de Gross-Pitaevskii correspond essentiellement à une équation de Schrödinger semilinéaire alors que dans le cadre général on est confronté a une équation de Schrödinger quasilinéaire (si l'on travaille avec une vitesse irrotationnelle).
On va donc faire face à une difficulté supplémentaire à savoir la nature quasilinéaire des équations ce qui est susceptible d'entraîner d'éventuelles pertes de dérivées (et ceci notamment à cause du terme de convection). Afin de parer à cette nouvelle difficulté on combinera estimations d'énergie et dispersion via la théorie des non résonnaces temps-espace (on réfère à S. Klainerman et G. Ponce [151] et J. Shatah [189] pour une première mise en oeuvre de cette stratégie dans le cadre des équations des ondes quasilinéaires). On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 21. *Soit $N = 3$ et $u_0 = \nabla\phi_0 \in H^{N_0}$ irrotationnelle avec N_0 assez grand, alors il existe $\delta > 0$ tel que si :*

$$\|u_0\|_{H^{N-1}} + \|\rho_0 - 1\|_{H^N} + \|x(\Delta)^{-1}\mathrm{div} u_0\|_{L^2} + \|x(\rho_0 - 1)\|_{L^2} \leq \delta,$$

le système $(III.83)$ admet une unique solution globale avec $\|\rho - 1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} \leq 1/2$.

Remarque 37. *La preuve repose donc sur la combinaison d'estimations d'énergie prouvées en partie dans [12] et des estimations de dispersions nécessitant de contrôler des espaces à poids comme dans [99] puisqu'on est au niveau de l'exposant critique de Strauss à savoir des nonlinéarités quadratiques. Pour gérer cette difficulté on utilisera la théorie des non résonances temps espace couplée avec une forme normale. Rappelons que les estimations d'énergie sont cruciales afin de parer aux pertes de dérivées induites par la nature quasilinéaire du système et ceci car on a un contrôle de n'importe quel norme H^s de z si tant est que z soit L^1 en temps Lipschitz en espace.*

Mentionnons que ce genre de technique ont permis notamment à P. Germain, N. Masmoudi et J. Shatah dans [89] de prouver l'existence de solutions fortes globales avec données petites pour les équations des water waves en dimension $N = 3$ dans le cadre irrotationnel.

III.4.3 Quelques éléments de preuve du théorème 20

On va commencer par rappeler les estimations de dispersion ainsi que les inégalités de Strichartz relatives au système (III.89).

Inégalités de Strichartz et estimations de dispersion

Avant toute chose commençons par rappeler la définition des opérateurs multilinéaires. Pour toute fonction $B(\xi_1, \cdots, \xi_d)$ on $(\mathbb{R}^N)^d$, on associe le d opérateur multilinéaire $B[f_1, \cdots, f_d]$ défini par :

$$\mathcal{F}_x B[f_1, \cdots, f_d] = \int_{\xi=\xi_1+\cdots+\xi_d} B(\xi_1, \cdots, \xi_d)\mathcal{F}f_1(\xi_1)\cdots\mathcal{F}f_d(\xi_d)\, d\xi_2\cdots d\xi_d, \tag{III.95}$$

qui est appelé **opérateur de Fourier multilinéaire de symbole** B.
On va rappeler ici le théorème fondamental de R. Coifman et Y. Meyer (voir [48]) sur les opérateurs de Fourier bilinéaires.

Théorème 22 (Coifman-Meyer). *Supposons que B vérifie :*

$$|\partial_{\xi_1}^{\alpha}\partial_{\xi_2}^{\beta}B(\xi_1,\xi_2)| \lesssim \frac{1}{(|\xi_1|+|\xi_2|)^{|\alpha|+|\beta|}}, \tag{III.96}$$

pour suffisamment de multi-indices (α,β). Alors l'opérateur :

$$B[\cdot,\cdot] : L^p \times L^q \to L^r,$$

est borné pour :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ 1 < p, q < +\infty \ \ et\ \ 1 \leq r < +\infty. \tag{III.97}$$

Remarque 38. *La condition précédente a lieu en particulier si B est homogène de degré 0 et C^{∞} sur la sphère.*

Tous les résultats suivants sont dûs à S. Gustafson et al (voir [98, 99]). Commençons par les estimations de dispersion.

Lemme 6. *Soit $2 \leq p \leq +\infty$, $0 \leq \theta \leq 1$, $s \in \mathbb{R}$, et $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Alors on a :*

$$\|e^{-itH}v\|_{B^s_{p,2}} \lesssim |t|^{-(N-\theta)\sigma}\|U^{(N-2+3\theta)\sigma}\langle\nabla\rangle^{2\theta\sigma}v\|_{B^s_{p',2}}, \tag{III.98}$$

avec $p' = \frac{p}{p-1}$. Pour $2 \leq p < +\infty$, on a aussi pour les espaces de Lorentz :

$$\|e^{-itH}v\|_{L^{p,2}} \lesssim |t|^{-(N-\theta)\sigma}\|U^{(N-2+3\theta)\sigma}\langle\nabla\rangle^{2\theta\sigma}v\|_{L^{p',2}}. \tag{III.99}$$

On rappelle maintenant les inégalités de Strichartz pour l'opérateur H.

Proposition 13. *Pour $j = 1, 2$, soient $2 \leq p_j, q_j \leq +\infty$, $\frac{2}{q_j} + \frac{N}{p_j} = \frac{N}{2}$ et $s_j = \frac{N-2}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j})$ avec $(q_j, p_j) \neq (2, +\infty)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned}
&\|e^{-iHt}\Delta_j\varphi\|_{L^{q_1}(L^{p_1})} \leq \|U^{s_1}\Delta_j\varphi\|_{L^2},\\
&\|e^{-iHt}\varphi\|_{L^{q_1}(B^s_{p_1,2})} \lesssim \|U^{s_1}\varphi\|_{B^s_{2,2}},\\
&\|\int_0^t e^{-i(t-s)H}\Delta_j f\|_{L^{q_1}(L^{p_1})} \leq \|U^{s_1+s_2}\Delta_j f\|_{L^{q_2'}(L^{p_2'})},\\
&\|\int_0^t e^{-i(t-s)H} f\|_{L^{q_1}(B^s_{p_1,2})} \lesssim \|U^{s_1+s_2} f\|_{L^{q_2'}(B^s_{p_2',2})}.
\end{aligned}$$

Remarque 39. *Ces inégalités de Strichartz sont de type Schrödinger en hautes fréquences et équation des ondes en basses fréquences.*

On rappelle les espaces de J.-Y. Chemin et N. Lerner :

$$\|f(\xi,\eta)\|_{\widetilde{L}^p_\xi(\dot{B}^s_{q,r,\eta})} = \big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{lsr}\|f\|^r_{L^p_\xi(L^q_\eta)}\big)^{\frac{1}{r}}.$$

On a alors le lemme crucial de S. Gustafson et al [99] pour des opérateurs bilinéaires "à perte" (ce ne sont en particulier pas nécessairement des opérateurs de Coifman-Meyer).

Lemme 7. *Soit $0 \leq s \leq \frac{N}{2}$, (p,q) une paire d'exposants de Strichartz excepté le "end point", c'est à dire :*

$$\frac{2}{p} + \frac{N}{q} = 2 + \frac{N}{2} \tag{III.100}$$

Soit $(p_1 q_1)$ et (p_2, q_2) vérifiant :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q(s)} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q(s)} = \frac{1}{2} - \frac{s}{N},$$
$$p \leq p_1, p_2 \leq +\infty,\ q \leq q_1, q_2 \leq +\infty.$$

Alors pour tout opérateur bilinéaire on a :

$$\| \int e^{itH} B[u,v] dt \|_{L^2} \lesssim \|B\|_{\widetilde{L}^\infty_\xi \dot{B}^s_{2,1,\eta} + \widetilde{L}^\infty_\xi \dot{B}^s_{2,1,\zeta}} \|u\|_{L^{p_1} L^{q_1}} \|v\|_{L^{p_2} L^{q_2}},$$

avec la première norme de B qui est en coordonnées (ξ, η) et la seconde en $(\xi, \zeta) = (\xi, \xi - \eta)$.
Et on a si $1/q_1 + 1/q_2 = 1/2 + 1/q(s)$, $2 \leq q_1, q_2 \leq q(s)$, $\frac{1}{q(s)} = \frac{1}{2} - \frac{s}{N}$, l'estimation de Hölder généralisée :

$$\|B[\varphi, \psi]\|_{L^2} \lesssim \|B\|_{\widetilde{L}^\infty_\xi B^s_{2,1,\eta} + \widetilde{L}^\infty_\xi B^s_{2,1,\zeta}} \|\varphi\|_{L^{q_1}} \|\psi\|_{L^{q_2}}.$$

Notation 1. *On pose dans la suite :*

$$[B^s] = \widetilde{L}^\infty_\xi (B^s_{2,1,\eta}) + \widetilde{L}^\infty_\xi (B^s_{2,1,\zeta}), \tag{III.101}$$

et :

$$[H^s] = \widetilde{L}^\infty_\xi (\dot{H}^s_{2,\eta}) + \widetilde{L}^\infty_\xi (\dot{H}^s_{2,\zeta}). \tag{III.102}$$

Remarque 40. *Lorsque $s = \frac{N}{2}$ le lemme précédent 7 est similaire aux estimations classiques de Strichartz où $B[u,v]$ se comporte comme un produit classique $u\,v$. En effet dans ce cadre on a via des inégalités de Hölder classiques $uv \in L^p L^q$ et $(p,q) = (p_1', q_1')$ avec (p_1, q_1) une paire d'exposants de Strichartz puisque $\frac{2}{p} + \frac{N}{q} = 2 + \frac{N}{2}$. En hautes fréquences on sera dans le cas $s = \frac{N}{2}$ puisqu'en hautes fréquences les estimations de Strichartz classiques sont suffisantes.*
On peut observer que $q(s)$ correspond à l'exposant de Sobolev pour l'injection dans les espaces de Besov suivante $\dot{B}^s_{2,1} \subset L^{q(s)}$ et $\frac{1}{q(s)}$ estime donc la perte de régularité par rapport aux inégalités de Hölder classiques . Cela implique en particulier que lorsque $0 \leq s < \frac{N}{2}$ on a besoin d'une meilleure décroissance en temps grands lorsque l'on utilise le résultat précédent comparé aux estimations de Strichartz classiques (ceci explique la notion d'exposant critique de Strauss). On va voir cela plus en détails pour le comportement basses fréquences.

On va à présent rappeler une partie de la preuve de [99] concernant l'existence de solutions fortes globales avec données petites φ pour les équations de Gross-Pitaevskii ce qui nous permettra d'obtenir des solutions qui ne s'annule jamais. On utilisera ensuite la transformation de Madelung pour construire une solution forte globale (ρ, u) du système (III.83). Suivant S. Gustafson et al dans [99] on peut diagonaliser le système (III.87) en posant $v = \varphi_1 + iU\varphi_2$ ce qui donne le système suivant :

$$i\partial_t v - Hv = U(3\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + |\varphi|^2 \varphi_1) + i(2\varphi_1\varphi_2 + |\varphi|^2 \varphi_2). \tag{III.103}$$

On peut observer que le terme $2\varphi_1\varphi_2$ dans (III.103) est à priori délicat à traiter et ceci pour au moins deux raisons, la première car φ_2 s'écrit $U^{-1}\mathrm{I}m v_2$ ce qui induit à priori une perte de dérivée en basses fréquences à cause de l'opérateur U^{-1} en $\frac{1}{|\xi|}$ en basses fréquences. La seconde difficulté est reliée au fait que cette non linéarité est quadratique c'est à dire au niveau critique de l'exposant de Strauss ce qui ne permet à priori pas la simple application d'un théorème du point fixe avec utilisation seulement des estimations de dispersion ou des inégalités de Strichartz.

Forme normale

Une première étape afin de parer à cette difficulté sera d'utiliser une forme normale afin de rendre caduque la perte de dérivée en $U^{-1}\mathrm{Im}v_2$ (c'est à dire régulariser d'une certaine manière la non linéarité). Celle ci devra également être bien choisie de manière à compenser les pertes de dérivées en basses fréquences engendrées par la phase reliée au produits $v\bar{v}$ lorsque l'on appliquera une technique de résonances temps-espace (en effet l'intersection des résonances temps-espace n'est pas vide, on expliquera plus en détails ce dernier point dans la suite de la preuve).
On pose donc

$$Z = V(w) = w_1 + iUw_2 = v + B_1'[\varphi_1, \varphi_1] + B_2'[\varphi_2, \varphi_2],$$

avec B_1' et B_2' des opérateurs bilinéaires réels et on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} i\partial_t Z - HZ = U(B_3'[\varphi_1, \varphi_1] + B_4'[\varphi_2, \varphi_2] + |\varphi|^2\varphi_1) + i(B_5'[\varphi_1, \varphi_2] + C_3'[\varphi_1, \varphi_1, \varphi_2] \\ + C_4'[\varphi_2, \varphi_2, \varphi_2] + Q_1(\varphi)). \end{aligned} \tag{III.104}$$

Le terme le plus délicat est bien évidemment à priori $B_5'[\varphi_1, \varphi_2]$ (et ceci à cause des résonances temps espace) avec $B_5' = 2 + 2|\xi_2|^2 B_1' - 2\langle\xi_1\rangle^2 B_2'$. On va donc choisir B_1' et B_2' de sorte à éliminer ce terme et on peut faire le choix suivant :

$$-B_1' = B_2' = \langle(\xi_1, \xi_2)\rangle^{-2} = \frac{1}{2 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, \tag{III.105}$$

cela donne alors après réécriture :

$$i\partial_t Z - HZ = \mathcal{N}_Z(v), \tag{III.106}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z(v) = B_3[v_1, v_1] + B_4[v_2, v_2] + C_1[v_1, v_1, v_1] \quad &+ \quad C_2[v_2, v_2, v_1] + iC_3[v_1, v_1, v_2] \\ &+ \quad iC_4[v_2, v_2, v_2] + iQ_1(\varphi), \end{aligned}$$

où [3] :

$$\begin{aligned} B_3 = -U(\xi)B_3' = 2U(\xi)\widetilde{B}_3 = 2U(\xi)\frac{4 + 4|\xi_1|^2 + 4|\xi_2|^2 - \xi_1\xi_2}{2 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, \\ B_4 = U(\xi)U(\xi_1)^{-1}U(\xi_2)^{-1}B_4' = -2U(\xi)\widetilde{B}_4 = -2U(\xi)\frac{\langle\xi_1\rangle\langle\xi_2\rangle\widehat{\xi_1}\widehat{\xi_2}}{2 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, \\ C_1 = U(\xi), \ ; C_2 = U(\xi)U(\xi_1)^{-1}U(\xi_2)^{-1}, \\ Q_1(\varphi) = -2\langle(\xi_1, \xi_2)\rangle^{-2}[\varphi_1, |\varphi|^2\varphi_2] - 2\langle(\xi_1, \xi_2)\rangle^{-2}[\varphi_2, |\varphi|^2\varphi_1]. \end{aligned} \tag{III.107}$$

Et on a pour $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} &|B_3| + |B_4| \lesssim U(\xi), \\ &|C_j| \lesssim U(\xi_1)^{-1}U(\xi_2)^{-1} + U(\xi_2)^{-1}U(\xi_3)^{-1} + U(\xi_3)^{-1}U(\xi_1)^{-1}. \end{aligned} \tag{III.108}$$

Remarque 41. *On ne détaille pas la valeur de C_3 et C_4 essentiellement car ce n'est pas nécessaire puisque l'estimation (III.108) sera suffisante par la suite lorsque l'on appliquera des estimations de Strichartz sur ces opérateurs multilinéaires.*
On remarque ici qu'à la différence de la forme normale introduite pour la première fois par J. Shatah ([188]) pour les Edps pour l'équation de Klein Gordon, on conserve des termes quadratiques dans (III.108). Cependant ceux-ci ont été régularisés, en effet les B_j sont de la même veine que l'opérateur U qui régularise les produits v_1^2 et v_2^2 en basses fréquences. Ceci sera crucial lorsque l'on appliquera une méthode non résonance temps-espace sur la zone de résonance temps espace $\{\xi = 0\}$, en effet l'opérateur $\frac{1}{\Omega}$ avec Ω la phase associée à l'opérateur H et au produit $Z\bar{Z}$ se comporte comme U^{-1}. On aura donc un phénomène de compensation.

3. On note ici $\widehat{\xi_i} = \frac{\xi_i}{|\xi|}$ et $\langle\cdot\rangle$ les crochets japonais.

Point fixe et espace fonctionnel

Notre but est de résoudre l'équation (III.106) via un point fixe (voir [99]), ceci est équivalent via la formule de Duhamel à considérer l'application F suivante :

$$Z \mapsto F(Z) = e^{itH}Z(0) + \int_0^t e^{i(t-s)H}\mathcal{N}_Z(v)(s)ds. \tag{III.109}$$

Comme S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai dans [99] on définit un opérateur J équivalent de la transformation pseudo-conforme pour Schrödinger :

$$J(t) = e^{-itH}xe^{itH}.$$

On va alors travailler dans un espace combinant estimations de Strichartz et espace à poids (en effet au niveau critique de l'exposant de Schrödinger les estimations de Strichartz ne suffisent pas). L'espace à poids permettra une meilleure dispersion de la solution en temps long. On pose alors :

$$\|Z\|_{X(t)} = \|Z\|_{H^1} + \|J(t)Z\|_{H^1}, \ \|Z\|_X = \sup_t \|Z(t)\|_{X(t)},$$

l'espace à poids et

$$\|Z\|_{S(t)} = \|Z\|_{L_t^\infty H^1} + \|U^{-1/6}Z\|_{L_t^2 H^{1,6}}, \ \|Z\|_S = \sup_t \|Z(t)\|_{S(t)},.$$

l'espace "Strichartz". Il s'agit à présent d'appliquer un théorème du point fixe pour l'équation (III.109) dans $Y = X \cap S$.

Estimations de dispersions et stabilité de l'espace S

Rappelons ici quelques estimations de dispersions que fournissent en particulier l'espace à poids X (voir [99]).

Proposition 14. *On a les estimations suivantes lorsque* $0 \leq \theta \leq 1$ *:*

$$\|v(t)\|_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|v(t)\|_{X(t)}, \tag{III.110}$$

$$\|U^{-2}v\|_{L^6} \lesssim \|v(t)\|_{X(t)} \lesssim \|v(t)\|_{X(t)}, \tag{III.111}$$

$$\begin{aligned} \||\nabla|^{-2+\frac{5\theta}{3}}v_{<1}(t)\|_{L^6} &\lesssim \min(1, t^{-\theta})\|v(t)\|_{X(t)}, \\ \||\nabla|^{\theta}v_{\geq 1}(t)\|_{L^6} &\lesssim \min(t^{-\theta}, t^{-1})\|v(t)\|_{X(t)}. \end{aligned} \tag{III.112}$$

De plus on a les estimations de Strichartz sur $U^{-1}v$ *:*

$$\begin{aligned} \|U^{-1}v(t)\|_{L^6} &\lesssim \langle t\rangle^{-\frac{3}{5}}\|v(t)\|_{X(t)}, \\ \|U^{-1}v\|_{L_t^2(H^{1,6})} &\lesssim \|v\|_{X(t)\cap S(t)}, \end{aligned} \tag{III.113}$$

$$\|\langle\nabla\rangle^{\frac{2}{3}}U^{-1}v(t)\|_{L^4} \lesssim t^{-\frac{7}{12}}\|v(t)\|_{X(t)}. \tag{III.114}$$

On a également des estimations de Strichartz sur φ en terme de v dans $X \cap S$.

Proposition 15. *On a :*

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty(H^1)} &\lesssim \|v\|_X, \\ \|\varphi\|_{L^2(H^{1,6})} &\lesssim \|v\|_{X\cap S}. \end{aligned} \tag{III.115}$$

Montrons à présent la stabilité de l'espace S pour la fonctionnelle F. Il est facile de montrer qu'en temps fini $T = 1$ (on peut prendre $T = 1$ si l'on choisit une donnée initiale suffisamment petite) on a :

$$\sup_{t\in[0,1]} \| \int_0^t e^{-i(t-s)H}\mathcal{N}_Z ds\|_{S(t)} \lesssim \|v\|_S^2 + \|v\|_S^4. \tag{III.116}$$

En effet cela correspond aux estimations classiques d'existence de solutions fortes en temps fini pour une nonlinéarité au plus quintique (ici on est quartique) lorsque la donnée initiale est dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ (voir [29] pour plus de détails). Traitons maintenant le cas des temps grands qui est plus délicat et qui nécessite la norme d'espace à poids. On a la proposition suivante.

Proposition 16. *On a l'estimation suivante :*

$$\sup_{t\in[1,+\infty]} \| \int_1^t e^{-i(t-s)H}\mathcal{N}_Z(v) ds\|_{S(t)} \lesssim \|v\|_{X\cap S}^2 + \|v\|_{X\cap S}^4. \tag{III.117}$$

Preuve : On va simplement ici considérer le terme le plus délicat (celui qui correspond au cas critique pour l'exposant de Strauss) à savoir celui qui est quadratique $\int_1^{+\infty} e^{-i(t-s)H}B_4[v_2,v_2]ds$. Les autres se traitent exactement de la même manière. Via les inégalités de Strichartz de la proposition 13 on a :

$$\begin{aligned}
&\|U^{\frac{-1}{6}} \int_T^t e^{-i(t-s)H}B_4[v_2,v_2]ds\|_{L^2_{t>T}(H^{1,6})} \lesssim \|B_4[v_2,v_2]\|_{L^1_{t>T}(H^1)},\\
&\| \int_T^t e^{-i(t-s)H}B_4[v_2,v_2]ds\|_{L^\infty_{t>T}(H^1)} \lesssim \|B_4[v_2,v_2]\|_{L^1_{t>T}(H^1)}.
\end{aligned} \tag{III.118}$$

On observe que $B_4[v_2,v_2] = -2UB_4''[Rv_2,Rv_2]$, avec R un opérateur de Riesz et $B_4'' = \frac{\langle\xi_1\rangle\langle\xi_2\rangle}{\langle(\xi_1,\xi_2)\rangle^2}$ un opérateur borné (voir [99]), on a alors par interpolation et inégalités de Hölder :

$$\begin{aligned}
\|B_4[v_2,v_2]\|_{L^1_{t>T}(H^1)} &\lesssim \|B_4''[Rv_2,Rv_2]\|_{L^1_{t>1}(H^1)}\\
&\lesssim \|Rv_2\|_{L^4_{t>1}(H^{1,3})}\|Rv_2\|_{L^{\frac{4}{3}}_{t>1}(L^6)}\\
&\lesssim \|v_2\|^{\frac12}_{L^\infty_{t>1}(H^1)}\left(\int_1^{+\infty}\|v_2\|^2_{H^{1,6}}ds\right)^{\frac14}\left(\int_1^{+\infty}\|v_2\|^{\frac43}_{L^6}ds\right)^{\frac34}\\
&\lesssim \|v_2\|^{\frac12}_{L^\infty_{t>1}(H^1)}\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{s^2}\|sv_2\|^2_{H^{1,6}}ds\right)^{\frac14}\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{s^{\frac43}}\|sv_2\|^{\frac43}_{L^6}ds\right)^{\frac34}\\
&\lesssim \|v_2\|^{\frac12}_{L^\infty_{t>1}(H^1)}\|sv_2\|^{\frac32}_{L^\infty_{t>1}(H^{1,6})}.
\end{aligned} \tag{III.119}$$

Ensuite via (III.112) pour $t > 1$ on obtient :

$$\|sv_2\|^{\frac32}_{L^\infty_{t>1}(H^{1,6})} \lesssim \|v\|_X^{\frac32}.$$

ce qui donne finalement ce que l'on souhaite :

$$\|B_4[v_2,v_2]\|_{L^1_{t>T}(H^1)} \lesssim \|v\|_X^2. \tag{III.120}$$

Estimées à poids pour X

Suivant S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai dans [99] on va chercher à estimer le terme $\| \int_0^t e^{i(t-s)H}\mathcal{N}_Z(v)ds\|_X$. On va ici s'intéreser seulement aux termes bilinéaires qui sont bien évidemment les plus délicats puisqu'au niveau critique de l'exposant de Strauss. En effet les termes

cubiques et quartiques sont plus faciles à traiter du fait de leurs meilleures décroissances asymptotiques pour les temps grands.
On va ici considérer le terme bilinéaire $B_3[Z_1, Z_1]$ provenant de $B_3[v_1, v_1]$ (bien évidemment ce dernier terme a également des termes de plus haut degré) que l'on peut écrire comme suit :

$$B_3[Z_1, Z_1] = \frac{1}{4}(B_3[Z, Z] + 2B_3[Z, \bar{Z}] + B_3[\bar{Z}, \bar{Z}]). \tag{III.121}$$

On aura trois types de produits différents à estimer ZZ, $\bar{Z}\bar{Z}$ et $Z\bar{Z}$. On va s'intéresser au dernier qui est le plus dur à traiter essentiellement car il admet des zones non vides résonantes en temps et en espace (on va détailler ce que cela signifie). Appliquons J au terme bilinéaire $\int_0^t e^{i(t-s)H} B_3[Z, \bar{Z}]ds$, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\big(J \int_0^t e^{-i(t-s)H} B_3[Z, \bar{Z}]\big) \\
&= e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_\xi \Big(e^{is(H(\xi)+H(\eta)-H(\xi-\eta)} B_3(\eta, \xi-\eta) \check{Z}(s) \widetilde{Z}(s) \Big) d\zeta \, ds,
\end{aligned} \tag{III.122}$$

avec $\check{Z}(s) := \mathcal{F}(e^{-isH} Z)(s)$, $\widetilde{Z}(s) = \mathcal{F}(\overline{e^{-isH} Z})(s)$. Les mêmes calculs pour les autres termes provenant de la formule (III.121) impliquent que l'on a trois termes différents à étudier :

$$e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_\xi \Big(e^{is(H(\xi)+H(\eta)-H(\xi-\eta)} B_j(\eta, \xi-\eta) \check{Z}(s) \widetilde{Z}(s) \Big) d\zeta \, ds, \tag{III.123}$$

$$e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_\xi \Big(e^{is(H(\xi)+H(\eta)+H(\xi-\eta)} B_j(\eta, \xi-\eta) \check{Z}(s) \check{Z}(s) \Big) d\zeta \, ds, \tag{III.124}$$

$$e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_\xi \Big(e^{is(H(\xi)-H(\eta)-H(\xi-\eta)} B_j(\eta, \xi-\eta). \widetilde{Z}(s) \widetilde{Z}(s) \Big) d\zeta \, ds. \tag{III.125}$$

Il résulte donc que l'on a trois différentes phases possibles à considérer :

$$\Omega = H(\xi) \pm H(\eta) \pm H(\xi - \eta).$$

Chacune des phases a un comportement différent en terme de résonances temps espace (c'est à dire l'ensemble où Ω et $\nabla_\xi^\eta \Omega$ s'annulent). La phase associée au terme $Z\bar{Z}$ étant la pire en terme de résonances, c'est celle là que l'on va étudier et que l'on notera $\Omega_1(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi - \eta)$.
Si l'on revient à (III.122) on observe que l'on a les trois intégrales suivantes à estimer :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}I_1 &= e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(e^{is(H(\xi)+H(\eta)-H(\xi-\eta))} \nabla_\xi^{(\eta)} B_j(\eta, \xi-\eta) \check{Z}(s, \eta) \widetilde{Z}(s, \xi-\eta) \Big) d\eta ds, \\
\mathcal{F}I_2 &= e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(e^{is(H(\xi)+H(\eta)-H(\xi-\eta))} B_j(\eta, \xi-\eta) \check{Z}(s, \eta) \nabla_\xi^{(\eta)} \widetilde{Z}(s, \xi-\eta) \Big) d\eta ds, \\
\mathcal{F}I_3 &= e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big((\nabla_\xi e^{is(H(\xi))+H(\eta)-H(\xi-\eta))} B_j(\eta, \xi-\eta) \check{Z}(s, \eta) \widetilde{Z}(s, \xi-\eta) \Big) d\eta ds.
\end{aligned}$$

avec :

$$\big(J \int_0^t e^{-i(t-s)H} B_3[Z, \bar{Z}]\big) = I_1 + I_2 + I_3.$$

Comment traiter I_1 et I_2

On observe donc que I_1 s'écrit de la manière suivante

$$I_1 = \int_0^t e^{i(s-t)H} \nabla_2 B_3[Z, \bar{Z}](s) ds.$$

Il s'agit d'estimer I_1 en norma $L^\infty(H^1)$, puisque $\nabla_2 B_3$ est un opérateur de Coifman-Meyer, il suffit simplement d'utiliser les inégalités de Strichartz classiques. Concernant I_2 celui-ci s'écrit sous la forme suivante :

$$I_2 = \int_0^t e^{i(s-t)H} B_3[Z, \overline{(JZ)}](s) ds.$$

Il suffit alors juste d'appliquer les inégalités de Strichartz et (III.112), on a alors :

$$\begin{aligned} \|B_j[Z, \overline{(JZ)}]\|_{L^{\frac{4}{3}}_{t>T}(H^{1,\frac{3}{2}})} &\lesssim \|Z\|_{L^{\frac{4}{3}}_{t>T}(H^{1,6})} \|\overline{JZ}\|_{L^\infty_{t>T}(H^1)} \\ &\lesssim \frac{1}{T^{\frac{1}{4}}} \|Z\|_X^2. \end{aligned} \tag{III.126}$$

car on a $\|sZ\|_{L^\infty(H^{1,6})} \lesssim \|Z\|_{X(t)}$.
On va maintenant estimer I_3 qui est le terme le plus délicat à estimer essentiellement car il fait sortir le terme s qui est très mauvais en terme de décroissance asymptotique en temps long. On va rappeler comment procède S. Gustafson et al dans [99] où ils introduisent la théorie des résonances temps-espace. Cette partie est d'autant plus délicate du fait que pour la phase $\Omega_1 = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi - \eta)$ l'intersection des non résonances temps espace n'est pas vide notamment au voisinage de $\xi = 0$ ce qui implique $\eta = \zeta$.

Estimation de I_3

Suivant [99] on va donc estimer I_3 pour le terme provenant de $B_3[Z, \bar{Z}]$ avec la phase $\Omega_1 = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi - \eta)$ que l'on notera de manière générique par Ω dans la suite (les autres termes peuvent être traités de manière similaire). On rappelle que :

$$\mathcal{F} I_3 = e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(is \nabla_\xi \Omega(\xi, \eta) e^{is(H(\xi)) + H(\eta) - H(\xi - \eta)} B_3(\eta, \xi - \eta) \check{Z}^{\pm}(\eta) \widetilde{Z}(\xi - \eta) \Big) d\eta ds.$$

Comme on l'expliquait la difficulté liée à I_3 provient du terme s qui est très mauvais pour les temps long. Afin de surpasser cette difficulté on va exploiter les non résonances de la phase Ω_1 en appliquant des intégrations par partie en espace η et en temps s.
En effet il s'agit simplement de réécrire $e^{is\Omega_1}$ sous la forme suivante et appliquer ensuite une intégration par parties :

$$\begin{aligned} e^{is\Omega} &= \frac{\nabla_\eta \Omega_1}{is|\nabla_\eta \Omega|^2} \cdot \nabla_\eta e^{is\Omega}, \\ e^{is\Omega} &= \frac{1}{i\Omega} \partial_s e^{is\Omega}. \end{aligned} \tag{III.127}$$

Définition 13. *Une région est dite non résonante en espace si $\nabla_\eta \Omega$ ne s'annule pas. De la même manière une région est dite non résonante en temps si Ω ne s'annule pas.*

Remarque 42. *On observe donc que lorsque l'on appliquera une intégration par partie en espace le terme délicat en s dans I_3 sera absorbé par le $\frac{1}{is|\nabla_\eta \Omega|^2}$. Alors que lorsqu'on appliquera une intégration par partie en temps cela reviendra à estimer un terme de la forme $\bar{Z}\, \partial_s(e^{-itH} Z)$ ce qui correspond à des termes de degré au moins cubiques, en d'autres termes cela revient à appliquer une forme normale qui augmente le degré de la nonlinéarité de telle sorte que l'on soit au dessus de l'exposant critique de Strauss.*

Remarque 43. *On peut observer que l'intersection des régions résonantes en temps et en espace correspond à la région $\xi = 0$. Cela correspond à une difficulté majeure car les termes dans (III.127) explosent en $\xi = 0$, cependant ces effets nocifs seront compensés par le symbole de la forme bilinéraire B_3 (en effet on rappelle que $|B_3(\xi_1, \xi_2)| \lesssim U(\xi_1 + \xi_2) = U(\xi)$). Cela explique à postiori l'importance du choix de la forme normale (voir p93).*

Comme dans [99] il s'agit donc de décomposer B_3 en deux parties

$$B_3 = B_3^X + B_3^T,$$

telles que B_3^X soit supporté en (ξ, η) dans une région non résonante en espace, et B_3^T dans une région non résonante en temps. Plus précisément on décompose B_3 en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley :

$$B_j^{abc} = \chi^a(\xi)\chi^b(\eta)\chi^c(\zeta)B_j(\eta,\zeta) = B_j^{a,b,c,X} + B_j^{a,b,c,T} \tag{III.128}$$

avec $a, b, c \in 2^{\mathbb{Z}}$ tels que $|\xi| \sim a$, $|\eta| \sim b$ et $|\xi - \eta| \sim c$.

Intégration de la phase en espace et en temps

Supposons que l'on soit dans une région $(\xi, \eta, \xi - \eta)$ avec $|\xi| \sim a$, $|\eta| \sim b$ et $|\xi - \eta| \sim c$ où la phase $\Omega_1 = \Omega$ soit non résonante en espace on a alors :

$$B_3^{a,b,c} = B_3^{a,b,c,X} = \chi^a(\xi)\chi^b(\eta)\chi^c(\zeta)B_j^X(\eta,\zeta),$$

Puisqu'on a :

$$e^{is\Omega} = \frac{\nabla_\eta \Omega}{is|\nabla_\eta\Omega|^2} \cdot \nabla_\eta e^{is\Omega}, \tag{III.129}$$

on a après intégration par parties en espace η :

$$\begin{aligned} I_3^{a,b,c,X} =& - \mathcal{F}^{-1}(\Big(e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \big(e^{is\Omega(\xi,\eta)}\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c,X}(\eta, \xi-\eta) \cdot \nabla_\eta[\check{Z}(\eta)\widetilde{Z}(\xi-\eta)] \\ & \qquad + \mathcal{B}_{2,3}^{a,b,c,X}(\eta,\xi-\eta)\check{Z}(\eta)\widetilde{Z}(\xi-\eta)\big)ds\Big) \\ =& - \int_0^t e^{isH}\big(\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c,X}[JZ, \bar{Z}] - \mathcal{B}_{1,j}^{a,b,c,X}[Z, \overline{JZ}] + \mathcal{B}_{2,j}^{a,b,c,X}[Z,\bar{Z}]\big)ds, \end{aligned} \tag{III.130}$$

avec :

$$\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c,X} = \frac{\nabla_\xi \Omega \cdot \nabla_\eta \Omega}{|\nabla_\eta \Omega|^2} B_3^{a,b,c,X},\ \ \mathcal{B}_{2,3}^{a,b,c,X} = \nabla_\eta \Big(\frac{\nabla_\xi \Omega \cdot \nabla_\eta \Omega}{|\nabla_\eta\Omega|^2} B_3^{a,b,c,X} \Big).$$

De la même manière lorsque l'on est sur une zone non résonante en temps on peut estimer $I_3^{a,b,c,T}$ comme ceci avec :

$$\frac{1}{i\Omega}\partial_s e^{is\Omega} = e^{is\Omega},$$

et par intégration par parties en temps on a :

$$\begin{aligned} I_3^{a,b,c,T} =& - \mathcal{F}^{-1}(\Big(e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{i\nabla_\xi\Omega}{i\Omega} e^{is\Omega} B_j^{a,b,c,T}(\eta,\xi-\eta)\check{Z}(\eta)\widetilde{Z}(\xi-\eta)\Big)d\eta ds\Big) \\ & - \mathcal{F}^{-1}(\Big(e^{-itH(\xi)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{is\nabla_\xi\Omega}{i\Omega} e^{is\Omega} B_j^{a,b,c,T}(\eta,\xi-\eta)\partial_s\big(\check{Z}(\eta)\widetilde{Z}(\xi-\eta)\big)\Big)d\eta ds\Big) \\ & + \Big[\mathcal{F}^{-1}(\Big(e^{-itH(\xi)} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{is\nabla_\xi\Omega}{i\Omega} e^{is\Omega(\xi,\eta)} B_j^{a,b,c,T}(\eta,\xi-\eta)\partial_s\big(\check{Z}(\eta)\widetilde{Z}(\xi-\eta)\big)\Big)d\eta ds\Big)\Big]_0^t \\ =& - \int_0^t e^{isH}\Big(\mathcal{B}_{3,3}^{a,b,c,T}[Z,\bar{Z}]ds + \mathcal{B}_{3,3}^{a,b,c,T}[s\mathcal{N}Z,\bar{Z}] + \mathcal{B}_{3,3}^{a,b,c,T}[Z, s\overline{\mathcal{N}Z}]\Big)ds \\ & \qquad + \big[e^{isH}\mathcal{B}_{3,3}^{a,b,c,T}[sZ,\bar{Z}]\big]_0^t, \end{aligned} \tag{III.131}$$

avec :

$$\mathcal{B}_{3,3}^{a,b,c,T} = \frac{\nabla_\xi\Omega}{\Omega} B_3.$$

Remarque 44. *On peut observer que les second et troisìeme termes dans l'égalité précédente semblent délicats à estimer car on a un terme de temps s, cependant celui ci sera compensé par le fait que l'on considère des nonlinéarités au moins cubiques qui ont donc une meilleure décroissance asymptotique en temps long.*

Dans [99], S. Gustafson et al obtiennent la dcómposition suivante de l'espace (ξ, η) en zones non résonantes espace et temps.

Lemme 8. *On a en substituant au fur et à mesure les zones déjà considérées*

1. $|\eta| \sim |\xi| >> |\zeta|$ *(or $c << b \sim a$) est non résonante en temps.*
2. $\alpha > \sqrt{3}$ *est non résonante en temps.*
3. $|\zeta| \geq 1$ *est non résonante en espace.*
4. $|\eta^{\perp}| << M|\eta|$ *est non résonante en temps.*
5. *Les autres régions restantes sont non résonantes en espace.*

On rappelle les notations suivantes :

$$\alpha = |\widehat{\zeta} - \widehat{\xi}|,\ \beta = |\widehat{\zeta} + \widehat{\eta}|,\ \eta^{\perp} = -\widehat{\xi} \times \widehat{\xi} \times \eta. \tag{III.132}$$

On a de plus le lemme suivant :

Lemme 9. *En notant $M = \max(a, b, c)$, $m = \min(a, b, c)$ et $l = \min(b, c)$ on a :*

– *Si $M << 1$ alors pour $|\varepsilon| > 0$ petit :*

$$\|\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c,X}\|_{H^{1+\varepsilon}} \lesssim l^{\frac{1}{2}-2\varepsilon},\ \ \|\mathcal{B}_{2,3}^{a,b,c,X}\|_{H^{1+\varepsilon}} \lesssim l^{\frac{1}{2}-2\varepsilon} M^{-1}, \tag{III.133}$$

– *Si $M \geq 1$ alors pour $|\varepsilon| > 0$ petit :*

$$\|\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c,X}\|_{H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} \lesssim l^{1-\varepsilon}\langle a\rangle^{-1},\ \ \|\mathcal{B}_{2,3}^{a,b,c,X}\|_{H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} \lesssim l^{-\varepsilon}\langle a\rangle^{-1}. \tag{III.134}$$

Lemme 10.

$$\|\mathcal{B}_{3,3}^{a,b,c,T}\|_{[H^s]} \lesssim (\frac{\langle M\rangle}{M})^s l^{\frac{3}{2}-s}\langle a\rangle^{-1}. \tag{III.135}$$

Remarque 45. *Comme nous le mentionnions dans la remarque 40 on va à présent utiliser le lemme 7, en hautes fréquences on travaillera avec le coefficient $s = \frac{3}{2}$ qui correspond aux estimations de Strichartz classiques (c'est à dire dans un certain sens, notre problème est de même nature que l'existence en temps fini). En basses fréquences les choses sont différentes, on a dans ce cadre une perte d'une demi dérivée puisqu'on devra travailler avec $s = 1+\varepsilon$. Cette perte de dérivée sera compensée par une meilleure décroissance asymptotique en temps long que ce que procure les inégalités de Strichartz usuelles et ceci graâce à la norme à poids $\|\cdot\|_X$ (voir la proposition 14).*

Estimation de I_3

Il s'agit donc d'estimer I_3 après avoir utilisé la décomposition du lemme 8. Considérons par exemple le cas d'une région non résonante en espace. On a donc à estimer le membre de droite de (III.130) et en particulier lorsque $b \lesssim c \sim a$ (il reste bien évidemment à traiter les autres cas $c \lesssim b \sim a$ et $a \lesssim c \sim b$) :

$$\begin{aligned} &\|\int_0^t e^{isH}(\sum_{b\lesssim c\sim a} \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c}[JZ, \bar{Z}] - \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c}[Z, \overline{JZ}])ds\|_{H^1} \\ &\qquad \lesssim \sum_{b\lesssim c\sim a} \langle a\rangle \|\int_0^t e^{isH}\big(\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c}[JZ, \bar{Z}] - \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c}[Z, \overline{JZ}]\big)ds\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{III.136}$$

Puisque $c \sim a$ cela signifie que pour $K > 0$ nous avons $\frac{c}{K} \leq a \leq Kc$, on a donc $\sum_{b \lesssim c \sim a} \|B_{1,3}^{a,b,c}\|_{[H]^s} \lesssim \sum_a \sum_{b \lesssim a} \|B_{1,3}^{a,b,a}\|_{[H]^s}$. On en déduit alors en utilisant le lemme 7 pour $0 < \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{b \lesssim c \sim a} \langle a \rangle \| \int_0^t e^{isH} \big(\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c}[JZ^\pm, Z^\pm] - \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,c}[Z^\pm, JZ^\pm]\big) ds\|_{L^2} \lesssim \\
&\lesssim \sum_{b \lesssim a << 1} \langle a \rangle \big(\| \int_0^t e^{isH} \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,a}[U^{\frac{\varepsilon}{2}} U^{-\frac{\varepsilon}{2}} JZ, \bar{Z}]\big) ds\|_{L^2} \\
&\qquad\qquad + \sum_{b \lesssim a << 1} \langle a \rangle \big(\| \int_0^t e^{isH} \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,a}[U^{\frac{\varepsilon}{2}} U^{-\frac{\varepsilon}{2}} Z, \overline{JZ}]\big) ds\|_{L^2}\big) \\
&+ \sum_{b \lesssim a, a \gtrsim 1} \langle a \rangle \big(\| \int_0^t e^{isH} \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,a}[U^{\frac{\varepsilon}{2}} U^{-\frac{\varepsilon}{2}} \langle \nabla \rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \langle \nabla \rangle JZ, U^{\frac{1}{6}} U^{-\frac{1}{6}} \langle \nabla \rangle^{-1} \langle \nabla \rangle \bar{Z}]\big) ds\|_{L^2} \\
&+ \sum_{b \lesssim a, a \gtrsim 1} \langle a \rangle \big(\| \int_0^t e^{isH} \mathcal{B}_{1,3}^{a,b,a}[U^{\frac{\varepsilon}{2}} U^{-\frac{\varepsilon}{2}} \langle \nabla \rangle^{-1} \langle \nabla \rangle Z, \langle \nabla \rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \langle \nabla \rangle^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \overline{JZ}]\big) ds\|_{L^2}\big) \\
&\lesssim \sum_{b \lesssim a << 1} m^{\frac{\varepsilon}{2}} \|\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,a}\|_{[B^{1+\varepsilon}]} \|1_{\{|\xi| \lesssim 1\}} U^{-\frac{\varepsilon}{2}} JZ\|_{L_t^\infty L^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}}} \|1_{\{|\xi| \lesssim 1\}} U^{-1/6} Z\|_{L^{\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{4}}}(L^6)} \\
&\quad + \sum_{b \lesssim a, a \gtrsim 1} U(m)^{\frac{\varepsilon}{2}} \|\mathcal{B}_{1,3}^{a,b,a}\|_{[B^{\frac{3}{2}}]} \langle a \rangle \langle b \rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \langle a \rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \|U^{-\frac{\varepsilon}{2}} \langle \nabla \rangle^{1-\frac{\varepsilon}{2}} JZ\|_{L_t^\infty L^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \|U^{-1/6} \langle \nabla \rangle Z\|_{L^{\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon}{4}}}(L^6)}.
\end{aligned} \tag{III.137}$$

On a ensuite par inclusion de Sobolev :

$$\|1_{\{|\xi| \lesssim 1\}} U^{-\frac{\varepsilon}{2}} JZ\|_{L^\infty L^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}}} \lesssim \|JZ\|_{L^\infty(L^2)}. \tag{III.138}$$

Et :

$$\|\langle \nabla \rangle^{1-\frac{\varepsilon}{2}} U^{-\frac{\varepsilon}{2}} JZ\|_{L^\infty L^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{6}}}} \lesssim \|JZ\|_{L^\infty(L^2)}. \tag{III.139}$$

En utilisant la proposition 14 et le fait que $\frac{1}{t^{\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{4}}}} 1_{t>1}$ soit intégrable on a :

$$\begin{aligned}
&\|U^{-\frac{1}{6}} Z\|\|_{L^{\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{4}}}(L^6)} + \|U^{-1/6} \langle \nabla \rangle Z\|_{L^{\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon}{4}}}(L^6)} \lesssim \\
&\lesssim \|U^{-\frac{1}{6}} Z\|_{L^2_{t<1}(H^{1,6})} + \|U^{-\frac{1}{3}} Z\|_{L_{t>1}^{\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{4}}}(H^{1,6})} + \|U^{-\frac{1}{3}} Z\|_{L_{t>1}^{\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon}{4}}}(H^{1,6})}, \\
&\lesssim \|U^{-\frac{1}{6}} Z\|_{L^2(H^{1,6})} + \|tU^{-\frac{1}{3}} Z\|_{L^\infty(H^{1,6})} \lesssim \|Z\|_{X \cap S}.
\end{aligned} \tag{III.140}$$

De la même manière on a :

$$\|U^{-\frac{1}{6}} Z\|_{L_{t>T}^{\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{4}}}(L^6)} + \|U^{-1/6} \langle \nabla \rangle Z\|_{L_{t>T}^{\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon}{4}}}(L^6)} \lesssim \|Z\|_X \bigg(\frac{1}{T^{\frac{\varepsilon}{4}}} + \frac{1}{T^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{4}}}\bigg).$$

Remarque 46. *On observe sans surprise qu'en temps long on utilise la norme de l'espace X pour boucler nos estimations. En effet les symboles sont peu réguliers en basses fréquences ce qui induit le besoin d'avoir une meilleure décroissance asymptotique en temps long.*

On veut maintenant estimer le membre de droite de l'inégalité (III.137), commençons par le cas $M << 1$. Pour ce faire en appliquant l'estimation d'interpolation suivante dans les espaces de Besov $\|\cdot\|_{[B^{1+\varepsilon}]} \lesssim \|\cdot\|^{\frac{1}{2}}_{[H^{1+\frac{\varepsilon}{2}}]}\|\cdot\|^{\frac{1}{2}}_{[H^{1+\frac{3\varepsilon}{2}}]}$ il est suffisant d'estimer $\mathcal{B}^{a,b,a}_{1,3}$ en norme $[H^{1+\varepsilon'}]$ pour n'importe quel $\varepsilon' > 0$ petit. Cela donne via le lemme 9 :

$$\begin{aligned}\sum_{b\lesssim a<<1} m^{\frac{\varepsilon}{2}}\|\mathcal{B}^{a,b,a}_{1,3}\|_{[H^{1+\varepsilon'}]} &\lesssim \sum_{a<<1}\sum_{b\lesssim a} b^{\frac{\varepsilon}{2}} b^{\frac{1}{2}-2\varepsilon'} \\ &\lesssim \sum_{a<<1} a^{\frac{\varepsilon}{2}} a^{\frac{1}{2}-2\varepsilon'} \lesssim 1.\end{aligned} \tag{III.141}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à traiter le cas $M \geq 1$, on a alors pour $|\varepsilon'| > 0$:

$$\begin{aligned}&\sum_{b\lesssim a, a\gtrsim 1} U(m)^{\frac{\varepsilon}{2}}\|\mathcal{B}^{a,b,a}_{1,3}\|_{[H^{\frac{3}{2}+\varepsilon'}]}\langle a\rangle\langle b\rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}\langle a\rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \lesssim \sum_{a\gtrsim 1}\sum_{b\lesssim a} U(b)^{\frac{\varepsilon}{2}}\langle b\rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} b^{1-\varepsilon'}\langle a\rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}, \\ &\lesssim \sum_{a\gtrsim 1}\langle a\rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}\big(\sum_{b\leq 1} b^{1-\varepsilon'+\frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{1\leq b\lesssim a} b^{\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon'}\big) \lesssim \sum_{a\gtrsim 1}\langle a\rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{a\gtrsim 1}\langle a\rangle^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} a^{\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon'} \lesssim 1.\end{aligned} \tag{III.142}$$

Cela conclut donc l'estimation de I_3 pour l'opérateur bilinéaire B_3 et pour les termes de la forme $\mathcal{B}^{a,b,a}_{1,3}$. Les autres cas (c'est à dire les autres régions de $\mathcal{B}^{a,b,c}_{1,3}$ $c \leq b \sim a$ et $a \leq b \sim c$ ainsi que le cas de $\mathcal{B}^{a,b,c}_{2,3}$, $\mathcal{B}^{a,b,c}_{3,3}$) se traitent de la même manière ce qui conclut la preuve du théorème 19.

Preuve du théorème 20

Afin de prouver le théorème 20, il suffit de montrer que la solution $\psi = 1+\varphi$ de (III.87) obtenue par S. Gustafson et al in [99] ne s'annule jamais. En d'autres termes il s'agit de montrer que φ reste petit en norme $L^\infty_{t,x}$ pour tout temps $t > 0$. On pourra ensuite utiliser la transformation de Madelung $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2\sqrt{\kappa}}}$ avec $u = \nabla\theta$ afin de propager la régularité de φ sur la vitesse $u = \nabla\theta$ et la densité $\rho - 1$ via des théorèmes de composition et de paraproduits. Cela permettra ainsi de prouver l'existence globale de solutions et leur unicité pour le système d'Euler-Korteweg si tant est que l'on choisisse φ_0 suffisamment régulière.

Contrôle L^∞ de φ

La difficulté essentielle de l'analyse consiste à montrer que la norme L^∞ de φ reste petite tout au long du temps lorsque l'on choisit une donnée initiale petite dans des espaces fonctionnels convenables. Pour ce faire on va distinguer le comportement de φ en temps long (ce qui revient à exploiter la notion de scattering via le théorème 19 de S. Gustafson et al et le fait que φ disperse à l'infini ce qui insinue une décroissance en temps de la norme L^∞) et en temps cours (c'est à dire ici utiliser un théorème d'existence en temps fini). Plus précisément en temps long nous tirerons profit de l'estimation à poids $\|\varphi\|_X$ et en temps court on bénéficiera d'effets régularisants sur la partie Duhamel ce qui nous permettra de choisir une donnée initiale φ_0 dans seulement $H^{\frac{N}{2}-\frac{1}{6}+\varepsilon}$ et non pas $H^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$.

Contrôle L^∞ de φ en temps long $t \geq 1$

On rappelle que via (III.112) on a :

$$\begin{aligned}&\||\nabla|^{-2+\frac{5\theta}{3}} v_{<1}(t)\|_{L^6} \lesssim \min(1, t^{-\theta})\|v(t)\|_{X(t)}, \\ &\||\nabla|^{\theta} v_{\geq 1}(t)\|_{L^6} \lesssim \min(t^{-\theta}, t^{-1})\|v(t)\|_{X(t)},\end{aligned} \tag{III.143}$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$. Cela implique en particulier que :

$$\|U^{-1}v_{<1}(t)\|_{L^6} + \|\nabla U^{-1}v_{\geq 1}(t)\|_{L^6} \lesssim (\min(1, t^{-\frac{3}{5}}) + \frac{1}{t})\|v(t)\|_{X(t)}. \tag{III.144}$$

Puisque $\varphi = V^{-1}v = \mathrm{Re}v + iU^{-1}\mathrm{Im}v$ on a pour tout $t \geq 1$ et par inclusion de Sobolev :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^\infty_{t\geq 1}(H^{1,6})} &\lesssim \|V^{-1}v\|_{L^\infty_{t\geq 1}(H^{1,6})} \lesssim \frac{1}{t^{\frac{3}{5}}}\|v\|_{X(t)}, \\
\|\varphi\|_{L^\infty_{t\geq 1}(L^\infty)} &\lesssim \frac{1}{t^{\frac{3}{5}}}\|v\|_{X(t)} \lesssim \frac{\delta}{t^{\frac{3}{5}}},
\end{aligned} \tag{III.145}$$

avec δ défini dans (III.91). On en déduit donc que φ reste petit en norme L^∞ pour tout $t \geq 1$ si δ est choisi petit.

Contrôle L^∞ de φ en temps court $t \leq 1$

On va donc maintenant estimer φ en norme L^∞ sur l'intervalle de temps $[0,1]$ en utilisant un effet régularisant à la Kato. Cela a été également utilisé dans [16] afin de montrer des résultats d'explosion en temps fini et ceci en norme L^∞ pour les solutions de Schrödinger non linéaire et de Gross-Pitaevskii. On a plus exactement le théorème suivant.

Théorème 23. *(J. L. Bona-G. Ponce-J.-C. Saut-C. Sparber [16])*
Pour $N \geq 3$, $s > \frac{N}{2} - 1/6$, $\varphi_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$, soit φ la solution de (III.51) satisfaisant :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Re(\varphi) \\ Im(\varphi) \end{pmatrix}(t) &= A(t)\begin{pmatrix} Re(\varphi_0) \\ Im(\varphi_0) \end{pmatrix} + \int_0^t A(t-s)\begin{pmatrix} Re(F(\varphi(s))) \\ Im(F(\varphi(s))) \end{pmatrix} ds \\
&= A(t)\begin{pmatrix} Re(\varphi_0) \\ Im(\varphi_0) \end{pmatrix} + I(t,x).
\end{aligned}$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(Ht) & U\sin(Ht) \\ -U^{-1}\sin(Ht) & \cos(Ht) \end{pmatrix}.$$

Pour tout $T > 0$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\|\varphi_0\|_{H^s} < \varepsilon_0$

1. *la solution est définie sur $[0,T]$ et*

$$\varphi(t) = e^{it(\Delta-1)}\varphi_0 + \int_0^t e^{i(t-s)(\Delta-1)}F(\varphi)ds + g(t), \ \|g\|_{L^\infty_T H^{s+1}} \lesssim \|\varphi_0\|_{H^s}$$

2. *$\displaystyle\int_0^t e^{i(t-s)(\Delta-1)}F(\varphi)ds \in C([0,T], H^{s+\frac{1}{2}})$,et en particulier $I \in C_b([0,T]\times\mathbb{R}^N)$, de plus il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\|I\|_{C_b([0,T]\times\mathbb{R}^N)} \lesssim T^\alpha(\|\varphi_0\|^2_{H^s} + \|\varphi_0\|^3_{H^s}). \tag{III.146}$$

3. *Enfin pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $\varphi_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)\cap C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que $\|\varphi_0\|_{H^s\cap L^\infty} \leq \varepsilon$ et $\|\varphi(\cdot,T)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = +\infty$.*

Remarque 47. – *Par rapport à [16] on a préféré pour l'équation de Gross-Pitaevskii travailler directement sur le système original plutôt que sur le système diagonalisé afin d'éviter quelques difficultés liées à l'opérateur singulier U^{-1}.*

En utilisant la propriété deux du théorème 23, on montre sans difficulté que le terme de Duhamel I reste petit en norme L^∞ si tant est que φ_0 soit choisi petit dans $H^{\frac{N}{2}+\frac{1}{6}+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. Le terme linéaire $A(t)\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\varphi_0) \\ \mathrm{Im}(\varphi_0) \end{pmatrix}$ reste petit tout le long du temps si l'on suppose que la transformeée de Fourier $\widehat{\varphi_0}$ est petite en norme L^1.
On vient donc de montrer que $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2}$ et ceci grâce à la condition de petitesse (III.93). On a donc $\psi(t,x) \geq \frac{1}{2}$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$. On peut alors utiliser la transformation de Madelung et prouver l'existence de solutions fortes globales pour le système d'Euler Korteweg avec pression quantique. Cela achève la preuve du théorème 20.

III.5 Ouvertures

Système de Korteweg

On a montré avec F. Charve dans [35] que les solutions fortes globales du système de Korteweg local (lorsque $\kappa(\rho) = \frac{\mu^2}{\rho}$, $\mu(\rho) = \mu\rho$ et $\mu > 0$) convergent en une dimension lorsque μ tends vers 0 vers une solution entropique du système d'Euler compressible. Il serait intéressant d'essayer de montrer de tels résultats lorsque l'on considère le système d'Euler Korteweg et que l'on fait tendre le coefficient de capillarité vers 0 ; cela reviendrait ainsi à construire une solution avec éventuellement des chocs dispersifs (et donc à priori non entropique) pour le système d'Euler compressible. En d'autres termes ce résultat serait un pendant des résultats obtenus par P. Lax et D. Levermore ([157, 158]) pour le cas plus simple de l'équation de Burger.

Système d'Euler-Korteweg

On a montré dans [6, 7] avec C. Audiard l'existence de solutions fortes globales pour le système d'Euler Korteweg en dimension $N \geq 3$ pour des données initiales petites avec une vitesse initiale choisie irrotationnelle. La même question se pose dans le cadre de la dimension $N = 2$, évidemment cela semble beaucoup plus ardu puisqu'on est confronté à traiter une non-linéarité sous critique en terme d'exposant de Strauss ; une approche pourrait consister à appliquer une forme normale bien choisie qui aurait pour but de simplifier la non linéarité en basses fréquences, par exemple se ramener à un terme de la forme $u \cdot \nabla u$. Une autre possibilité serait d'appliquer une méthode de type "vector fields" à la S. Klainerman ; la difficulté correspondant bien évidemment à trouver de bons champs de vecteurs invariants pour l'équation d'Euler-Korteweg.

Le même type de problème se pose également pour l'équation de Gross-Pitaevskii en ce qui concerne le scattering (en effet S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai ont résolu le cas de la dimension $N \geq 3$, voir [98, 99]). On peut rappeler que la notion de scattering est concomitante à la question de l'existence de solutions fortes avec données petites (c'est ce que font en particulier S. Gustafson et al en montrant l'existence de solutions fortes globales avec données petites pour Gross-Pitaevskii et ceci en réussissant à exhiber des propriétés dispersives pour les équations de Gross-Pitaevskii ; cela leur permet de manière immédiate de prouver du scattering). Prouver du scattering pour les solutions de Gross-Pitaevskii en dimension $N = 2$ au niveau des espaces d'énergie semble impossible puisque l'on sait qu'il existe des ondes progressives d'énergie abritrairement petite . La question du scattering en dimension $N = 2$ si tant est qu'elle ait une réponse positive ne peut donc être à priori résolue que dans des espaces de données initiales plus réguliers que là où vivent les ondes progressives (en particulier il faudrait travailler avec de meilleurs espaces à poids). Cela pourrait ensuite permettre de prouver l'existence de solutions fortes globales avec données irrotationnelles petites en dimension $N = 2$ pour Euler compressible avec pression quantique en utilisant la transformation de Madelung et le fait que l'on ait pas formation de vortex pour Gross-Pitaevskii.
Un autre problème en suspens est une conjecture dûe à S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai dans [99] sur la notion de scattering pour l'équation de Gross-Pitaevskii. En effet il est bien connu qu'il existe une borne inférieure strictement positve $\mathcal{E}_0$ en terme d'énergie sur l'ensemble des ondes progressive u_c ; il serait donc intéressant de montrer que toute solution de Gross-Pitaevskii avec donnée initiale plus petite que $\mathcal{E}_0$ dans l'espace d'énergie (plus éventuellement d'autres propriétés de régularité) admet du scattering. Pour ce faire, il est fort probable qu'il ait besoin de nouvelles estimations de type Morawetz.
Enfin la question de l'existence de solutions fortes globales avec données grandes pour le système d'Euler Korteweg en une dimension d'espace reste ouverte.

Chapitre IV

Appendice

Décomposition de Littlewood-Paley

Dans les travaux que nous avons présentés, nombre d'entre eux sont reliés à de l'analyse de Fourier et en particulier à la théorie de Littlewood-Paley. Nous allons donc dans cet appendice rappeler cette théorie qui consiste essentiellement en une description de certaines fonctions ou distributions tempérées à travers un découpage en tranches dyadiques. Nous considérons ici à la fois la décomposition de Littlewood-Paley inhomogène et homogène et ceci dans le cas de l'espace entier. Nous en profiterons ensuite pour définir les espaces de Besov tout en faisant quelques rappels sur la notion de paraproduit introduite par J.-M. Bony dans [17]. Enfin nous donnerons quelques propriétés des solutions de l'équation de la chaleur ainsi que de l'équation de transport lorsque l'on travaille avec des données initiales appartenant aux espaces de Besov. Pour plus de détails sur ces sujets nous renvoyons aux excellents ouvrages de référence pour tous les outils de l'analyse harmonique moderne que sont les livres de H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin ainsi que celui de T. Runst et W. Sickel (voir [8, 185]).
On peut définir une décomposition de Littlewood-Paley à partir de n'importe quel couple de fonctions positives $(\chi,\varphi)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que :

$$\begin{aligned}&\text{supp}\chi\subset\{\xi\in\mathbb{R}^N,\ |\xi|\le\frac{4}{3}\},\ \ \text{supp}\varphi\subset\{\xi\in\mathbb{R}^N,\ \frac{3}{4}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\},\\&\chi(\xi)+\sum_{l\in\mathbb{N}}\varphi(2^{-l}\xi)=1\ \ \text{si}\ \ \xi\ne0.\end{aligned}$$

Posons $\varphi_l(\xi)=\varphi(2^{-l}\xi)$, $h_l=\mathcal{F}^{-1}\varphi_l$ et $h=\mathcal{F}^{-1}\varphi$. On définit les blocs dyadiques comme suit :

$$\begin{aligned}&\Delta_l u=0\ \ \text{si}\ \ l\le-1,\\&\Delta_{-1}u=\chi(D)u=\int_{\mathbb{R}^N}h(y)u(x-y)dy,\\&\Delta_l u=\varphi(2^{-l}D)u=2^{lN}\int_{\mathbb{R}^N}h(2^l y)u(x-y)dy,\\&\text{et}\ \ S_l u=\sum_{k\le l-1}\Delta_k u\,.\end{aligned}$$

On peut alors remarquer que tout élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u=\sum_{k\ge-1}\Delta_k u\,.$$

Le terme de droite est appelé décomposition de Littlewood-Paley (inhomogène) de u.
De nombreux résultats de ce mémoire exploitent la notion d'invariance par changement d'échelle

pour les EDPs. De ce fait, une décomposition homogène paraît plus judicieuse dans la pratique et ceci essentiellement pour les résultats d'existence globale (en effet généralement pour des résultats d'existence locale les basses fréquences jouent un rôle mineur). En reprenant la construction précédente, on peut de la même manière définir une décomposition de Littlewood-Paley *homogène* à l'aide d'une fonction φ positive de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ supporté dans $\{\xi \in \mathbb{R}^N,\ \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\}$ et telle que :

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-l}\xi) = 1 \ \text{ pour } \ \xi \neq 0. \tag{IV.1}$$

On pose alors $\varphi_l(\xi) = \varphi(2^{-l}\xi)$, $h_l = \mathcal{F}^{-1}\varphi_l$ et on définit les blocs dyadiques comme suit :

$$\Delta_l u = \varphi(2^{-l}D)u = \int_{\mathbb{R}^N} h_l(y)u(x-y)dy \ \text{ pour } \ l \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que la décomposition de Littlewood-Paley homogène obtenue :

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta_k u\,.$$

n'est pas vraie pour les polynômes dont le support de la transformée de Fourier est le singleton $\{0\}$. De ce fait, l'égalité n'a lieu que modulo les polynômes.

Espaces de Besov

La décomposition de Littlewood-Paley permet ainsi de caractériser les espaces de Sobolev, et plus généralement les espaces de Besov. On va à présent définir les espaces de Besov à la fois dans le cadre non homogène et homogène.

Définition 14. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $(p,r) \in [1,+\infty]^2$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Posons :*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} = (\sum_{l\geq -1} (2^{sl}\|\Delta_l u\|_{L^p})^r)^{\frac{1}{r}} \ \text{ si } \ 1 \leq r < +\infty \ \text{ et } \ \|u\|_{B^s_{p,\infty}} = \sup_{l\geq -1} 2^{sl}\|\Delta_l u\|_{L^p}.$$

On définit alors l'espace de Besov non homogène $B^s_{p,r}$ par l'ensemble $\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\|u\|_{B^s_{p,r}} < +\infty\}$.

La définition ci-dessus ne dépend pas de la décomposition de Littlewood Paley choisie. Par ailleurs les espaces de Sobolev sont des cas particuliers de Besov et on a : $H^s = B^s_{2,2}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a en plus les propriétés d'injections suivantes si $s_1 \geq s_2$, $p_1 \leq p_2$ et $r_1 \leq r_2$,

$$B^{s_1}_{p_1,r_1} \hookrightarrow B^{s_2-N(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2},$$

où la notation $\hookrightarrow$ signifie injection continue.
Nous utilisons également dans ce mémoire des espaces de Besov homogènes, il s'agit essentiellement cette fois ci de considérer la décomposition de Littlewood-Paley homogène au principe près que l'on cherchera à exclure les polynômes afin d'avoir une définition non soumise à un "modulo les polynômes".

Définition 15. *On note par $\mathcal{S}'_h$ l'espace des distributions tempérées avec $u \in \mathcal{S}'_h$ vérifiant :*

$$\lim_{j\to-\infty} S_j u = 0 \ \text{ dans } \ \mathcal{S}'.$$

Définition 16. *Soit* $s \in \mathbb{R},\ p \in [1,+\infty],\ q \in [1,+\infty],$ *et* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *on pose :*

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} = (\sum_{l\in\mathbb{Z}}(2^{ls}\|\Delta_l u\|_{L^p})^q)^{\frac{1}{q}} \ \ et\ \ \|u\|_{B^s_{p,\infty}} = \sup_{l\in\mathbb{Z}} 2^{sl}\|\Delta_l u\|_{L^p}.$$

L'espace dec Besov homogène $B^s_{p,q}$ *est l'ensemble des distributions tempérées u dans* $\mathcal{S}'_h$ *telles que* $\|u\|_{B^s_{p,q}} < +\infty$.

Remarque 48. *En pratique on conservera les mêmes notations que pour les espaces de Besov non homogènes, on se contentera le cas échéant de préciser avec quel type d'espace de Besov on travaille. Systématiquement lorsque l'on obtient des résultats d'existence de solutions fortes globales avec données petites, ceux-ci concernent les espaces de Besov homogènes.*

Espaces de Besov hybrides

Souvent lorsque l'on considère le problème de l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales petites et ceci pour une équation issue de la mécanique des fluides, on a à distinguer le comportement basses fréquences et hautes fréquences. Cela motive donc la définition d'espaces de Besov hybrides introduite par R. Danchin dans [52] où l'indice de régularité diffère pour les basses et hautes fréquences. On a donc la définition suivante.

Définition 17. *Soit* $l_0 \in \mathbb{Z}$, $s, t, \in \mathbb{R}$, $(r, r_1) \in [1,+\infty]^2$ *et* $(p,q) \in [1,+\infty]$. *On pose :*

$$\|u\|_{\widetilde{B}^{s,t}_{p,q,1}} = \sum_{l\leq l_0} 2^{ls}\|\Delta_l u\|_{L^p} + \sum_{l>l_0} 2^{lt}\|\Delta_l u\|_{L^q},$$

et :

$$\|u\|_{\widetilde{B}^{s,t}_{(p,r),(q,r_1)}} = \big(\sum_{l\leq l_0}(2^{ls}\|\Delta_l u\|_{L^p})^r\big)^{\frac{1}{r}} + \big(\sum_{l>l_0}(2^{lt}\|\Delta_l u\|_{L^q})^{r_1}\big)^{\frac{1}{r_1}}.$$

Notation 2. *On utilisera souvent la notation suivante :*

$$u_{BF} = \sum_{l\leq l_0}\Delta_l u \quad et \quad u_{HF} = \sum_{l>l_0}\Delta_l u.$$

Remarque 49. *On a les propriétés suivantes :*
- $\widetilde{B}^{s,s}_{p,p,1} = B^s_{p,1}$.
- *Si* $s_1 \geq s_3$ *et* $s_2 \geq s_4$ *alors* $\widetilde{B}^{s_3,s_2}_{p,q,1} \hookrightarrow \widetilde{B}^{s_1,s_4}_{p,q,1}$.

Quelques propriétés des espaces de Besov pour quelques EDPs linéaires

On va à présent rappeler la définition des espaces de Chemin-Lerner $\widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})$ (voir [8]) qui sont particulièrement adaptés à l'étude des EDPs.

Définition 18. *Soit* $\rho \in [1,+\infty]$, $T \in [1,+\infty]$ *et* $s_1 \in \mathbb{R}$. *On pose :*

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^{s_1}_{p,r})} = \big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^{lrs_1}\|\Delta_l u(t)\|^r_{L^\rho(L^p)}\big)^{\frac{1}{r}}.$$

On définit alors l'espace $\widetilde{L}^\rho_T(B^{s_1}_{p,r})$ *comme l'ensemble des distributions tempérées u sur* $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ *telles que* $\lim_{q\to-\infty} S_q u = 0$ *dans* $\mathcal{S}'((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ *et* $\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^{s_1}_{p,r})} < +\infty$.

On note $\widetilde{C}_T(\widetilde{B}^{s_1}_{p,r}) = \widetilde{L}^{\infty}_T(\widetilde{B}^{s_1}_{p,r}) \cap \mathcal{C}([0,T], B^{s_1}_{p,r})$. Mentionnons que selon les inégalités de Minkowski on a :

$$\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{s_1}_{p,r})} \leq \|u\|_{L^{\rho}_T(B^{s_1}_{p,r})} \text{ si } r \geq \rho, \quad \|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(B^{s_1}_{p,r})} \geq \|u\|_{L^{\rho}_T(B^{s_1}_{p,r})} \text{ si } r \leq \rho.$$

On va maintenant rappeler quelques propriétés importantes des solutions de l'équation de la chaleur et de l'équation de transport dans ces espaces de Chemin-Lerner.

Proposition 17. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $(p,r) \in [1,+\infty]^2$ et $1 \leq \rho_2 \leq \rho_1 \leq +\infty$. Supposons que $u_0 \in B^s_{p,r}$ et $f \in \widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s-2+2/\rho_2}_{p,r})$. Soit u la solution de :*

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu\Delta u = f \\ u_{t=0} = u_0\,. \end{cases}$$

Il existe alors $C > 0$ dépendant seulement de N, μ, ρ_1 et ρ_2 tel que :

$$\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(\widetilde{B}^{s+2/\rho_1}_{p,r})} \leq C\big(\|u_0\|_{B^s_{p,r}} + \mu^{\frac{1}{\rho_2}-1}\|f\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s-2+2/\rho_2}_{p,r})}\big)\,.$$

Si de plus r est fini alors u appartient à $C([0,T], B^s_{p,r})$.

Proposition 18. *Soit $1 \leq p_1 \leq p \leq +\infty$, $r \in [1,+\infty]$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$-N\min\big(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p'}\big) < s < 1 + \frac{N}{p_1}.$$

Supposons que $q_0 \in B^s_{p,r}$, $F \in L^1(0,T,B^s_{p,r})$ et que $q \in L^{\infty}_T(B^s_{p,r}) \cap C([0,T];\mathcal{S}')$ est solution de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \partial_t q + u\cdot\nabla q = F, \\ q_{\ t=0} = q_0. \end{cases}$$

Alors il existe une constante C dépendant seulement de N, p, p_1, r et s tel que l'on a pour tout $t \in [0,T]$:

$$\|q\|_{\widetilde{L}^{\infty}_t(B^s_{p,r})} \leq e^{CU(t)}\big(\|q_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t e^{-CU(\tau)}\|F(\tau)\|_{B^s_{p,r}}d\tau\big), \tag{IV.2}$$

avec : $U(t) = \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,\infty}\cap L^{\infty}} d\tau$.

Avant de conclure cette section, nous précisons quelques notations pour les fonctions (ou distributions) qui dépendent du temps. Soit X un espace de Banach, $T \in [0,+\infty]$ et $r \in [1,+\infty]$. On note $L^r(0,T;X)$ l'ensemble des fonctions du temps à valeurs dans X mesurables sur $]0,T[$ et telles que l'application $t \to \|u(t)\|_X$ soit dans l'espace de Lebesgue $L^r(0,T)$. L'espace $C([0,T],X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X, et $C^1([0,T],X)$, l'ensemble des fonctions f de $C([0,T],X)$ différentiables en t et telles que $\partial_t f$ appartienne à $C([0,T],X)$.

Paraproduit et parachamps

De manière générique le produit de deux distributions tempérées n'est pas toujours défini, or le les EDPs non linéaires sont sujettes à considérer de tels produits. Il est donc important de bénéficier d'un cadre rigoureux pour lequel ce dernier soit bien défini, c'est ce à quoi répond le calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans [17] et plus particulièrement le paraproduit.

On va brièvement rappeler le principe de base du paraproduit, dans le cadre non homogène. Soient u et v deux distributions tempérées, on peut écrire formellement :

$$uv = \sum_{l,k\geq -1} \Delta_l u \Delta_k v$$

et décomposer le terme de droite en trois sommes. La première regroupe les termes $\Delta_l u$ correspondant à des fréquences petites devant celles de $\Delta_k v$, la deuxème les termes $\Delta_l u$ à fréquences grandes devant celles de $\Delta_k v$; et la dernière les produits composés de blocs dyadiques de fréquences comparables. On a ainsi la décomposition formelle suivante dite de Bony :

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v)$$

avec :

$$T_u v = \sum_{l\geq 1} S_{l-1} u \Delta_l v \ \text{ et } \ R(u,v) = \sum_{l\geq -1} \Delta_l u (\Delta_{l-1} + \Delta_l + \Delta_{l+1}) v.$$

On peut vérifier que les paraproduits $T_u v$ et $T_v u$ sont toujours bien définis pour u et v des distributions tempérées. Par contre le terme de reste $R(u,v)$ n'est défini que lorsque le produit uv l'est, il bénéficie cependant d'un gain de régularité puisque les propriétés de régularité correspondent à l'addition de celles de u et v.
Donnons maintenant quelques résultats de continuité pour le paraproduit et le reste. Nous renvoyons à [8, 185] pour d'autres résultats du même type.

Proposition 19. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,+\infty]$ et $r \in [1,+\infty]$, on a :*

$$\|T_u v\|_{B^s_{p,r}} \leq C^{1+|s|} \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{B^s_{p,r}}.$$

Si $t < 0$ on a également :

$$\|T_u v\|_{B^{s+t}_{p,r}} \leq \frac{C^{1+|s+t|}}{|t|} \|u\|_{B^t_{\infty,\infty}} \|v\|_{B^s_{p,r}}.$$

Soient $(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$, $(p,p_1,p_2,r,r_1,r_2) \in [1,+\infty]^6$ tels que :

$$s_1 + s_2 > 0,\ \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \ \text{ et } \ \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Alors on a :

$$\|R(u,v)\|_{B^{s_1+s_2-N(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p})}_{p,r}} \leq \frac{C^{1+s_1+s_2}}{s_1+s_2} \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}.$$

Dans les estimations ci-dessus, C est une constante qui ne dépend que de la dimension N.

Remarque 50. *Mentionnons que les résultats précédents s'adaptent sans difficultés aux espaces de Chemin-Lerner modulo des estimations de Hölder en temps, on peut également généraliser ce genre de résultats aux espaces de Besov hybrides.*

Bibliographie

[1] H. Abidi et M. Paicu. Équation de Navier-Stokes avec densité et viscosité variables dans l'espace critique. *Annales de l'institut Fourier*, 57 no. 3 (2007), p. 883-917.

[2] H. Abidi, G. Gui et P. Zhang. On the decay and stability to global solutionsof the 3-D inhomogeneous Navier-Stokes equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 64 (2011), no. 6, 832-881.

[3] H. Abidi, G. Gui et P. Zhang. On the wellposedness of 3-D inhomogeneous Navier-Stokes equations in the critical spaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 204 (2012), no. 1, 189-230.

[4] D.M. Anderson, G.B McFadden et A.A. Wheller. *Diffuse-interface methods in fluid mechanics. Annal review of fluid mechanics* Vol. 30, pages 139-165. Annual Reviews, Palo Alto, CA, 1998.

[5] P. Antonelli et P. Marcati. On the finite energy weak solutions to a system in quantum fluid dynamics. *Comm. Math. Phys* 287 (2009) 657-686.

[6] C. Audiard et B. Haspot. From Gross-Pitaevskii equation to Euler Korteweg system, existence of global strong solutions with small irrotational initial data. *Preprint* 2014 Hal.

[7] C. Audiard et B. Haspot. Global well-posedness of the quasi-linear Euler-Korteweg system for small irrotational data. *Preprint* 2015 Hal.

[8] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer Verlag, 2011.

[9] S. Benzoni-Gavage. Linear stability of propagating phase boundaries in capillary fluids. *Phys. D* 155, (3-4) : 235-273, 2001.

[10] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, S. Descombes et D . Jamet. Structure of Korteweg models and stability of diffuse interfaces. *Interfaces Free Boundaries* 7, 371-414 (2005).

[11] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin et S. Descombes. Well-posedness of one-dimensional Korteweg models. *Electronic Journal of Differential Equations*, (2006) N 59, pp. 1-35.

[12] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin et S. Descombes, On the well-posedness of the Euler-Korteweg model in several space dimensions. *Indiana University Mathematics Journal.* 56, No. 4, 1499–1579 (2007).

[13] F. Bethuel et J-C Saut, Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation I. *Anan. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* 70 (1999), no 2, 147-238.

[14] F. Bethuel, P. Gravejat et J-C Saut, Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation II, *Comm. Math. Phys.*, 285, 2, 2009, 567-651.

[15] S. Bianchini et A. Bressan, Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann. Math.*, **161** 1 (2005), pp. 223-342.

[16] J. L. Bona, G. Ponce, J.-C. Saut et C. Sparber. Dispersive blow up for nonlinear Schrödinger equations revisited. To appear in *J. Math. Pures Appl.* (2014).

[17] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure* 14 (1981) 209-246.

[18] J. Bourgain. Scattering in the energy space and below for the 3D NLS, *J. Anal. Math.* 75 (1998), 267-297.

[19] J. Bourgain et N. Pavlovič. Ill-posedness of the Navier-Stokes equation in a critical space in 3D. *J. Funct. Anal.* 255 (2008), no. 9, 2233–2247.

[20] D. Bresch et B. Desjardins. Sur un modèle de Saint-Venant visqueux et sa limite quasi-géostrophique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 335(12) : 1079-1084, 2002.

[21] D. Bresch et B. Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2D Viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.* 238(1-2) : 211-223, 2003.

[22] D. Bresch et B. Desjardins. Some diffusive capillary models of Korteweg type. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Section Mécanique* 332, (11) : 881-886, 2004.

[23] D. Bresch et B. Desjardins. On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(1) :57–90, 2007.

[24] D. Bresch, B. Desjardins. et C.-K. Lin. On some compressible fluid models : Korteweg,lubrication and shallow water systems. *Comm. Partial Differential Equations.* 28 (3-4) : 843-868, 2003.

[25] D. Bresch, B. Desjardins et E. Zatorska. Two-velocity hydrodynamics in fluid mechanics : Part II existence of global κ-entropy solutions to compressible Navier-Stokes systems with degenerate viscosities. *Preprint arXiv :1411.5488v1*, to appear in *JMPA*.

[26] J.W. Cahn et J.E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system, I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.* 28 (1998) 258-267.

[27] M. Cannone, Y. Meyer et F. Planchon. Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes. *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1993-1994*, exp. No12 pp. École polytechnique, Palaiseau, 1994.

[28] R. Carles, R. Danchin et J-C. Saut. Madelung, Gross-Pitaevskii and Korteweg. *Nonlinearity* 25 (2012), no. 10, 2843-2873.

[29] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, *Courant Lecture Notes in Mathematics*, vol 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New-York 2003.

[30] F. Charve, Local in time results for local and non-local capillary Navier-Stokes systems with large data, *Journal of Differential Equations*, 256 (7) (2014), pp 2152-2193.

[31] F. Charve, Convergence of a low order non-local Navier-Stokes-Korteweg system : the order-parameter model, *preprint (hal 2013).*

[32] F. Charve et R. Danchin. A global existence result for the compressible Navier-Stokes equations in the critical L^p framework. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 198(1), 2010, 233-271.

[33] F. Charve et B. Haspot. Convergence of compressible capillary fluid models : from the non-local to the local Korteweg system. *Indiana University Mathematics Journal.* 6 (2011) 2021-2060.

[34] F. Charve et B. Haspot. Existence of strong solutions in a larger space for the shallow-water system. *Advances in Differential Equations.* 17 Numbers 11-12 (2012), 1085-1114.

[35] F. Charve et B. Haspot. Existence of global strong solution and vanishing capillarity-viscosity limit in one dimension for the Korteweg system. *SIAM J. Math. Anal.* 45 (2) (2013), 469-494.

[36] F. Charve et B. Haspot. On a Lagrangian method for the convergence of a non-local to a local Korteweg capillary fluid model. *Journal of functional Analysis.* 265 (2013) 1264-1323.

[37] J.-Y. Chemin et I. Gallagher. Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Annales de l'Institut H. Poincaré, Analyse non Linéaire.* 26 (2009), no. 2, 599-624.

[38] J.-Y. Chemin et I. Gallagher. On the global wellposedness of the 3-D incompressible Navier-Stokes equations. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris*, 39 (2006), 679-698.

[39] G. Q. Chen, The theory of compensated compactness and the system of isentropic gas dynamics, *Lecture notes, Preprint MSRI-00527-91*, Berkeley, October 1990.

[40] G. Chen et M. Perepelista. Vanishing viscosity limit of the Navier-Stokes equations to the Euler equations for compressible fluid flow. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2010.

[41] Q. Chen, C. Miao et Z. Zhang. Global well-posedness for the compressible Navier-Stokes equations with the highly oscillating initial velocity. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* Volume 63(2010) 1173-1224.

[42] Q. Chen, C. Miao et Z. Zhang. Well-posedness in critical spaces for the compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities. *Revista Matemática Iberoamericana*, 26(3), 915Ð946 (2010).

[43] G.-Q. Chen, D. Hoff et K. Trivisa. Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data. *Communications in Partial Differential Equations.* vol. 25(11 et 12), p2233-2257 (2000).

[44] D. Chiron, Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two, *Nonlinear Anal.* 58 (2004), no 1-2, 175-204.

[45] Y. Cho, H. J. Choe et H. Kim. Unique solvability of the initial boundary value problems for compressible viscous fluids. *Journal de Mathématiques pures.* 83(2), (2004), 243-275(33).

[46] H. J. Choe et H. Kim. Strong solution of the Navier-Stokes equations for isentropic compressible fluids. *J. Differential Equations* 190 (2003), 504-523.

[47] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes. Compensated-compactness and Hardy spaces. *J. Math. Pures Appl.* 72 (1993), p 247-286.

[48] R. Coifman et Y. Meyer, Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires. *Ann. Inst. Fourier* 28 (1978), no 3, wi, 177-202.

[49] C. Coste. Nonlinear Schrödinger equation and superfluid hydrodynamics. *Eur. Phys. J. B,* 1(2) :245-253, 1998.

[50] F. Coquel, D. Diehl, C. Merkle et C. Rohde. Sharp and diffuse interface methods for phase transition problems in liquid-vapour flows. *Numerical Methods for Hyperbolic and Kinetic Problems.* IRMA, (2004)

[51] C. M. Dafermos. The second law of thermodynamics and stability. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 70(2) : 167-179 ; 1979.

[52] R. Danchin. Global Existence in Critical Spaces for compressible Navier-Stokes equations. *Invent. math.* 141, 579-614 (2000).

[53] R. Danchin. Global Existence in Critical Spaces for Flows of Compressible Viscous and Heat-Conductive Gases. *Arch.Rational Mech.Anal.* 160 (2001) 1-39.

[54] R. Danchin. Local Theory in critical Spaces for Compressible Viscous and Heat-Conductive Gases. *Communication in Partial Differential Equations* 26 (78),1183-1233 (2001)

[55] R. Danchin. Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 133(6), 1311-1334, 2003.

[56] R. Danchin. The inviscid limit for density-dependent incompressible fluids. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* Sér. 6, 15 no. 4 (2006), p. 637-688.

[57] R. Danchin. Well-Posedness in Critical Spaces for Barotropic Viscous Fluids with Truly Not Constant Density. *Communications in Partial Differential Equations.* 32 :9,1373-1397.

[58] R. Danchin. On the uniqueness in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 12, pages 111-128 (2005).

[59] R. Danchin. Zero Mach number limit in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.* 35, pages 27-75 (2002).

[60] R. Danchin. Zero Mach number limit in critical spaces for compressible flows with periodic boundary conditions, *American Journal of Mathematics*, 124, pages 1153-1219 (2002).

[61] R. Danchin. A Lagrangian approach for the compressible Navier-Stokes equations. to appear in *Annales de l'institut Fourier. Preprint* arXiv :1201.6203.

[62] R. Danchin et B. Desjardins. Existence of solutions for compressible fluid models of Korteweg type. *Annales de l'IHP,Analyse non linéaire* 18,97-133 (2001).

[63] R. Danchin et P.B. Mucha. A Lagrangian approach for the incompressible Navier-Stokes equations with variable density, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 65(10), 1458-1480 (2012).

[64] R. Danchin et P.B. Mucha. Incompressible flows with piecewise constant density, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 207(3), 991-1023 (2013).

[65] J. M. Delhaye. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation. *Int. J. Multiphase Flow.* 1, 395-409, (1974).

[66] B. Desjardins,. Regularity of weak solutions of the compressible isentropic Navier-Stokes equations. *Comm. P.D.E.*, no 5-6 (22) p. 977-1008, 1997.

[67] B. Desjardins et E. Grenier, Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.* 455 (1999) 2271-2279.

[68] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions et N. Masmoudi, Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions. *J. Math. Pures Appl.* (2002).

[69] R. J. DiPerna. Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics. *Comm. Math. Phys.* 91 (1983), 1-30.

[70] R. J. DiPerna. Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rat. Mech. Anal.* (1983), 22-70.

[71] R. J. Diperna et P.L. Lions. On the global existence for Boltzmann equations : global existence and weak stability. *Ann. Math.* 130 (1989), p. 321-366.

[72] R. J. Diperna et P.L. Lions. Équations différentielles ordinaires et équations de transport avec des coefficients irréguliers. *Séminaire EDP 1988-1989, Ecole Polytechnique, Palaiseau.* 1989.

[73] M. Del Pino et J. Dolbeault, Generalized Sobolev inequalities and asymptotic behaviour in fast diffusion and porous medium problems, *Preprint Ceremade no 9905* (1999) 1-45.

[74] A. Drici et B. Haspot, Remarks on global controllability for the shallow-water system with two control forces, submitted.

[75] J. E. Dunn et J. Serrin. On the thermomechanics of interstitial working ,*Arch. Rational Mech. Anal.* 88(2) (1985) 95-133.

[76] L. C. Evans. Partial differential equations. *AMS*, GSM Volume 19.

[77] E. Feireisl. *Dynmamics of Viscous Compressible Fluids.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications-26 (2004).

[78] E. Feireisl. Compressible Navier-Stokes equations with a non-monotone pressure law. *J. Differential Equations.* 184(1) :97-108, 2002.

[79] E. Feireisl. On the motion of a viscous, compressible, and heat conducting equation. *Indiana Univ. Math. J.* 53(6) :1705-1738, 2004.

[80] E. Feireisl, A. Novotný et H. Petzeltová. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of compressible isentropic fluids. *J. Math. Fluid Mech.* 3 : 358-392, 2001.

[81] E. Feireisl, A. Novotný et S. Yongzhong, Suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations of compressible viscous fluids. *Indiana University Mathematical Journal* 60 (2), 2011, 611-632.

[82] C. Fouillet. Généralisation à des mélanges binaires de la méthode du second gradient et application à la simulation numérique directe de l'ébullition nuclée. *Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.* (2003).

[83] A. Friedmann et S. Kamin, The asymptotic behavior of gas in a n-dimensional porous medium, *Trans. Amer. Math. Soc.* 262, no 2 (1980) 551-563.

[84] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem I. *Arch. Ration. Mech. Analysis* 16 (1964), 269-315.

[85] C. Gallo, Schrödinger group on Zhidkov spaces. *Adv. Differential Equations* 9 (2004), no 5-6, 509-538.

[86] P. Gérard, The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 23 (2006), no 5, 765-779.

[87] P. Germain, Weak-strong uniqueness for the isentropic compressible Navier-Stokes system, *J. Math. Fluid Mech.* 13 (2011), no. 1, 137-146.

[88] P. Germain et P. LeFloch. The finite energy method for compressible fluids. The Navier-Stokes-Korteweg model. *Preprint* (2012) arxiv.

[89] P. Germain, N. Masmoudi et J. Shatah. Global solutions for the gravity water waves equation in dimension 3. *Ann. of Math.* (2) 175 (2012), no. 2, 691-754.

[90] P. Germain, N. Masmoudi et J. Shatah, Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2009, no. 3, 414-432.

[91] J. Ginibre et N. Hayashi, Almost global existence of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in three space dimensions, *Math. Z.* 219 (1995), no 1, 119-140.

[92] J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations,.*Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965) 697-715.

[93] P. Gravejat, A non existence result for supersonic traveling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Comm. Math. Phys.* 243 (2003), no. 1, 93-103.

[94] P. Gravejat, Asymptotics for the traveling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Asymptot. Anal.* 45 (2005) 227-299.

[95] P. Gravejat, Quelques contributions à l'analyse mathématique de l'équation de Gross-Pitaevskii et du modèle de Bogoliubov-Dirac-Fock. Mémoire d'habilitation (soutenue le 8 décembre 2011). *http ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/gravejat.philippe/Recherch.html*

[96] E.P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4(2) :195-207, 1963.

[97] M. E. Gurtin, D. Poligone et J. Vinals. Two-phases binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter. Math. Models *Methods Appl. Sci.* 6(6) (1996) 815–831.

[98] S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai. Scattering for the Gross-Pitaevskii equation. *Math. Res. Lett.* 13 no. 2-3 (2006), 273-286.

[99] S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai. Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions. *Comm. Contemp. Math.* 11 no. 4 (2009) 657-707.

[100] S. Gustafson, K. Nakanishi et T.-P. Tsai, Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions. *Ann. Henri Poincaré.* 8 (2007), 1303-13331.

[101] B. Haspot, Existence of solutions for compressible fluid models of Korteweg type,*Annales Mathématiques Blaise Pascal* 16, 431-481 (2009).

[102] B. Haspot, Cauchy problem for viscous shallow water equations with a term of capillarity, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20 (7) (2010), 1049-1087.

[103] B. Haspot, Existence of global weak solution for compressible fluid models with a capillary tensor for discontinuous interfaces, *Differential Integral Equations* 23 (2010), no. 9-10, 899-934.

[104] B. Haspot. Existence of weak solution for compressible fluid models of Korteweg type. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics.* 13, Isque 2 (2011), 223-249 .

[105] B. Haspot. Existence of global strong solutions in critical spaces for barotropic viscous fluids. *Arch. Rational. Mech. Anal.* 202, Isque 2 (2011), 427-460.

[106] B. Haspot. Well-posedness in critical spaces for the system of compressible NavierÐStokes in larger spaces. *Journal of Differential Equations.* 251, No. 8. (October 2011), pp. 2262-2295.

[107] B. Haspot. Well-posedness for density-dependent incompressible fluids with non-Lipschitz velocity. *Annales de l'Institut Fourier.* 62 (5) (2012) p. 1717-1763.

[108] B. Haspot. Existence of global strong solution for the compressible Navier-Stokes system and the Korteweg system in two-dimension. *Methods and Applications of Analysis.* Vol. 20, No. 2, pp. 141-164, June 2013.

[109] B. Haspot. Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications - Proceedings of the 14th International Conference on Hyperbolic Problems held in Padova, June 25-29, 2012, p. 667-674, 2014.

[110] B. Haspot. Porous media, Fast diffusion equations and the existence of global weak solution for the quasi-solution of compressible Navier-Stokes equations, à paraître dans *Journal of Mathematical Fluid Mechanics.*

[111] B. Haspot. Regularity of weak solutions of the compressible barotropic Navier-Stokes equations. *Preprint Hal soumis.*

[112] B. Haspot. Existence of global strong solution for Korteweg system with large infinite energy initial data . *Preprint Hal soumis.*

[113] B. Haspot. New entropy for Korteweg's system, existence of global weak solution and new blow-up criterion, *Hal, soumis.*

[114] B. Haspot. Global existence of strong solution for shallow water system with large initial data on the irrotational part, *Hal soumis.*

[115] B. Haspot. New formulation of the compressible Navier-Stokes equations and parabolicity of the density. *Preprint* 2014 Hal.

[116] B. Haspot. Weak-Strong uniqueness for compressible Navier-Stokes system with degenerate viscosity coefficient and vacuum in one dimension, *Preprint* 2014 Hal.

[117] B. Haspot. Existence of global strong solution for the compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coefficients in 1D, *Preprint* 2014 Hal.

[118] B. Haspot. Existence of global strong solution for Korteweg system in dimension $N \geq 2$, *Preprint* 2015 Hal.

[119] B. Haspot et E. Zatorska. From the highly compressible Navier-Stokes equations to the Porous Media equation, rate of convergence, à paraître dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A.*

[120] H. Hattori et D. Li. The existence of global solutions to a fluid dynamic model for materials for Korteweg type. *J. Partial Differential Equations.* 9(4) (1996) 323-342.

[121] H. Hattori et D. Li. Global Solutions of a high-dimensional system for Korteweg materials. J. Math. Anal. Appl. 198(1) (1996) 84-97.

[122] N. Hayashi, T. Mizumachi et P. I. Naumkin, Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D. *Differential Integral Equations* 16 (2003), no 2, 159-179.

[123] N. Hayashi et P. I. Naumkin, On the quadratic nonlinear Schrödinger equation in three space dimension. *Internat. Math. Res. Notices* 2000, no 3, 115-132.

[124] D. Hoff, The zero-Mach limit of compressible flows. *Comm. Math. Phys.* 192 (1998) 543-554.

[125] D. Hoff. Construction of solutions for compressible, isentropic Navier-Stokes equations with large initial data. *Trans. Amer. Math. Soc.* 303 (1987), P. 310-315.

[126] D. Hoff. Global existence for 1D, compressible, isentropic Navier-Stokes equations with large initial data. *Trans. Amer. Math. Soc.* 303(1) :169-181, 1987.

[127] D. Hoff. Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for compressible flow. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 114 (1991), p. 15-46.

[128] D. Hoff. Uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations of multidimensional compressible flows. *SIAM. J. Anal.*,vol 37, No6, 1742-1760 (2006).

[129] D. Hoff. Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data. *J. Differential Equations*, 120(1), 215-254, 1995.

[130] F. Huang et Z. Wang, Convergence of viscosity solutions for isothermal gas dynamics, *SIAM J. Math. Anal.* 34 (2002), no3, 595-610.

[131] F. Huang, R. Pan, T. Wang, Y. Wang et X. Zhai, Vanishing viscosity limit for isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity. *Preprint.*

[132] X. Huang, J. Li, et Z. Xin, Global Well-Posedness of Classical Solutions with Large Oscillations and Vacuum to the Three- Dimensional Isentropic Compressible Navier-Stokes Equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 65 (2012), pp 549-585.

[133] M. Ishii Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow. *Eyrolles*, Paris (1975).

[134] D. Jamet. Étude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase. *Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.* (1998).

[135] D. Jamet, O. Lebaigue, N. Coutris et J. M. Delhaye. The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid-vapor flows with phase change. *J. Comput. Phys.* 169(2) : 624–651, (2001).

[136] H. Jia et V. Svérak, Local-in-space estimates near initial time for weak solutions of the Navier-Stokes equations and forward self-similar solutions. *Inventiones* COMPLETER

[137] S. Jiang et P. Zhang. Axisymetrics solutions of the 3D Navier-Stokes equations for compressible isentropic fluids. *J. Math. Pures Appl.* (9), 82(8) :949-973, 2003.

[138] Q. Jiu et Z. Xin. The Cauchy problem for 1D compressible flows with density-dependent viscosity coefficients. *Kinet. Relat. Models*, 1(2) :313–330, 2008.

[139] C. A. Jones, S. J. Putterman et P. H. Roberts, Motions in a Bose condensate : V. Stability of solitary wave solutions of non-linear Schrödinger equations in two and three dimension, *J. Phys. A : Math. Gen.* 19 (1986) 2931-3011.

[140] A. Jüngel, Global weak solutions to compressible Navier-Stokes equations for quantum fluids, *SIAM journal on mathematical analysis*, 2011, vol. 42, no3, pp. 1025-1045.

[141] S. Kamin et J-.L. Vázquez, Fundamental solutions and asymptotic behavior for the p-Laplacian equation, *Rev. Mat. Iberoamericana 4 no 2* (1988) 339-354.

[142] S. Kamin et J-L Vázquez, Asymptotic behavior of solutions of the porous media equation with changing sign, *SIAM J. Math. Anal.* 22 no 1 (1991) 34-45.

[143] Y. I. Kanel, On a model system of equations of one-dimensional gas motion, *Differ- entsial'nye Uravneniya* 4 (1968), 721-734.

[144] Y. Kawahara, Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D, *Differential Integral Equations* 18 (2005), no. 2, 169-194.

[145] A. Kazhikov et V. Shelukhin, Unique global solutions in time of initial boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas, *PMMJ Appl. Math. Mech.* 41 (1977), 273-283.

[146] A. V. Kazhikov. The equation of potential flows of a compressible viscous fluid for small Reynolds numbers : existence, uniqueness and stabilization of solutions. *Sibirsk. Mat. Zh.* 34 (1993), no. 3, p. 70-80.

[147] A. V. Kazhikov . On the Cauchy problem for the equation of a viscous gas. (Russian). *Sibirsk. Mat. Phys.* 82 (1981/1982), no. 2, 37-62.

[148] A. V. Kazhikov et V. V. Shelukhin. Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one- dimensional equations of a viscous gas. *Prikl. Mat. Meh.* 41(2) :282-291, 1977.

[149] R. Killip, T. Oh, O. Pocovnicu et M. Visan, Global well-posedness of the Gross-Pitaevskii and cubic-quintic nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing boundary conditions, *Math. Res. Lett.* 19 (2012), 969-986.

[150] S. Klainerman et A. Majda, Compressible and incompressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982) 629-651.

[151] S. Klainerman et G. Ponce, Global small amplitude solutions to nonlinear evolution equations, *Comm. Pure Appl. Math.* (1983) 36 (1) 133-141.

[152] H. Koch et D. Tataru, Well-posedness for the Navier-Stokes equations. *Adv. Math.*, 157 (2001), 22-35.

[153] D.J. Korteweg. Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires par des variations de densité. *Arch. Néer. Sci. Exactes Sér. II.* 6 :1-24, 1901.

[154] H.-O. Kreiss, J. Lorenz et M.J. Naughton, Convergence of the solutions of the compressible to the solutions of the incompressible Navier-Stokes equations. *Adv. Appl. Math.* 12 (1991) 187-214.

[155] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics. Translated from the Russian by J. B. Sykes and W. H. Reid.* Course of Theoretical Physics, Vol. 6. Pergamon Press, London, 1959.

[156] P. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957) 537-566.

[157] P. Lax et D. Levermore. The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983), no. 3, 253-290.

[158] P. Lax et D. Levermore. The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. II. *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983), no. 5, 571-593.

[159] P.G. LeFloch, Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The theory of classical and nonclassical shock waves, *Lectures in Mathematics*, ETH Zürich, Birkhäuser, 2002.

[160] P.-G. Lemarié, Recent developments in the Navier-Stokes problem, *CRC Press Inc* (26 avril 2002).

[161] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace. *Acta Math.* 63 (1934), 193-248.

[162] F. Linares et G. Ponce. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. *Springer-Verlag New York Inc.* (2009) Universitext.

[163] P.-L. Lions *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol 2 Compressible models, Compressible models.* Oxford lecture series in mathematics and its application. 10 (1998).

[164] P.-L. Lions et N. Masmoudi, Incompressible limit for a viscous compressible fluid. *J. Math. Pures Appl.* (9) 77 (1998) 585-627.

[165] P.-L. Lions, B. Perthame et P. Souganidis. Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. *Commun. Pure Appl. Math.* 49 (1996), 599-638.

[166] P.-L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor. Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems. *Commun. Math. Phys.* 163 (1994), 415-431.

[167] C. H. P. Lupis. *Chemical Thermodynamics of Materials.* North-Holland, New-York, (1983).

[168] M. Maris, Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity, *Ann. of Math.* 178 (1) (2013), pp. 107-182.

[169] A. Matsumura et T. Nishida. The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 55(9) :337-342, 1979.

[170] A. Mellet et A. Vasseur. On the barotropic compressible Navier-Stokes equation. *Comm. Partial Differential Equations.* 32 (2007), no. 1-3, 431-452.

[171] A. Mellet et A. Vasseur. Existence and uniqueness of global strong solutions for one-dimensional compressible Navier-Stokes equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(4) :1344–1365, 2007/08.

[172] Y.Meyer. *Ondelettes et opérateurs, tome 3.* Hermann, Paris, 1991.

[173] L. Modica. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 98 : 123-142, 1987.

[174] F. Murat, Compacité par compensation, *Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. 5*, 1978, p 489-507.

[175] J. Nash. Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général. *Bulletin de la Société Mathématique de France.* 1962, 90, 487-497.

[176] A. Novotný et I. Straškraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow.* Oxford lecture series in mathematics and its application. 27 (2004).

[177] M. Paddick,] Transverse nonlinear instability of Euler-Korteweg solitons. *Preprint hal (2015).*

[178] B. Perthame, Higher moments lemma : application to Vlasov-Poisson and Fokker-Planck equations. *Math. Meth. Appl. Sc.* 13, 441-452 (1990).

[179] M. Pierre, Uniqueness of the solutions of $u_t - \Delta\phi(u) = 0$ with initial datum a measure, *Nonlinear Anal. T. M.* A. 6 (1982), 175-187.

[180] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys.* JETP, 13(2) :451Ð454, 1961.

[181] C. Rohde. On local and non-local Navier-Stokes-Korteweg systems for liquid-vapour phase transitions. *ZAMMZ. Angew. Math. Mech.* 85(2005), no. 12, 839-857.

[182] C. Rohde, A local and low-order Navier-Stokes-Korteweg system. *Nonlinear partial differential equations and hyperbolic wave phenomena, 315-337, Contemp. Math.*, 526 (2010), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[183] C. ROHDE. *Approximation of Solutions of Conservation Laws by Non- Local Regularization and Discretization.* Habilitation Thesis, University of Freiburg (2004).

[184] J. S. ROWLINSON. Translation of J.D Van der Waals "The thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density". *J. Statist. Phys.* 20(2) : 197-244, 1979.

[185] T. RUNST et W. SICKEL. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations. *de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Application*, 3. Walter de Gruyter and Co., Berlin (1996).

[186] D. SERRE. Solutions faibles globales des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible. *Comptes Rendus de l Académie des Sciences - Series I* . 303(13) :639-642, 1986.

[187] D. SERRE *Systems of conservation laws, I- Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves.* Cambridge University Press (1999).

[188] J. SHATAH, Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations. *Comm. Pure. Appl. Math.* 38 (1985), no 5, 685-696.

[189] J. SHATAH, Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations. *J. Differential Equations* (1982), 46(3) 409-425.

[190] V. V. SHELUKHIN. Evolution of a contact discontinuity in the baratropic flow of a viscous gas. *J. Appl. Math. Mech.* 47 (1983), no. 5, P. 698-700.

[191] V. V. SHELUKHIN. On the structure of generalized solutions of the one dimensional equations of a polytropic viscous gas. *Prikl. Matem. Mekhan.* 48 (1984), p. 912-920.

[192] V. A. SOLONNIKOV. Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes systems. ZAP. NAUCHN. SEM. LOMI. 38, (1973), p.153-231 ; J. SOVIET MATH. 8, (1977), p. 467-529.

[193] V. A SOLONNIKOV. The solvability of the initial boundary-value problem for the equations of motion of a viscous compressible fluid. *Zap Naucn. Sem. Leningrad. Odel. Mat. Inst. Steklov.* (LOMI), 56 : 128-142, 197, 1976. Investigations on linear operators and theory of functions, VI.

[194] V. A. SOLONNIKOV. Solvability of the initial boundary value problem for the equation of a viscous compressible fluid. *J. Soviet Math.* 14 (1980), p. 1120-1133.

[195] T. TAO, Nonlinear dispersive equations, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 106*, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC 2006, Local and global analysis.

[196] L. TARTAR. Compensated compactness and applications to partial differential equations. *Nonlinear Analysis and Mechanics , Herriot-Watt Symposium.* Vol 4, R. J. Knops, ed, Research Notes in Mathematics No 39, Pitman, Boston-London, 1979, p 136-212.

[197] L. TARTAR. The compensated compactness method applied to systems of conservation laws. *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci. 111.* J. Bali, ed, Reidel, Dordrecht-Boston, 1983, p 263-285.

[198] C. TRUEDELLAND et W. NOLL. *The nonlinear field theories of mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1992.

[199] V. A. VAIGANT et A. V KAZHIKHOV, On existence of global solutions to the two-dimensional Navier-Stokes equations for a compressible viscous fluid. *Siberian Mathematical Journal*, Vol 36, No. 6 (1995).

[200] A. VALLI et W. ZAJACZKOWSKI. Navier-Stokes equations for compressible fluids : global existence and qualitative properties of the silutions in the general case. *Commun. Math. Phys.* 103 (1986) no 2., p. 259-296.

[201] J.F. VAN DER WAALS. Thermodynamische Theorie der Kapillarität unter Vorausestzung stetiger Dichteänderung, *Phys. Chem.* 13, 657-725 (1894).

[202] A. Vasseur et C. Yu. Existence of global weak solutions for 3D degenerate compressible Navier-Stokes equations. *Preprint arXiv :1501.06803*, 03 2015.

[203] J.-L. Vázquez, *The porous medium equation : Mathematical theory.* Oxford mathematical monographes, 2007.

[204] J.-L. Vázquez. *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations : Equations of Porous Medium Type.* Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 2006.

[205] E. Zatorska. On the flow of chemically reacting gaseous mixture. *J. Differential Equations*, 253, (12) :3471-3500, 2012.