Projet de thèse

Candidat	Yueh-Sheng Hsu
Directeur	Cyril Labbé (MCF Paris-Dauphine)
Titre	Quelques propriétés de l'Hamiltonien d'Anderson continu
Laboratoire d'accueil	Ceremade, Université Paris-Dauphine

Ce projet de thèse porte sur l'étude d'opérateurs de Schrödinger aléatoires singuliers. Il s'agit d'opérateurs elliptiques faisant intervenir un terme de bruit trop irrégulier pour qu'ils soient bien définis de façon classique. Deux théories récentes d'EDP stochastiques, les distributions paracontrôlées de Gubinelli, Imkeller et Perkowski [GIP15] et les structures de régularité d'Hairer [Hai14], fournissent le cadre adéquat pour définir de tels opérateurs.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'Hamiltonien d'Anderson continu $-\Delta + \xi$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec pour potentiel ξ un bruit blanc. Rappelons que le bruit blanc en dimension d est une distribution aléatoire de régularité (hölderienne) strictement inférieure à $-d/2$. Pour des raisons techniques, on commence par étudier l'opérateur en volume fini.
En dimension 1, la construction de l'opérateur en volume fini repose sur des outils classiques et a été obtenue par Fukushima et Nakao [FN77]. En revanche en dimension supérieure l'opérateur ne fait pas sens de façon classique car le bruit est trop irrégulier, et l'on doit en fait renormaliser l'opérateur par des "constantes infinies". Cela a été mené à bien pour la première fois par Allez et Chouk [AC15] en 2015 pour la dimension 2 et sous des conditions de bord périodiques à l'aide des distributions paracontrôlées. En 2018, Gubinelli, Ugurcan et Zachhuber [GUZ20] ont étendu cette construction à la dimension 3 toujours sous des conditions de bord périodiques, tandis que Labbé [Lab19] a présenté une construction de l'opérateur en dimensions 2 et 3 sous conditions de bord Dirichlet ou périodiques à l'aide des structures de régularité. Notons que de telles constructions ne peuvent pas être effectuées en dimension $d \geq 4$ pour des raisons que nous ne présentons pas ici.

L'objet construit *in fine* est un opérateur auto-adjoint $\mathcal{H}_L$ sur $L^2((-L, L)^d)$ avec spectre purement ponctuel. Il est alors possible d'étudier les propriétés de cet opérateur et de nombreuses questions se posent. En particulier : quand $L \to \infty$, les fonctions propres de l'opérateur sont-elles localisées ou délocalisées ? Cette question est intimement reliée au phénomène de localisation d'Anderson [And58] qui s'énonce comme suit : en volume infini, tout ou partie du spectre de l'opérateur est purement ponctuel et les fonctions propres sont exponentiellement localisées. L'établissement d'un tel phénomène a donné lieu à une vaste littérature [CL90] et plusieurs questions importantes restent ouvertes.

Nous présentons à présent quelques résultats existants sur l'Hamiltonien d'Anderson continu, en commençant par le cas de la dimension 1. McKean [McK94] a déterminé le comportement asymptotique en L de la plus petite valeur propre λ_1 : celle-ci tend vers $-\infty$ comme $c(\log L)^{2/3}$ pour un certain $c < 0$ et fluctue à une échelle microscopique selon une loi de Gumbel. Par la suite Dumaz et Labbé [DL19] ont montré que le processus ponctuel des plus petites valeurs propres convergeait vers un processus de Poisson ponctuel tandis que les fonctions propres étaient exponentiellement localisées et avaient un comportement quasiment déterministe autour de leur centre de localisation. Par ailleurs dans [DL20a, DL20b] il est montré que la transition entre les phases localisées et délocalisées se produit pour des énergies d'ordre L, et les statistiques locales des valeurs propres sont obtenues dans ces deux phases.

En dimension 2, Chouk et van Zuijlen [Cv19] ont obtenu l'asymptotique en L de la plus petite valeur propre λ_1 : celle-ci tend vers $-\infty$ comme $c \log L$ pour un certain $c < 0$. En revanche les fluctuations de cette valeur propre ne sont pas connues. Dans un travail en cours reposant sur l'asymptotique de la plus petite valeur propre, König, Perkowski et van Zuijlen obtiennent alors le comportement asymptotique de la masse totale du problème parabolique associé, souvent appelé modèle d'Anderson parabolique :

$$\partial_t u = \Delta u + u\xi \ , \quad u(t=0,\cdot) = \delta_0(\cdot) \ .$$

Le premier objectif de cette thèse portera sur l'extension à la dimension 3 des résultats précédemment cités sur la première valeur propre et la masse totale du problème parabolique. On cherchera en premier lieu à déterminer l'asymptotique en L de la plus petite valeur propre : des calculs informels suggèrent que cette valeur propre tend vers $-\infty$ comme $c(\log L)^2$ pour une certaine constante $c < 0$ à déterminer. Ce travail pourra s'appuyer sur la construction de l'opérateur obtenue dans [Lab19]. Une stratégie possible consiste à découper le domaine spatial en des boites disjointes puis d'étudier le minimum des plus petites valeurs propres de l'opérateur restreint à ces boites. Des outils importants seront la propriété de scaling de l'opérateur établie dans [Lab19], et le principe de grandes déviations pour le bruit blanc et ses "intégrales itérées" établi dans [HW15]. Une fois cette asymptotique obtenue, on pourra envisager l'étude de la masse totale du modèle d'Anderson parabolique en dimension 3.

Le second objectif de la thèse portera sur une étude plus générale du bas du spectre de l'opérateur en dimensions 2 et 3. Idéalement, nous souhaiterions montrer que les plus petites valeurs propres, correctement remises à l'échelle, convergent vers un processus de Poisson ponctuel et que les fonctions propres correspondantes sont localisées suivant une forme déterministe. Nous commencerons par étudier le comportement asymptotique en L de la première fonction propre. Une piste à explorer vient de la forme de la constante c apparaissant dans l'asymptotique de la première valeur propre : cette constante c est reliée à un principe variationnel et la fonction propre devrait en être le minimiseur. On pourra également s'appuyer sur les informations détaillées obtenues en dimension 1, qui pourront servir de tests à nos heuristiques. Une fois la forme déterministe de la première fonction propre établie, on pourra alors déduire le comportement du bruit blanc au niveau des centres de localisation ce qui permettra de s'attaquer aux fluctuations de la première valeur propre.

Un troisième objectif de la thèse sera de nature plus théorique et portera sur la construction de l'opérateur et de la forme quadratique associée à l'aide des structures de régularité. Il se trouve que la construction présentée dans [Lab19] repose sur l'introduction d'intégrales itérées du bruit blanc pour une collection “infinie” de noyaux associés à la fonction de Green du Laplacien. En effet afin d'obtenir une application de point fixe *contractante* pour les résolventes de l'opérateur, on avait considéré la fonction de Green de l'opérateur $-\Delta + a$ pour $a > 0$: le paramètre a pouvant être pris assez grand. Au niveau de la théorie des structures de régularité cela avait causé plusieurs désagréments techniques. Il serait intéressant d'obtenir une construction plus nette ne reposant que sur un seul noyau et d'obtenir la contractivité de l'application de point fixe d'une façon alternative. Cela aurait un intérêt non seulement pour l'Hamiltonien d'Anderson mais aussi pour tout opérateur elliptique pour lequel des techniques de renormalisation sont requises. Il serait également intéressant de construire la forme quadratique associée à l'opérateur au niveau des structures de régularité : pour ce faire, il faudrait probablement utiliser des formules d'intégration par partie au niveau des intégrales itérées du bruit blanc.

D'autres questions pourront également être envisagées. Citons par exemple le comportement du spectre de l'opérateur lorsque le bruit est envoyé vers 0 ou encore la convergence d'opérateurs discrets vers cet opérateur continu.

References

[AC15] R. ALLEZ and K. CHOUK. The continuous Anderson hamiltonian in dimension two. *arXiv e-prints* arXiv:1511.02718. `arXiv:1511.02718`.

[And58] P. W. ANDERSON. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review* **109**, no. 5, (1958), 1492–1505. `doi:10.1103/PhysRev.109.1492`.

[CL90] R. CARMONA and J. LACROIX. *Spectral theory of random Schrödinger operators*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

[Cv19] K. CHOUK and W. VAN ZUIJLEN. Asymptotics of the eigenvalues of the Anderson Hamiltonian with white noise potential in two dimensions. *arXiv e-prints* arXiv:1907.01352. `arXiv:1907.01352`.

[DL19] L. DUMAZ and C. LABBÉ. Localization of the continuous Anderson Hamiltonian in 1-D. *Probability Theory and Related Fields* (2019). `doi:10.1007/s00440-019-00920-6`.

[DL20a] L. DUMAZ and C. LABBÉ. Localization crossover for the continuous Anderson Hamiltonian in 1-d. *in preparation* (2020+).

[DL20b] L. DUMAZ and C. LABBÉ. The delocalized phase of the continuous Anderson Hamiltonian in 1-d. *in preparation* (2020+).

[FN77] M. FUKUSHIMA and S. NAKAO. On spectra of the Schrödinger operator with a white Gaussian noise potential. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **37**, no. 3, (1976/77), 267–274.

[GIP15] M. GUBINELLI, P. IMKELLER, and N. PERKOWSKI. Paracontrolled distributions and singular PDEs. *Forum Math. Pi* **3**, (2015), e6, 75. `doi:10.1017/fmp.2015.2`.

[GUZ20] M. GUBINELLI, B. UGURCAN, and I. ZACHHUBER. Semilinear evolution equations for the Anderson Hamiltonian in two and three dimensions. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.* **8**, no. 1, (2020), 82–149. `doi:10.1007/s40072-019-00143-9`.

[Hai14] M. HAIRER. A theory of regularity structures. *Invent. Math.* **198**, no. 2, (2014), 269–504. `doi:10.1007/s00222-014-0505-4`.

[HW15] M. HAIRER and H. WEBER. Large deviations for white-noise driven, nonlinear stochastic PDEs in two and three dimensions. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **24**, no. 1, (2015), 55–92. `doi:10.5802/afst.1442`.

[Lab19] C. LABBÉ. The continuous Anderson hamiltonian in $d \leq 3$. *Journal of Functional Analysis* **277**, no. 9, (2019), 3187 – 3235. doi:https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.05.027.

[McK94] H. P. MCKEAN. A limit law for the ground state of Hill's equation. *J. Statist. Phys.* **74**, no. 5-6, (1994), 1227–1232. doi:10.1007/BF02188225.