Actuariat
Introduction

Idris KHARROUBI
Université Paris Dauphine

Table des matières

1 Notion et principes de base de l'assurance **5**

1.1 Premières caractéristiques de l'assurance 5

1.1.1 Bref historique de l'assurance 5

1.1.2 Temps et assurance 6

1.1.3 Premières formalisations en assurance 8

1.1.4 Exemples d'assurances et de tarifs 9

1.2 Contraintes en assurance 10

1.2.1 Mutualisation et segmentation des risques 11

1.2.2 Temps discret et continu 11

1.2.3 Assurance vie et assurance non-vie 12

1.2.4 Primes d'assurance 12

2 Modélisation actuarielle **14**

2.1 Modèles en temps discret 14

2.1.1 Modèle individuel 14

2.1.2 Modèle collectif 15

2.1.3 Critère de ruine 16

2.2 Modèles collectif en temps continu 18

3 Fonction génératrice des moments et lien entre modèles individuels et collectifs **19**

3.1 Moments et fonction génératrice des moments 19

3.1.1 Moments 19

3.1.2 Fonction génératrice des moments 21

3.1.3 Fonction génératrice d'une distribution sur $\mathbb{N}$ 22
3.2 Cas des modèles individuel et collectif 22
3.3 Relation entre le modèle individuel et collectif 23

4 Coût des sinistres 25
4.1 Lois normales et gammas 25
4.2 Transformation de loi 27
4.3 Choix d'un modèle paramétrique pour la loi du coût 32
4.4 Mutualisation 33
4.4.1 Modèle normal et mutualisation des risques 33
4.4.2 Modèle de versement d'un capital décès 35

5 Nombre de sinistres 37
5.1 Loi binomiale, de Poisson et binomiale négative 37
5.2 Loi multinomiale et test d'adéquation du χ^2 41
5.3 Mélange de lois de Poisson 42
5.4 Nombres de sinistres et mélange de loi de Poisson 44
5.5 Modèle des fréquences liées de Delaporte 45

6 Lois composées et modèle collectif 47
6.1 Définition d'une loi composée, loi d'un modèle collectif 47
6.2 Densité, moments et fonction génératrice d'une loi composée . . . 48
6.3 Loi de type Poisson composé 49

7 Approximation de la probabilité de ruine dans le modèle collectif 52
7.1 Approximation de la probabilité de ruine 52
7.2 Développement d'Edgeworth et amélioration de l'approximation normale 56
7.3 Algorithme de Panjer 57

8 Crédibilité 59
8.1 Hétérogénéité des risques 59
8.2 Modèle de crédibilité de Buhlmann 59

8.3 Estimation des paramètres de structure 61

9 Introduction à l'assurance vie **63**

9.1 Définition et premiers résultats 64

9.2 Assurance en cas de vie 69

9.2.1 Annuités payables d'avance sur la vie entière 69

9.2.2 Annuités à terme échu sur la vie entière 71

9.3 Assurance en cas de décès 72

9.4 Provisions 74

Chapitre 1

Notion et principes de base de l’assurance

1.1 Premières caractéristiques de l’assurance

1.1.1 Bref historique de l’assurance

La notion d’assurance semble très ancienne puisqu’on en retrouve des traces dès la plus haute Antiquité, notamment en Mésopotamie, où les commerçants effectuaient une répartition des coûts engendrés par les vols et pillages des caravanes. On trouve également d’autres exemples en Egypte et dans la Rome antique avec l’utilisation des rentes viagères.

Pour trouver des pratiques qui ressemblent plus à l’assurance moderne, il faut cependant revenir plus près de notre époque avec le “prêt à la grosse aventure” dans le domaine maritime au XIVe siècle. Les marchands faisaient appel aux banquiers pour financer leurs expéditions maritimes qui coûtaient souvent très cher. Si le bateau faisait naufrage, les marchands n’avaient rien à rembourser aux banques ; par contre, s’il arrivait à bon port le banquier était remboursé et pouvait recevoir une compensation financière très élevée.

D’autres types d’assurance sont apparues par la suite. Le financier italien Lorenzo Tonti crée en 1652 une forme de contrat d’assurance appelé tontine avec un mode opératoire proche de l'assurance vie. Ces tontines sont des associations de personnes constituées pour une certaine durée et qui mettent en commun des fonds. A l'issue d'une durée définie préalablement, l'association est dissoute et les fonds répartis entre les personnes. Le grand incendie de Londres de 1666 conduit peu après à l'introduction de l'assurance incendie à Hambourg en 1676. Alors que les premiers contrats d'assurance sur la vie sont proposés à Londres en 1698.

Le développement de l'assurance s'est ensuite poursuivi aux XVIIe et XVIIIe siècles grâce a l'apparition d'outils mathématiques notamment le calcul des probabilités. Il deviens alors possible de mesurer les paramètres des contrats d'assurance (tables de mortalité, risque de perte pour une compagnie d'assurance, rentes viagères...).

L'assurance en général connait un essor considérable au cours du XXe siècle. Dans la première partie du XXe siècle cet essor s'est illustré par le développement de compagnie de secours mutuels contre les maladies, les accidents de travail, le chômage, et par le développement des assurances obligatoires principalement en assurance non-vie.

L'évolution économique des sociétés et la complexification des échanges ont depuis conduit à une importance accrue de la place de l'assurance dans ces sociétés. Cette importance en fait de nos jours un acteur majeur des économies et des sociétés.

1.1.2 Temps et assurance

La principale caractéristique qui différencie le fonctionnement de l'assurance d'une quelconque production économique est l'*inversion du cycle de production*. Contrairement à la situation classique ou le producteur d'un bien connaît le coût de production et peut en conséquence proposer un prix de vente pour son bien en adéquation, l'assureur demande une prime d'assurance à l'assuré sans connaître le montant réel des sinistres que l'assuré est susceptible de subir.

Cette spécificité a deux conséquences.

— La première est la nécessité de mettre en place des outils mathématiques sophistiqués afin d'évaluer le montant de la prime à demander à l'assuré pour le protéger du risque et éviter les pertes pour l'assureur. Ces outils sont principalement statistiques et probabilistes et utilisent les données historiques pour cerner la variabilité des risques.

— la seconde est que l'assurance est extrêmement dépendante des données connues par l'assureur d'une part et l'assuré d'autre part sur le risque couvert par un contrat. Des asymétries d'informations entre les deux protagonistes sont régulièrement constatées expliquent une partie des règles qui encadrent l'activité d'assurance.

La variabilité du risque est une notion particulièrement importante en assurance puisque le bilan de l'assureur en dépend portement. Il résulte l'obligation pour l'assureur de caractériser cette variabilité et d'instaurer des mécanismes pour s'en protéger. Les deux principaux sont alors la mise en place d'une réserve de solvabilité et la réassurance. L'apport en capital peut éventuellement concerner d'autres activités de l'assureur. Pour cette raison nous considérerons uniquement la notion de capital minimum nécessaire au fonctionnement de l'activité d'assurance seule. La réassurance est, quand à elle, un autre mode de couverture des risques agissant comme une *mutualisation* des risques pris par chaque assureur.

Pour cerner la variabilité du risque, l'approche présentée dans ce cours consiste à utiliser des modèles probabilistes qui seront ajustés à l'aide d'outils statistiques avec pour objectif de calculer le primes d'assurance associées.

Les asymétries d'information interviennent en assurance à plusieurs niveaux et suivant les branches. Ceci conduit à une règlementation de l'activité d'assurance imposant des conditions spécifiques à la branche d'assurance. Par exemple, en assurance non-vie, la loi impose aux assureurs des provisions pour protéger les assurés contre les risques de faillite de l'assureur, alors qu'en réassurance, la loi est moins contraignante pour l'assureur et le réassureur. Enfin, de nombreux mécanismes sont mis en place par l'assureur pour se protéger de son manque d'information sur l'assuré : questionnaires médicaux, franchise, délais de carence, segmentation des tarifs.

Bien qu'étant très important, cet aspect de l'assurance ne sera pas abordé dans le cadre de ce cours.

1.1.3 Premières formalisations en assurance

Nous présentons dans cette sous-section, quelques définitions formelles permettant de fixer les notions étudiées dans la suite.

Pour un assureur, l'objectif premier auquel il doit répondre est de rester solvable. En particulier, il doit mettre toutes les chances de son coté pour qu'en cas de sinistre il puisse indemniser ses assurés.

Il est donc important de faire l'inventaire des contrats qui l'engagent. Cet assureur considère donc les K risques auxquels il est soumis et qui seront représentés par des variables aléatoires positives $X_1, \dots, X_K$. Plus précisément, chaque X_k représente le montant que l'assureur doit indemniser à l'assuré k lors de la réalisation d'un sinistre.

Afin de se couvrir l'assureur demande donc à chaque assuré une **prime**. En demandant une prime $\mathbb{E}[X_k]$ à l'assuré k, l'assureur se garantit de ne pas perdre d'argent en moyenne. Cependant, ce critère n'est pas assez sécurisant pour l'assureur car la moyenne ne mesure pas les extrémités des distributions.

L'assureur demande donc une prime plus élevée qui est de la forme

$$(1+\eta)\mathbb{E}[X_k]$$

avec η une constante strictement positive appelée **chargement**. La prime $(1+\eta)\mathbb{E}[X_k]$ est appelée **prime chargée** et $\mathbb{E}[X_k]$ est appelée **prime pure**.

Une fois les primes chargées récupérées auprès des assurés, l'assureur calcul la **probabilité de bénéfice** donnée par

$$P_{\textit{bénéfice}} \;=\; \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_K \;\leq\; (1+\eta)\mathbb{E}[X_1] + \cdots + (1+\eta)\mathbb{E}[X_K])\;.$$

De manière symétrique, l'assureur obtient à partir de cette valeur, sa **probabilité de ruine** :

$$P_{ruine} \;=\; \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_K \;>\; (1+\eta)\mathbb{E}[X_1] + \cdots + (1+\eta)\mathbb{E}[X_K])\;.$$

Cette quantité correspond à la probabilité pour l'assureur de ne pas être en mesure d'indemniser ses assurés.

La justification d'un besoin de chargement de la prime peux être vue du point de vue asymptotique dans le cas où les variables aléatoires X_k sont indépendantes et identiquement distribuées. En effet, la lois de grands nombres nous donne dans ce cas

$$\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_K > K\mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow[K\to+\infty]{} 1/2 \; .$$

Sans chargement $i.e.$ $\eta = 0$, la probabilité de ruine de l'assureur est donc asymptotiquement très grande. En revanche cette même loi des grands nombres nous donne pour $\eta > 0$

$$\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_K > K(1+\eta)\mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0 \; .$$

Le chargement permet dans ce cas de limiter la probabilité de ruine pour un grand nombre d'assuré. C'est l'effet de **mutualisation**.

Toujours dans ce soucis de solvabilité pour l'assureur, apparaît la notion de plein. Le **plein** est la quantité maximale qu'il est possible d'assurer en conservant une probabilité, fixée à l'avance ,de ne pas dépasser une perte également fixée.

1.1.4 Exemples d'assurances et de tarifs

L'assurance se partage en deux grandes catégories contenant elles-mêmes plusieurs branches.

— La première catégorie est **l'assurances de personnes**. Dans ces contrats l'indemnisation est essentiellement forfaitaire. Cette catégorie inclue principalement les assurances en cas de vie et en cas de décès, les assurances maladie, accident corporel, dépendance et emprunteur.

— la seconde catégorie concerne les **assurances de biens et de responsabilités**. Dans ces contrats, le remboursement en cas de sinistre est majoritairement indemnitaire. Cette catégorie inclue principalement les assurances automobiles, habitation, biens professionnels, catastrophes naturelles, construction, responsabilité civile générale, protection juridique, assistance, perte pécuniaire.

Parmi les assurances de personnes en France en 2007, les plus importantes branches en volume de cotisations sont l'assurance vie (près de 137 milliard d'euros), loin devant les assurances en cas de maladie ou d'accident corporel (15 milliard d'euros). Concernant les assurances de biens et responsabilité, toujours en France et en 2007, l'assurance automobile représente plus de 40% du total des cotisations (18 milliards d'euros), suivie par l'assurance multirisque habitation avec plus de 15% du total des cotisations, et l'assurance des biens professionnels avec plus de 13% de ce total.

Cette division en différentes branches d'assurance permet de construire des portefeuilles d'assurances constitués de mêmes risques et donc de se rapprocher de l'hypothèse centrale en assurance qui est l'**homogénéité du risque**.

Cette segmentation des contrats d'assurance est également importante pour des raisons qui ne sont pas uniquement techniques, mais relevant du bon fonctionnement du marché de l'assurance.

En effet, du point de vue de l'assureur, cette segmentation a l'intérêt de responsabiliser les assurés en attribuant par exemple une prime plus élevée aux assurés générant des sinistres plus élevés en montant ou en nombre.

D'un point de vue économique, la segmentation des tarifs permet aussi à l'assureur d'avoir un avantage concurrentiel lorsque son tarif est fondé sur le risque. Cela permet également d'éviter le phénomène connu dans la littérature économique sous le terme d'**anti-sélection**.

Une fois cette organisation en contrats de risques homogènes mise en place, le calcul des primes d'assurance s'effectue généralement en travaillant par garantie et en utilisant les statistiques de sinistres de la garantie concernée.

1.2 Contraintes en assurance

Nous présentons dans cette section les contraintes encadrant la conception et la mise en oeuvre de modèles mathématiques servant à calculer les primes d'assurance.

1.2.1 Mutualisation et segmentation des risques

En assurance, deux principes fondamentaux apparaissent antagonistes.

Le premier de ces principes est la mutualisation des risques. Pour faire face à une grande variabilité de la réalisation des risques, il y a besoin de les mutualiser $i.e.$ en considérer un grand nombre afin de réduire le risque moyen.

Le second principe est celui de la segmentation pour avoir des ensembles de risques homogènes. Ce besoin de segmentation vient du fait qu'en général les risques ne sont pas homogènes et qu'il y a besoin de les regrouper afin de pouvoir appliquer une prime différenciée à chacun des groupes ayant un risque homogène.

La recherche de modèles probabilistes permettant une segmentation appropriée des risques est une activité marquante des mathématiques de l'assurance contemporaines. Il faut cependant noter que trop de segmentation conduit à une situation problématique puisque les primes de certains assurés peuvent devenir trop importantes (c'est l'exemple de l'assurance automobile et de l'assurance professionnel des médecins).

Dans cette situation, il n'apparaît nulle part que l'assurance ait pour rôle de déterminer un équilibre entre ces deux objectifs antagonistes. Le rôle de l'actuaire est donc simplement, pour un risque donné, d'évaluer de la façon la plus précise possible sa loi de probabilité.

1.2.2 Temps discret et continu

Nous abordons ici la question du choix entre une modélisation en temps discret et en temps continu. Plus précisément nous présentons deux arguments motivant le choix d'une modélisation en temps discret.

Le premier argument concerne les délais qui apparaîssent souvent entre les sinistres et les indemnisations des assurés. Ces délais se mesurent généralement en unité de temps et il paraît donc difficile de les intégrer dans un modèle en temps continu qui ne mesure que des évolutions instantanées.

Le second argument est plutôt d'ordre réglementaire. En effet, la pratique de l'assurance doit être encadrée par activité comptable visant à faire l'inventaire des actifs et passifs de la compagnie d'assurance. Cet inventaire est fondamental puisqu'il permet de connaître la santé financière de la compagnie. Dans cette activité comptable, l'évolution au cours du temps est mesurée avec une unité de temps égale à une année. Cette mesure en temps discret justifie également la mise en place de modèles de même nature pour calculer les primes d'assurance.

Nous terminons par mentionner le fait que ces deux types de modèles peuvent conduire, comme nous le verrons à la fin du chapitre suivant, à des valeurs (probabilité de ruine par exemple) significativement différentes. Le choix du modèle est donc une décision importante.

1.2.3 Assurance vie et assurance non-vie

Comme cela a été présenté plus haut, l'assurance vie et l'assurance non-vie se sont historiquement développées à des périodes distinctes et en suivant des méthodes de calcul différentes.

Cette différence des méthodes vient principalement du fait que les risques associés à chacun de ces domaines ont des caractéristiques différentes.

L'assurance vie portant sur des durées plus longue est soumise au risque de taux. En effet, l'assureur payant à ses assurées des primes sur plusieurs années, le montant total payé dépend fortement de l'évolution des taux d'intérêt.

Dans l'assurance non-vie qui porte sur des risques à plus courte échéance, le risque principal pour l'assureur est la grande variabilité des sinistres que l'on qualifie de risque de variance.

Les réglementations encadrant ces deux secteurs induisent elles aussi des différences dans les approches.

Il faut cependant noter que les différences tendent à s'estomper et les outils mathématiques développés récemment vont également dans ce sens.

1.2.4 Primes d'assurance

Nous avons vu deux notions de primes. La première est la prime pure et correspond à la moyenne $\mathbb{E}[X]$ pour un risque X. Si en moyenne cette prime permet à l'assureur de ne pas être déficitaire, il se peut qu'il le soit avec une grande probabilité. L'assureur ajoute alors une quantité proportionnelle pour obtenir la prime chargée $(1+\eta)\mathbb{E}[X]$ où η est le chargement de sécurité. Ce chargement η permettant alors de réduire la probabilité de ruine pour l'assureur.

A ces deux notions, il faut ajouter la **prime commerciale** en appliquant à la prime chargée un second chargement. Ce second chargement inclut les différents coûts et frais de l'assureur : rémunération du capital, taxes, coût de la réassurance et frais de gestion. De manière générale, chaque compagnie applique ses propres règles pour le calcul du chargement commercial. Dans la suite de ce cours, nous ne calculerons que des prime avec chargement de sécurité.

Chapitre 2

Modélisation actuarielle

2.1 Modèles en temps discret

2.1.1 Modèle individuel

Nous présentons d'abord la définition formelle du modèle individuel.

Définition 1. *Le modèle individuel de risque est une suite finie $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Le montant cumulé des sinistres S est alors défini par*

$$S \;=\; X_1 + \ldots + X_n \,. \tag{2.1}$$

Dans ce modèle la variable aléatoire X_k représente le cumul des indemnisations allouées pour les sinistres affectant l'assuré k pendant la période d'observation.

Définition 2. *La **prime pure** est l'espérance mathématique $\mathbb{E}[S]$ du montant cumulé des sinistres S.*

Une première conséquence de la définition du modèle individuel est la suivante.

Proposition 1. *Dans le modèle individuel de risque $X_1, \ldots, X_n$ avec montant cumulé des sinistres $S = X_1 + \ldots + X_n$ nous avons $\mathbb{E}[S] = n\mathbb{E}[X_1]$ si $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$ et $Var[S] = nVar[X_1]$ si $\mathbb{E}[|X_1|^2] < +\infty$*

La preuve de cette proposition utilise simplement la définition du modèle individuel et et laissée en exercice au lecteur.

Nous cherchons maintenant à calculer la fonction de répartition du montant cumulé S. Pour cela rappelons que si Y et Z sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de fonctions de répartition respectives F_Y et F_Z, la variable aléatoire $Y + Z$ admet pour fonction de répartition le produit de convolution $F_Y \star F_Z$ donné par

$$F_Y \star F_Z(x) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} F_Y(x-z)d\mathbb{P}_Z(z) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} F_Z(x-y)d\mathbb{P}_Y(y) \qquad (2.2)$$

En notant F_S la fonction de répartition de S et F_X celle des X_k un raisonnement par récurrence permet d'obtenir la propriété suivante.

Proposition 2. *Dans le modèle individuel de risque $X_1, \ldots, X_n$ avec sinistre cumulé $S = X_1 + \cdots + X_n$, nous avons*

$$F_S \quad = \quad F_X^{\star n} \quad = \quad F_X \star \cdots \star F_X \ \ (n\,fois)\ . \qquad (2.3)$$

2.1.2 Modèle collectif

Une extension du modèle individuel de risque est le modèle collectif de risque dont nous donnons la définition.

Définition 3. *Le modèle collectif de risque est une suite infinie $(Y_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et une variable aléatoire N indépendante et à valeur entières. Le montant cumulé des sinistres S est alors défini par*

$$S \quad = \quad Y_1 + \ldots + Y_N \quad = \quad \sum_{k=1}^{N} Y_k\ . \qquad (2.4)$$

Nous pouvons alors établir un résultat similaire au modèle individuel de risque pour le calcul des moments d'ordres 1 et 2.

Proposition 3. *Dans le modèle collectif de risque N, $(Y_k)_k \geq 1$ avec montant cumulé des sinistres $S = Y_1 + \ldots + Y_N$ nous avons*

$$\mathbb{E}[S] \quad = \quad \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_1] \qquad (2.5)$$

si $\mathbb{E}[Y_1] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[N] < +\infty$ *et*

$$Var[S] \;=\; \mathbb{E}[N]Var[Y_1] + Var[N]\mathbb{E}[Y_1]^2 \tag{2.6}$$

si $\mathbb{E}[|Y_1|^2] < +\infty$ *et* $\mathbb{E}[|N|^2] < +\infty$.

2.1.3 Critère de ruine

Nous étudions maintenant la notion de ruine et plus précisément de probabilité de ruine. Considérons un assureur dont le risque cumulé de sinistre est représenté par une variable aléatoire S d'espérance finie. Pour un taux de chargement $\eta > 0$, nous appellerons montant cumulé des primes chargées la quantité

$$\Pi \;=\; (1+\eta)\mathbb{E}[S] \;.$$

Pour diminuer le risque de ruine, l'assureur dispose d'une réserve de solvabilité R. Il est également possible pour l'assureur de transférer une partie de son risque à un réassureur en conservant une proportion α du montant des primes cumulées et de celui des sinistres et en cédant le reste au réassureur. La probabilité de ruine se définit alors de la manière suivante.

Définition 4. *Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S et de prime pure $\mathbb{E}[S] \neq 0$. Pour un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance de taux de rétention $\alpha \in]0,1]$, la* ***probabilité de ruine*** *P_{ruine} est donnée par*

$$\begin{aligned} P_{ruine} &= \mathbb{P}\big(\alpha S > \alpha(1+\eta)\mathbb{E}[S] + R\big) \\ &= 1 - F_S\Big((1+\eta)\mathbb{E}[S] + \frac{R}{\alpha}\Big) \;. \end{aligned}$$

Notons que cette définition est naturelle puisqu'elle correspond à la probabilité que les pertes cumulées à la charge de l'assureur αS dépassent les fonds dont il dispose. Ces fonds se décomposant en la somme des primes qu'il conserve $\alpha(1+\eta)\mathbb{E}[S]$ et de sa réserve de solvabilité R.

Supposons alors que le réassureur ne fait pas défaut lorsque l'assureur est ruiné. L'assureur n'ayant en charge qu'une proportion α des primes et des sinistres

S, la proportion de coût restant à la charge des assurés vaut :

$$\frac{\mathbb{E}\big[\alpha S \big| \alpha S > \alpha(1+\eta)\mathbb{E}[S] + R\big] - \big(\alpha(1+\eta)\mathbb{E}[S] + R\big)}{(1+\eta)\mathbb{E}[S] + \frac{R}{\alpha}} .$$

Ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 5. *Fixons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S et de prime pure $\mathbb{E}[S] \neq 0$. Pour un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance de taux de rétention $\alpha \in]0,1]$, la **proportion de coût en excès** à la ruine C_{ruine} est définie par*

$$C_{ruine} \;=\; \alpha\Big(\frac{\mathbb{E}\big[S \big| \alpha S > \alpha(1+\eta)\mathbb{E}[S] + R\big]}{(1+\eta)\mathbb{E}[S] + \frac{R}{\alpha}} - 1\Big) .$$

Définition 6. *Le taux de chargement total de la prime pure est définit par la quantité $\eta + \frac{R}{\alpha \mathbb{E}[S]}$.*

Nous étudions maintenant l'effet de la mutualisation entre les risques. Plus précisément, nous cherchons à savoir le niveau minimum de chargement de sécurité nécessaire pour maîtriser correctement la probabilité de ruine. En d'autres termes, nous souhaitons avoir si la mutualisation des risques est suffisante pour garantir une probabilité de ruine petite lorsque la prime demandée est la prime pure $i.e.$ il n'y a pas de chargement. Le résultat suivant nous montre que la réponse est négative.

Proposition 4. *Considérons un modèle individuel $X_1, \dots, X_n$ de cumul des sinistres S avec $0 < \mathbb{E}[X_1] < +\infty$, et $\eta > 0$. Alors*

$$\begin{aligned} \frac{S}{\mathbb{E}[S]} &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}-a.s.} 1 , \\ \mathbb{P}\big(S > (1+\eta)\mathbb{E}[S]\big) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 . \end{aligned}$$

Supposons que $0 < \sigma^2(X_1) < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(S > \mathbb{E}[S]\big) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} , \\ \mathbb{P}\big(S > \mathbb{E}[S] + \sqrt{n\,\sigma^2(X_1)}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\big) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon , \\ \frac{\mathbb{E}[S|S > \mathbb{E}[S]]}{\mathbb{E}[S]} &\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}-a.s.} 1 . \end{aligned}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Lorsque la prime utilisée est la prime pure, bien que le rapport sinistre-prime tend vers 1 lorsque le nombre d'assurés tend vers l'infini, la probabilité de ruine ne tend pas en général vers 0. En revanche, n'importe quel chargement de la prime permet la convergence de la probabilité de ruine vers 0. Enfin pour une bonne maîtrise de cette probabilité de ruine, il suffit d'avoir un taux de chargement décroissant avec le nombre d'assurés proportionnellement à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.2 Modèles collectif en temps continu

Cette section est une présentation rapide du modèle collectif en temps continu. Le modèle collectif en temps continu est la donnée

— d'une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i\geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées, positives représentant le cout de chaque sinistre,

— d'un processus $(N_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ à trajectoires croissantes, continues à droite et limités à gauche et indépendant de la suite $(Y_i)_{i\geq 1}$.

Pour une réserve de solvabilité R et un taux d'acquisition des primes π par unité de temps, le résultat de l'assureur au temps $t \geq 0$ est donné par

$$R(t) \quad = \quad R + \pi t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \ .$$

Dans ce modèle la définition de la probabilité de ruine change. En effet, il faut d'abord se fixer un horizon de temps T. Sur l'intervalle de temps $[0, T]$, l'évènement à consider pour savoir si l'assureur fait défaut est donc l'évènement où son résultat devient négatif au moins une fois. La probabilité de ruine devient alors

$$P_{ruine}^{cont} \quad = \quad \mathbb{P}\Big(\min_{t\in[0,T]} R(t) < 0 \Big) \ .$$

Chapitre 3

Fonction génératrice des moments et lien entre modèles individuels et collectifs

3.1 Moments et fonction génératrice des moments

3.1.1 Moments

Pour une variable aléatoire Y et un entier $r \geq 1$, nous notons (lorsque ces quantités existent) dans la suite du cours

— $M_r(Y) = \mathbb{E}[Y^r]$ le moment d'ordre r,

— $\mu_r(Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^r]$ le moment centré d'ordre r,

— $\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]}$ l'écart type,

— $\gamma_1(Y) = \frac{\mu_3(Y)}{\sigma^3(Y)}$ et $\gamma_2(Y) = \frac{\mu_4(Y)}{\sigma^4(Y)} - 3$ les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de Fisher.

Un premier résultat classique permet d'avoir une majoration des queues de variables aléatoire en fonction du premier moment.

Proposition 5 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre 1. Alors*

$$\mathbb{P}(X \geq x) \quad \leq \quad \frac{\mathbb{E}[X]}{x}$$

pour tout $x > 0$.

Démonstration. Fixons $x > 0$, nous avons alors

$$\mathbb{E}[X] \quad \geq \quad \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq x}] \quad \geq \quad \mathbb{E}[x\mathbb{1}_{X\geq x}] \quad = \quad x\mathbb{P}(X \geq x)\ .$$

□

Proposition 6 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors*

$$\mathbb{P}(X \in]-\infty, y] \cup [x, +\infty[) \quad \leq \quad \frac{\sigma^2(X)}{\min\{x - \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X] - y\}^2}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > \mathbb{E}[X] > y$.

Démonstration. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > \mathbb{E}[X] > y$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\sigma^2(X) \quad &= \quad \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\big] \quad \geq \quad \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\mathbb{1}_{X\in]-\infty,y]\cup[x,+\infty[}\Big] \\
&\geq \quad \mathbb{E}\big[\min\{x - \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X] - y\}^2\mathbb{1}_{X\in]-\infty,y]\cup[x,+\infty[}\big] \\
&= \quad \min\{x - \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X] - y\}^2\mathbb{P}(X \in]-\infty, y] \cup [x, +\infty[)\ .
\end{aligned}$$

□

Proposition 7 (Premiers moments du modèle individuel)**.** *Dans le modèle individuel $S = X_1 + \cdots + X_K$, si les X_k admettent un moment d'ordre 2 (resp. 3) alors S admet aussi un moment d'ordre 2 (resp. 3) et*

$$\begin{aligned}
\sigma^2(S) \quad &= \quad K\sigma^2(X_1) \\
\textit{(resp. } \mu_3(S) \quad &= \quad K\mu_3(X_1)\textit{)}\ .
\end{aligned}$$

Démonstration. Ces égalités résulte du développement des expression $\sigma^2(S)$ et $\mu_3(S)$ et du fait que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_K$ sont indépendantes et identiquement distribuées. □

Proposition 8 (Premiers moments du modèle collectif)**.** *Dans le modèle collectif $S = Y_1 + \cdots + Y_K$, si les N et Y_k admettent un moment d'ordre 2 (resp. 3) alors S admet aussi un moment d'ordre 2 (resp. 3) et*

$$\begin{aligned}
\sigma^2(S) \quad &= \quad \mathbb{E}[N]\sigma^2(Y_1) + \sigma^2(N)\mathbb{E}[Y_1]^2 \\
\textit{(resp. } \mu_3(S) \quad &= \quad \mu_3(N)\mathbb{E}[Y_1]^3 + 3\sigma^2(N)\mathbb{E}[Y_1]\sigma^2(Y_1) + \mathbb{E}[N]\mu_3(Y_1)\textit{)}
\end{aligned}$$

3.1.2 Fonction génératrice des moments

Définition 7. *La fonction génératrice d'une variable aléatoire Y, noté L_Y est la fonction définie par*

$$L_Y(\theta) \;=\; \mathbb{E}[e^{\theta Y}]\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Théorème 1. *Pour une v.a. Y à valeurs dans $[0, +\infty[$, la fonction génératrice L_Y est finie, croissante et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$. Ses valeurs sur $]-\infty, 0[$ caractérisent la loi de Y et on a*

$$L^{(k)}(0^-) \;=\; \lim_{\theta\to 0^-} L^{(k)}(\theta) = M_k(Y)\ \left(=\ \mathbb{E}[Y^k]\right)\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

Proposition 9. *Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires positives et indépendantes. Alors*

$$L_{Y_1+Y_2} \;=\; L_{Y_1} L_{Y_2}$$

Nous pouvons également définir la fonction génératrice d'un vecteur aléatoire.

Définition 8. *Pour un vecteur aléatoire $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ à valeurs dans $[0, +\infty[^n$, sa fonction génératrice L_Y est définie par*

$$L_Y(\theta) \;=\; \mathbb{E}\big[e^{\theta^\top Y}\big]\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}^n\,.$$

Cette fonction est finie sur $]-\infty, 0]^n$.

Nous avons alors les propriétés suivantes.

Proposition 10. *La fonction génératrice des moments restreinte à $]-\infty, 0]^n$ caractérise la loi du vecteur aléatoire : si Y_1 et Y_2 sont deux vecteurs aléatoires tels que*

$$L_{Y_1}(\theta) \;=\; L_{Y_2}(\theta)\,,$$

pour tout $\theta \in]-\infty, 0]^n$ alors Y_1 et Y_2 ont même loi.

Proposition 11. *Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et Y le vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$. Alors $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes si et seulement si*

$$L_Y(\theta) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} L_{Y_k}(\theta_k)$$

pour tout $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^\top$.

3.1.3 Fonction génératrice d'une distribution sur $\mathbb{N}$

Définition 9. *Pour une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction génératrice g_Z est définie par*

$$g_Z(s) \quad = \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} s^n \mathbb{P}(Z = n) \ , \quad s \in [0, 1] \ .$$

Proposition 12. *Pour tout $s, h \in [0, 1]$ tels que $s + h \in [0, 1]$, nous avons*

$$g_Z(s + h) \quad = \quad \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{g_Z^{(\ell)}(s)}{\ell!} h^\ell \ .$$

Corollaire 1. *Si g_1 et g_2 sont deux fonctions génératrices égales sur un intervalle $[c, 1]$ avec $c \in]0, 1[$, alors $g_1 = g_2$.*

3.2 Cas des modèles individuel et collectif

Proposition 13. *Pour le modèle individuel $S = X_1 + \cdots + X_K$ nous avons*

$$L_S(\theta) \quad = \quad (L_X(\theta))^K$$

pour tout $\theta \in] - \infty, 0]$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence de la définition du modèle individuel et de la Proposition 9. □

Proposition 14. *Pour le modèle collectif $S = X_1 + \cdots + X_N$ nous avons*

$$L_S(\theta) \quad = \quad g_N(L_{X_1}(\theta))$$

pour tout $\theta \in] - \infty, 0]$.

Démonstration. Fixons $\theta \in]-\infty, 0]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} L_S(\theta) &= \mathbb{E}\big[e^{\theta \sum_{k=1}^N X_k}\big] &=& \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{N=n} e^{\theta \sum_{k=1}^n X_k}\big] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[e^{X_1}\big]^n \mathbb{P}(N=n) &=& g_N(L_{X_1}(\theta)) \ . \end{aligned}$$

□

3.3 Relation entre le modèle individuel et collectif

Définition 10. *Pour un entier $K > 0$, le modèle collectif étendu de risque est la donnée d'une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de deux suites de variables aléatoires iid $(Y_n)_n$ et $(k_n)_n$ mutuellement indépendantes avec les k_n à valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, K\}$ représentant les risques possibles. Les objets N et $(Y_n)_n$ définissant le modèle collectif de sinistre cumulé $S = Y_1 + \cdots + Y_N$ et l'objet $(k_n)_n$ précise le risque touché par un sinistre. Ainsi, pour un risque $k \in \{1, \ldots, K\}$ le nombre N_k de sinistre affectant k et leur coût cumulé X_k sont donnés par*

$$N_k \ = \ \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{k_n = k} \quad \textit{et} \quad X_k \ = \ \sum_{n=1}^N Y_n \mathbb{1}_{k_n=k} \ .$$

Notons que dans le modèle collectif étendu nous avons les relations :

$$N \ = \ N_1 + \cdots + N_K \quad \text{et} \quad S \ = \ X_1 + \cdots + X_K \ .$$

Ces deux relations montrent un lien entre ce modèle collectif étendu et le modèle individuel. Plus précisément nous avons le résultat suivant.

Théorème 2. *Considérons un modèle collectif étendu de risque vérifiant $K \geq 2$, $\mathbb{P}(N = 0) < 1$ et $\mathbb{P}(k_1 = k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$. Les assertions suivantes sont alors vérifiées.*

(i) Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_K$ sont indépendantes si et seulement si N suit une loi de Poisson.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_K$ sont identiquement distribuées si et seulement si les variables aléatoires k_n sont équidistribuées $i.e.$ $\mathbb{P}(k_n = k) = \frac{1}{K}$ pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$.

Démonstration. Nous présentons simplement la preuve des conditions suffisantes. Nous calculons d'abord la fonction génératrice du vecteur $X = (X_1, \dots, X_K)^\top$:

$$L_X(\theta) \;=\; \mathbb{E}\Big[e^{\sum_{k=1}^K \theta_k X_k}\Big] \;=\; \mathbb{E}\Big[e^{\sum_{n=1}^N Y_n (\sum_{k=1}^K \theta_k \mathbb{1}_{k_n=k})}\Big]$$

Les variables aléatoires $Z_n := Y_n(\sum_{k=1}^K \theta_k \mathbb{1}_{k_n=k})$ étant IID nous obtenons d'après le calcul de la fonction génératrice du modèle collectif

$$L_X(\theta) \;=\; g_N(L_{Z_1}(-1)) \;.$$

Les variables aléatoires Y_n et le v.a. k_n étant IID nous obtenons

$$L_{Z_1}(-1) \;=\; \sum_{k=1}^K L_{Y_1}(\theta_k)\mathbb{P}(k_1 = k),$$

ce qui nous donne

$$L_X(\theta) \;=\; g_N\Big(\sum_{k=1}^K L_{Y_1}(\theta_k)\mathbb{P}(k_1 = k)\Big) \;.$$

(i) Supposons que N suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. D'après le calcul précédent nous avons

$$L_X(\theta) \;=\; e^{-\lambda(1-\sum_{k=1}^K L_{Y_1}(\theta_k)\mathbb{P}(k_1=k))} \;=\; e^{-\sum_{k=1}^K \lambda\mathbb{P}(k_1=k)(1-L_{Y_1}(\theta_k))}$$

Nous en déduisons que

$$L_X(\theta) \;=\; \prod_{k=1}^K e^{-\lambda\mathbb{P}(k_1=k)(1-L_{Y_1}(\theta_k))}$$

Ce qui nous done l'indépendance des X_k.

(ii) En procédant de la même manière nous obtenons l'expression suivante pour la fonction génératrice de X_k :

$$L_{X_k}(\theta_k) \;=\; g_N\big(L_{Y_1\mathbb{1}_{k_1=k}}(\theta_k)\big) \;=\; g_N\big(1 - (1 - L_{Y_1}(\theta_k)\mathbb{P}(k_1 = k)\big) \;.$$

Cette expression ne dépendent pas de k lorsque k_n est uniformément distribuée. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que les X_k sont identiquement distribuées dans ce cas. $\square$

Chapitre 4

Coût des sinistres

Nous présentons dans ce chapitre les lois usuelles utilisées pour modéliser le montant d'un sinistre.

4.1 Lois normales et gammas

Nous commençons par les lois gaussiennes.

Définition 11. *La loi normale de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$ est la loi de probabilité notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de densité $f_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}$ définie par*

$$f_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Pour une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, nous avons $\mathbb{E}[X] = m$ et $\sigma^2(X) = \sigma^2$. De plus une telle variable admet des moments à tous les ordres.

La fonction génératrice de X est définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$ et nous est alors donnée par

$$L_X(\theta) \quad = \quad \exp\big(m\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\big) \ , \quad \theta \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Nous passons à la loi gamma.

Définition 12. *Pour deux réels a et b strictement positifs la loi gamma $\gamma(a, b)$ est la loi de densité $f_{\gamma(a,b)}$ donnée par*

$$f_{\gamma(a,b)}(x) \quad = \quad \mathbb{1}_{x>0} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}dy$.

Pour une variable aléatoire X suivant une loi $\gamma(a, b)$, nous avons $\mathbb{E}[X] = a/b$ et $\sigma^2(X) = a/b^2$.

La fonction génératrice de X est définie pour $\theta \in [0, b[$ et nous est donnée par

$$L_X(\theta) = \left(\frac{b}{b-\theta}\right)^a , \quad \theta \in [0, b[\,.$$

Nous présentons ensuite les estimateurs des moments et du maximum de vraisemblance.

Pour la loi normale, les deux paramètres qui déterminent la loi sont m et σ^2. Lorsqu'on dispose d'un échantillon de réalisations IID $x_1, \ldots, x_n$ de la variable aléatoire X l'estimateur des moments est donné par

$$\begin{aligned} \hat{m}_M &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \,, \\ \hat{\sigma}_M^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_M)^2 \,. \end{aligned}$$

Pour la loi gamma, les paramètres a et b sont donnés par les relations

$$\begin{aligned} b &= \frac{\mathbb{E}[X]}{\sigma^2(X)} \\ a &= \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\sigma^2(X)} \end{aligned}$$

L'estimateur des moments est donc donné par

$$\begin{aligned} \hat{b}_M &= \frac{\hat{m}_M}{\hat{\sigma}_M^2} \\ \hat{a}_M &= \frac{\hat{m}_M^2}{\hat{\sigma}_M^2} \end{aligned}$$

Concernant la méthode du maximum de vraisemblance, nous rappelons que le choix de l'estimateur se fait de manière à maximiser la vraisemblance. Plus précisément, pour une loi admettant une densité f_θ dépendant d'un paramètre $\theta \in \Theta$, l'estimateur du maximum de vraisemblance θ_{EMV} vérifie

$$\theta_{EMV} \in \arg\max_{\theta\in\Theta} \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \,.$$

avec $x_1, \ldots, x_n$ la réalisation d'un n-échantillon IID de même loi que X.

Dans le cas de la loi normale l'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par

$$\begin{aligned}\hat{m}_{EMV} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \\ \hat{\sigma}^2_{EMV} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{m}_M)^2 \ .\end{aligned}$$

Pour la loi gamma, il n'y a pas d'expression explicite pour l'estimateur de vraisemblance $(\hat{a}_{EMV}, \hat{b}_{EMV})$. Nous savons simplement qu'il est solution de l'équation suivante :

$$n\ln(\hat{a}_{EMV}) - n\ln(\hat{m}_{EMV}) - n\frac{\Gamma'(\hat{a}_{EMV})}{\Gamma(\hat{a}_{EMV})} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \quad = \quad 0$$

et

$$\hat{b}_{EMV} \quad = \quad \frac{\hat{a}_{EMV}}{\hat{m}_{EMV}} \ .$$

Il faut alors utiliser des méthodes numériques pour obtenir une valeur de cet estimateur.

4.2 Transformation de loi

En assurance, il est important pour l'assureur d'avoir une mesure de l'occurence de sinistres lourds demandant une indemnisation importante. D'un point de vue probabiliste, cela se traduit par la mesure des queues de distribution. En d'autres termes, étant donnée un loi de probabilité, pouvons nous dire si elle charge beaucoup les grandes valeurs. Dans le cas où la réponse est positive, on parle alors de queues épaisses.

Pour mesurer l'épaisseur des queues de distribution d'une variable aléatoire X, il est d'usage de calculer le coefficient d'aplanissement de Fisher $\gamma_2(X)$ dont on rappelle l'expression

$$\gamma_2(X) \quad = \quad \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3$$

(dans la littérature financière, on parle de Kurtosis $\kappa(X)$ défini par $\kappa = \gamma_2(X)+3$). Pour une loi normale $\gamma_2 = 0$ (ou $\kappa = 3$) et lorsque $\gamma_2 > 0$ (ou $\kappa > 3$), la distribution est dite leptokurtique et présente (souvent) des queues épaisses.

En assurance, de nombreux risques à couvrir conduisent à des sinistres élevés. Il est donc important d'utiliser des variables aléatoires à queues épaisses pour modéliser ces risques.

Une manière de rehausser les queues de distribution est de considérer des variables aléatoires composées par la fonction exponentielle. Plus précisément, pour une variable aléatoire X de loi donnée, on s'intéresse à la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$.

Proposition 15. *Si X admet une densité f_X alors alors Y admet aussi une densité f_Y donnée par*

$$f_Y(y) \quad = \quad \frac{f_X(\ln(y))}{y}$$

pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_Y(y) = 0$ pour $y \in \mathbb{R}_-$.

D'autre part Y admet un moment d'ordre $k \geq 0$ si et seulement si X admet un moment exponentiel à l'ordre k.

Nous nous intéressons maintenant à l'effet de cette transformation sur la procédure d'estimation.

Proposition 16. *La procédure d'estimation par maximum de vraisemblance n'est pas modifiée par la transformation exponentielle : si $\hat{\theta}_{EMV} = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ est un estimateur du maximum de vraisemblance pour la loi de $f_{X,\theta}$ de X obtenu à partir de réalisation IID $x_1, \ldots, x_n$ de X, alors $\hat{\theta}_{EMV}$ est aussi un estimateur du maximum de vraisemblance pour la loi de $f_{Y,\theta}$ de Y obtenu à partir de réalisation IID $e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}$ de Y.*

Ce résultat nous dit simplement que si l'estimateur du maximum de vraisemblance est $\hat{\theta}_{EMV} = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ alors l'estimateur du maximum de vraisemblance pour Y est de la forme

$$\psi(\ln(y_1), \ldots, \ln(y_n))$$

où $y_1, \ldots, y_n$ sont les réalisations IID de Y. Nous présentons maintenant trois exemples de base.

Loi lognormale. La loi lognormale de paramètres m et σ^2 noté $\log \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$ où X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Sa densité est donnée par

$$f_{\log \mathcal{N}(m,\sigma^2)}(y) \quad = \quad \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{1}{2} \frac{(\ln(y) - m)^2}{\sigma^2} \Big) , \quad x > 0 .$$

Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_{\log \mathcal{N}(m,\sigma^2)}(y) \quad = \quad F_{\mathcal{N}(0,1)}\Big(\frac{\ln(y) - m}{\sigma} \Big)$$

Si X suit la loi $\ln \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors son espérance et sa variance sont données par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} . \\ \sigma^2(X) &= e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) . \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, pour une réalisation $(y_1, \ldots, y_n)$ d'un n échantillon IID de Y, l'estimateur des moments sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \hat{m}_M &= \ln\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \Big) - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_M^2 , \\ \hat{\sigma}_M^2 &= \ln\Big(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^2}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i)^2} \Big) . \end{aligned}$$

La vraisemblance nous est donnée par

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{1}{2} \frac{(\ln(y_i) - m)^2}{\sigma^2} \Big) .$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est alors donné par

$$\begin{aligned} \hat{m}_{EMV} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) , \\ \hat{\sigma}_{EMV}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\ln(y_i) - \hat{m}_M)^2 . \end{aligned}$$

Loi loggamma. La loi loggamma de paramètres a et b noté $\log\gamma(a,b)$ est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$ où X suit la loi $\gamma(a,b)$.

Sa densité est donnée par

$$f_{\log\gamma(a,b)}(y) \quad = \quad \frac{b^a}{y^{b+1}\Gamma(a)} \ln(y)^{a-1} \mathbb{1}_{y>1} \; , \qquad y > 0 \; .$$

Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_{\log\gamma(a,b)}(y) \quad = \quad F_{\gamma(a,b)}(\ln(y))$$

Cette loi admet un moment d'ordre 1 si et seulement si $b > 1$ et dans ce cas

$$E[Y] \quad = \quad \left(\frac{b}{b-1}\right)^a \; .$$

Si $b > 2$ cette loi admet également un moment d'ordre 2 donné par

$$\sigma^2(Y) \quad = \quad \left(\frac{b}{b-2}\right)^a - \left(\frac{b}{b-1}\right)^{2a} \; .$$

L'estimateur des moments est alors donné par les relations suivantes :

$$\frac{\ln(\hat{b}_M) - \ln(\hat{b}_M - 1)}{\ln(\hat{b}_M) - \ln(\hat{b}_M - 2)} \quad = \quad \frac{\ln(1/n\sum_{i=1}^n y_i)}{\ln(1/n\sum_{i=1}^n y_i^2)}$$

et

$$\hat{a}_M \quad = \quad \frac{1/n\sum_{i=1}^n y_i}{\ln(\hat{b}_M) - \ln(\hat{b}_M - 1)} \; .$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est alors obtenu en maximisant la vraisemblance donnée par

$$(\frac{b^a}{\Gamma(a)})^n \prod_{i=1}^n \frac{\ln(y_i)^{a-1}}{y_i^{b+1}} \; .$$

Là encore il n'y a pas de formule explicite. Nous savons uniquement que l'estimateur est solution de

$$n\ln(\hat{a}_{EMV}) - n\ln(1/n\sum\ln(y_i)) - n\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \sum_{i=1}^n \ln(\ln(y_i)) \quad = \quad 0$$

et

$$\hat{b}_{EMV} \quad = \quad \frac{\hat{a}_{EMV}}{1/n\sum\ln(y_i)} \; .$$

Loi de Pareto. La loi de Pareto de paramètres $a > 0$ et $\alpha > 0$ noté $P(a, \alpha)$ est la loi de la variable aléatoire $Y = ae^X$ où X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$. Rappelons que la loi $\mathcal{E}(\alpha)$ admet pour densité

$$f_{\mathcal{E}(\alpha)}(x) \quad = \quad \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{x>0} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

La densité de la loi de Pareto de paramètres a et α est alors donnée par

$$f_{P(a,\alpha)}(y) \quad = \quad \alpha \frac{a^\alpha}{y^{\alpha+1}} \ ,$$

pour $y \geq a$ et $f_{P(a,\alpha)}(y) = 0$ sinon.

La loi de Pareto admet un moment d'ordre k si et seulement si $\alpha > k$. En particulier lorsque $\alpha > 2$ nous avons

$$\mathbb{E}[Y] \quad = \quad \frac{a\alpha}{\alpha - 1} \ ,$$

et

$$\sigma^2(Y) \quad = \quad \frac{a^2 \alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \ .$$

Ces deux relations nous permettent alors d'écrire le paramètre α comme solution d'une équation du second degré :

$$\alpha^2 - 2\alpha - \frac{\mathbb{E}[Y]^2}{\sigma^2(Y)} \quad = \quad 0 \ .$$

Ceci nous conduit aux estimateurs des moments sous la forme

$$\hat{\alpha}_M \quad = \quad 1 + \sqrt{1 + \frac{(1/n \sum_{i=1}^n y_i)^2}{1/n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (1/n \sum_{i=1}^n y_i)^2}}$$

et

$$\hat{a}_M \quad = \quad \frac{(\hat{\alpha}_M - 1) 1/n \sum_{i=1}^n y_i}{\hat{\alpha}_M} \ .$$

Concernant l'estimateur du maximum de vraisemblance, il réalise le maximum de

$$\alpha^n a^{n\alpha} \Big(\prod_{i=1}^n y_i \Big)^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{a \leq \min_{1 \leq i \leq n} y_i} \ .$$

Ceci conduit aux estimateurs suivants

$$\hat{a}_{EMV} \quad = \quad \min_{1 \leq i \leq n} y_i$$

et

$$\hat{\alpha}_{EMV} \quad = \quad \frac{1}{1/n \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - \ln(\min_{1 \leq i \leq n} y_i)} \ .$$

4.3 Choix d'un modèle paramétrique pour la loi du coût

En pratique le choix d'une loi de probabilité pour modéliser les coûts des sinistres se fait parmi un nombre limités de loi incluant les lois précédemment citées (auxquelles il convient d'ajouter la loi de Weibull, les deux versions de la loi de Burr,...).

En pratique ce choix se fait en cherchant parmi ces distributions la famille de loi de probabilités la plus proche des observations en utilisant les outils suivant.

Diagramme Quantile-Quantile. La méthode Q-Q-plot consiste à comparer la distribution empirique à une distribution théorique. Pour cela, on représente sur un graphe les points M_i d'abscisse x_i et d'ordonnée y_i où x_i et y_i représentent respectivement les quantiles d'ordre $\frac{i}{n}$ des distributions empirique et théorique. La qualité de l'adéquation entre les lois empirique et théorique est alors mesurée par l'alignement des points M_i sur la première bissectrice.

Distance du χ^2. La méthode consiste à comparer l'histogramme des fréquences et la distribution de la loi de probabilité servant de modèle théorique. Pour cela, après avoir découpé l'intervalle d'observation en k classes, on construit un indice d mesurant l'écart constaté entre les effectifs réels et les effectifs théoriques

$$d = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

avec

- n_i : effectif observé dans la classe i,
- n : effectif total observé,
- p_i : probabilité d'obtenir une observation de la loi de probabilité théorique dans la classe i,
- np_i : effectif théorique dans la classe i.

Sous l'hypothèse d'adéquation, la statistique d converge en loi vers une loi du χ^2. On rejette alors l'hypothèse d'adéquation lorsque $d > h$ pour un paramètre h bien choisi.

Distance de Kolmogorov-Smirnov. Pour un échantillon IID $(x_1, \dots, x_n)$ le test de Kolmogorov-Smirnov permet de mesurer l'adéquation à une loi théorique de fonction de répartition F. Pour cela on calcule la statistique

$$d = \max_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

où F_n désigne la fonction de réparation empirique associée à notre échantillon. Sous l'hypothèse selon laquelle l'échantillon est tiré suivant la loi F, la statistique d tend vers 0.

Ce test consiste alors à rejeter l'hypothèse d'adéquation pour une valeur de d dépassant un certain seuil.

4.4 Mutualisation

4.4.1 Modèle normal et mutualisation des risques

Nous nous intéressons dans cette sous-section à l'effet de la mutualisation dans le cas du modèle normal pour le cumul des sinistres.

Considérons deux ensembles de risques de montants cumulés S_1 et S_2 de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_1, \nu_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \nu_2^2)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et s_1 et s_2 deux seuils tels que les probabilités de ruines associées respectivement pour S_1 et S_2 soient fixées à ε. Ces seuils sont donc donnés par

$$s_1 = \mu_1 + \nu_1 \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) \quad \text{et} \quad s_2 = \mu_2 + \nu_2 \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) \ .$$

Nous supposons dans la suite que le montant cumulé $S = S_1 + S_2$ suit une loi normale. Sa moyenne μ et sa variance ν sont alors données par

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \quad \text{et } \nu^2 = \nu_1^2 + cov(S_1, S_2) + \nu_2^2$$

Deux possibilités s'offrent à l'assureur pour profiter de l'effet de mutualisation.

Réduction du seuil. L'assureur peut choisir d'utiliser l'effet de mutualisation afin de réduire le seuil s correspondant à une probabilité de ruine ε pour S. Dans ce cas, ce seuil est donné par

$$\begin{aligned} s &= \mathbb{E}[S] + \sqrt{\sigma^2(S)}\Phi^{-1}(1-\varepsilon) \\ &= \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2}\Phi^{-1}(1-\varepsilon) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on remarque que $\nu^2 \leq (\nu_1 + \nu_2)^2$, ce qui conduit à

$$s \leq s_1 + s_2 ,$$

le seuil est donc réduit.

Réduction de la probabilité de ruine. L'assureur peut également utiliser le seuil $s = s_1 + s_2$ afin de réduire la probabilité de ruine de l'ensemble des risques. En effet, nous distinguons les deux cas suivants.

— Cas 1 : $\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2 = 0$. Dans ce cas $\sigma^2(S_1 + S_2) = 0$ et $\mathbb{P}(S_1 + S_2 = \mu_1 + \mu_2) = 1$. Comme

$$s_1 + s_2 = \mu_1 + \mu_2 + \Phi(1-\varepsilon)(\nu_1 + \nu_2) > \mu_1 + \mu_2 ,$$

nous obtenons $\mathbb{P}(S_1 + S_2 > s_2 + s_2) = 0 < \varepsilon$ et la probabilité de ruine est diminuée.

— Cas 2 : $\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2 > 0$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 + S_2 > s_2 + s_2) &= 1 - \Phi\Big(\frac{s_1 + s_2 - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2}}\Big) \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2}}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\Big) \\ &\leq 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)) = \varepsilon . \end{aligned}$$

La dernière inégalité provenant de fait que Φ est une fonction croissante et de l'inégalité $\nu^2 \leq (\nu_1 + \nu_2)^2$.

En suivant ce raisonnement on peut montrer le résultat plus général suivant.

Proposition 17. *Soient un entier I strictement positif et I ensembles de risques de montant cumulés respectifs $S_1, \ldots, S_I$ tels que les S_i et $S := S_1 + \cdots + S_I$*

suivent des lois normales avec $\sigma^2(S_i) > 0$ pour tout $i \leq I$. Pour des seuils $s_1 > \mathbb{E}[S_1], \dots, s_I > \mathbb{E}[S_I]$, nous avons

$$P(S > s_1 + \dots + s_I) \leq \max_{1 \leq i \leq I} \left(1 - \Phi\Big(\frac{s_i - \mathbb{E}[S_i]}{\sqrt{\sigma^2(S_i)}} \Big) \right)$$

4.4.2 Modèle de versement d'un capital décès

On considère le modèle individuel de risque suivant. Les variables aléatoires X_k sont données par $X_1 = cB_1, \dots, X_k = cB_k$, où c est une constante de $\mathbb{R}_+^*$ et $B_1, \dots, B_K$ sont des variable aléatoires IID de loi de bernoulli $\mathcal{B}(q)$ de paramètre $q \in]0, 1[$:

$$\mathbb{P}(B_k = 1) = q = 1 - \mathbb{P}(B_k = 0) .$$

Le cumul des sinistres $S = X_1 + \dots + X_K$ a une loi relativement simple : S/c suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(K, q)$ de paramètres K et q :

$$\mathbb{P}(S/c = k) = C_K^k q^k (1 - q^{K-k}) .$$

Ce modèle correspond au versement d'un montant c au décès d'individus tous de mêmes caractéristiques. Ce modèle est ses extensions sont utilisés dans le domaine de l'assurance vie collective où les contrats sont renégociés chaque année.

Le paramètre q représentant la mortalité d'un individu est déterminé en fonction des tables de mortalité. A titre d'exemple, il varie entre 10^{-4} et 10^{-3} pour des individus entre 5 et 60 ans.

Nous nous intéressons dans la suite à l'effet que peut avoir la mutualisation dans un tel modèle.

Prenons les valeurs $q = 10^{-3}$ et $c = 1$. Nous observons que l'intervalle de confiance pour S associé à une certaine probabilité dépend fortement de K. Par exemple pour une probabilité $1 - 10^{-4}$, l'intervalle de confiance pour S est $[0, 6]$ pour $K = 1000$ alors que cet intervalle de confiance est $[0, 24]$ pour $K = 10000$.

Il est également possible de calculer la probabilité de ruine. Fixons par exemple $R = 1$ et $\alpha = 0,5$. En utilisant la formule $P_{ruine} = \mathbb{P}(S > (1 + \eta)\mathbb{E}[S] + \frac{R}{\alpha})$, nous obtenons les résultats suivants.

— Pour $K = 1000$ et $\eta \in]0, 1[$, $P_{ruine} \approx 1,89 \times 10^{-2}$.
— Pour $K = 10000$ et $\eta = 0,1$ $P_{ruine} \approx 1,35 \times 10^{-1}$.
— Pour $K = 10000$ et $\eta = 0,5$ $P_{ruine} \approx 1,42 \times 10^{-2}$.
— Pour $K = 10000$ et $\eta = 0,9$ $P_{ruine} \approx 6,94 \times 10^{-4}$.

On constate donc que pour un nombre plus élevé d'assurés, il est possible de controller plus finement cette probabilité de ruine.

Notons cependant que la décroissance de la probabilité de ruine avec K n'est pas vérifiée pour les petites valeurs de η. Cela vient de l'effet de la valeur R/α. En effet, pour garder une probabilité stable avec K, il faut que cette quantité évolue proportionnellement à K. C'est ce que font en pratique les assureurs.

Il faut également noter qu'en admettant un certain niveau différent de zéro pour la probabilité de ruine, cette dernière est susceptible de se produire. Il faut donc calculer quel sera le montant non indemnisé par l'assureur C_{ruine}. En utilisant la formule $C_{ruine} = \alpha\left(\frac{\mathbb{E}[S|S>s]}{s} - 1\right)$ nous obtenons les valeurs suivantes.

— Pour $K = 1000$, $s = 3,5$ et $\alpha = 0,5$ nous obtenons $C_{ruine} = 1,04 \times 10^{-1}$.
— Pour $K = 1000$, $s = 17$ et $\alpha = 0,5$ nous obtenons $C_{ruine} = 5,70 \times 10^{-2}$.

Nous constatons dans ce cas que pour $\eta = 0,5$ par exemple, le seuil est donné par

$$\begin{aligned} s &= (1+\eta)Kcq + R/\alpha \\ &= 1,5 \times 1000 \times 10^{-3} + 1/0,5 \\ &= 3,5 \end{aligned}$$

La ruine peut donc se produire avec une probabilité de l'ordre de $1,9\%$ et lorsqu'elle se produit en moyenne, plus de 10% de l'indemnisation n'est pas remboursée.

Chapitre 5

Nombre de sinistres

5.1 Loi binomiale, de Poisson et binomiale négative

Nous commençons par présenter les lois classiques.

Definitions et moments. Nous présentons les definitions et valeurs des moments.

• La loi binomiale $\mathcal{B}(\ell, p)$ de paramètres $p \in]0, 1[$ et $\ell \in \mathbb{N}_*$ est donnée par

$$\mathbb{P}(N = k) \quad = \quad C_\ell^k p^k (1-p)^{\ell - k} \ , \quad 0 \leq k \leq \ell \ ,$$

pour $N \sim \mathcal{B}(p, \ell)$. Sa fonction génératrice est donnée par

$$g_N(s) \quad = \quad (1 - p + ps)^\ell \ , \quad s \in \mathbb{R} \ .$$

Ses deux premiers moments sont données par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= \ell p \ , \\ \sigma^2(N) &= \ell p(1-p) \ . \end{aligned}$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} \mu_3(N) \ := \ \mathbb{E}[(N - \mathbb{E}[N])^3] &= \ell p(1-p)(1-2p) \ , \\ \gamma_1(N) \ := \ \frac{\mu(3)}{\sqrt{\sigma^2(N)}^3} &= \frac{1-2p}{\sqrt{\ell p(1-p)}} \ = \ \frac{2\sigma^2(N) - \mathbb{E}N}{\mathbb{E}N\sqrt{\sigma^2(N)}} \ . \end{aligned}$$

• La loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$ est définie par

$$\mathbb{P}(N = k) \;=\; e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}\ ,$$

où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Sa fonction génératrice est donnée par

$$g_N(s) \;=\; e^{-\lambda(1-s)}\ , \quad s \in [0,1]\ .$$

Sa moyenne et sa variance sont données par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= \lambda,\\ \sigma^2(N) &= \lambda\ .\end{aligned}$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}\mu_3(N) &= \lambda\\ \gamma_1(N) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.\end{aligned}$$

• La loi binomiale négative $\mathcal{NB}(r,p)$ de paramètres $r \in]0, +\infty[$ et $p \in]0, 1[$ est définie par

$$\mathbb{P}(N = k) \;=\; \frac{\Gamma(r+k)p^k(1-p)^r}{k!\Gamma(r)} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

où $N \sim \mathcal{NB}(r,p)$. Sa fonction génératrice est donnée par

$$g_N(s) \;=\; \left(\frac{1-p}{1-sp}\right)^r\ , \quad s \in [0,1]\ .$$

Sa moyenne et sa variance sont données par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= \frac{rp}{1-p},\\ \sigma^2(N) &= \frac{rp}{(1-p)^2}\ .\end{aligned}$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}\mu_3(N) &= \frac{rp(1+p)}{(1-p)^3}\\ \gamma_1(N) &= \frac{1+p}{\sqrt{rp}}.\end{aligned}$$

Estimation des paramètres. Considérons maintenant la réalisation d'un échantillon $(n_1, \ldots, n_K)$ IID d'une variable aléatoire N. Notons $(n_{(1)}, \ldots, n_{(K)})$ la statistique d'ordre associée et $\hat{\sigma}^2$ et $\hat{m}$ la variance et la moyenne empiriques associées.

• Pour la loi Binomiale $i.e.$ $N \sim \mathcal{B}(\ell, p)$, la méthode d'estimation des moments conduit aux estimateurs $\hat{p}_M$ et $\hat{\ell}_M$ donnés par

$$\hat{p}_M \;\; = \;\; 1 - \hat{\sigma}^2/\hat{m}$$

et $\hat{\ell}_M$ est l'entier supérieur au maximum des réalisations le plus proche de $\frac{\hat{m}^2}{\hat{m}-\hat{\sigma}^2}$. La condition d'existence d'un tel estimateur est

$$0 < \hat{\sigma}^2 < \hat{m} \; .$$

L'application de la méthode du maximum de vraisemblance conduit à maximiser la quantité

$$\prod_{k=1}^{K} C_\ell^{n_k} p^{n_k} (1-p)^{\ell - n_k} \; .$$

La condition du premier ordre en p nous donne alors

$$\hat{p}_{EMV} \;\; = \;\; \frac{\hat{m}}{\hat{\ell}_{EMV}}$$

$\hat{\ell}_{EMV}$ étant une variable entière, elle est donnée par

$$\hat{\ell}_{EMV} \in \arg \max_{\ell \geq n_{(K)}} G(\ell)$$

avec G définie par

$$G(\ell) \;\; = \;\; \prod_{k=1}^{K} C_\ell^{n_k} (\frac{\hat{m}}{\ell})^{n_k} (1 - \frac{\hat{m}}{\ell})^{\ell - n_k} \; .$$

• Pour la loi de Poisson $i.e.$ $N \sim \mathcal{B}(\lambda)$, la méthode d'estimation des moments conduit à l'estimateur donné par

$$\hat{\lambda}_M \;\; = \;\; \hat{m}$$

La condition d'existence d'un tel estimateur est

$$\hat{m} \quad > \quad 0 \; .$$

L'application de la méthode du maximum de vraisemblance conduit à maximiser la quantité

$$\prod_{k=1}^{K} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_k}}{n_k!} \; ,$$

ce qui nous donne alors

$$\hat{\lambda}_{EMV} \quad = \quad \hat{m} \; .$$

Là encore la condition d'existence est $\hat{m} > 0$.

• Pour la loi Binomiale négative $i.e.$ $N \sim \mathcal{NB}(r,p)$, la méthode d'estimation des moments conduit aux estimateurs $\hat{p}_M$ et $\hat{r}_M$ donnés par

$$\begin{aligned} \hat{p}_M \quad &= \quad 1 - \hat{m}/\hat{\sigma}^2 \\ \hat{r}_M \quad &= \quad \frac{\hat{m}^2}{\hat{\sigma}^2 - \hat{m}} \end{aligned}$$

La condition d'existence d'un tel estimateur est

$$\hat{\sigma}^2 \quad > \quad \hat{m} \; .$$

L'application de la méthode du maximum de vraisemblance conduit à maximiser la $\log$-vraisemblance donnée par

$$\sum_{k=1}^{K} \ln\Big(\frac{\Gamma(n_k + r)}{\Gamma(r)}\Big) + n_k \ln(p) + r\ln(1-p) - \ln(n_k!) \; .$$

La condition du premier ordre en p nous donne alors

$$\hat{p}_{EMV} \quad = \quad \frac{\hat{m}}{\hat{m} + \hat{r}_{EMV}} \; .$$

La condition du premier ordre sur r nous donne alors que $\hat{r}_{EMV}$ est solution de l'équation $H(r) = 0$ avec la fonction H définie par

$$H(r) \quad = \quad K \ln\Big(\frac{r}{r+\hat{m}}\Big) + \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{n_k \geq 1}\Big(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r + n_k - 1}\Big) \; , \qquad r \in]0, +\infty[\; .$$

En pratique, lorsque les estimateurs du maximum de vraisemblance ne sont pas donnés par des formule explicites, on utilise des méthodes de résolution numérique.

5.2 Loi multinomiale et test d'adéquation du χ^2

Fixons $n \geq 1$ et considérons un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires IID de loi

$$\mathbb{P}(X_i = j) \;=\; p_j \;, \quad j = 1, \ldots, k,$$

avec $p_1, \ldots, p_k$ des éléments de $]0,1[$ tels que $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Nous définissons alors pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$ la variable aléatoire N_j par

$$N_j \;=\; \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{X_i = j}$$

La loi multinomiale de paramètre $(n, p_1, \ldots, p_k)$ est la loi du k-uplet $(N_1, \ldots, N_k)$. Elle est donnée par

$$\mathbb{P}\big(N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k\big) \;=\; \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

pour tout entiers $n_1, \ldots, n_k$ tels que $n_1 + \cdots + n_k = n$. Une des propriété importante de cette loi est la convergence suivante.

Théorème 3.

$$\sum_{i=1}^k \frac{(np_i - N_i)^2}{np_i} \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} \chi^2_{k-1} \;.$$

Cette convergence nous permet de mettre en place un test d'adéquation. Pour cela fixons une probabilité de référence $(p_1, \ldots, p_k)$ à laquelle nous voulons tester l'adéquation de nos données. Nous calculons alors la statistique

$$T \;=\; \sum_{i=1}^k \frac{(np_i - N_i)^2}{np_i} \;.$$

En cas de non adéquation, cette valeur explose. Le test consiste donc à rejeter l'hypothèse d'adéquation dès que la valeur de T est trop grande (en général dès que $T > q_{\chi^2_{k-1}}(1 - \alpha)$ avec $\alpha = 5\%$).

Remarque 1. *Ce test permet également de tester l'adéquation à des lois prenant un nombre infini de valeurs telles que la loi de Poisson. Pour cela, il faut regrouper en une seule classe les points chargés par la loi qui sont supérieurs à une certaine valeur.*

5.3 Mélange de lois de Poisson

Nous donnons la définition du mélange de loi de Poisson.

Définition 13. *Soit Q une mesure de probabilité sur $]0,+\infty[$. La loi P mélange de lois de Poisson par Q notée $\mathcal{MP}(Q)$, est définie par*

$$P(\{n\}) \;=\; \int_{]0,+\infty[} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}dQ(\lambda)\ ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème de Fubini permet de vérifier que cette mesure est bien une loi de probabilité :

$$\sum_{n\geq 0}\int_{]0,+\infty[} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}dQ(\lambda) \;=\; \int_{]0,+\infty[}\Big(\sum_{n\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\Big)dQ(\lambda) \;=\; 1\ .$$

Nous donnons maintenant quelques exemples.

- Considérons le cas où Q ne charge qu'un nombre fini de points $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ avec probabilités $q_1,\ldots,q_m$. Alors

$$P(\{n\}) \;=\; \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{m} e^{-\lambda_j}\lambda_j^n q_j\ ,\quad n\in\mathbb{N}\ .$$

- Considérons le cas où Q suite une loi $\gamma(a,b)$. Dans ce cas le mélange de loi de Poisson est $\mathcal{NB}(a,\frac{1}{b+1})$. En effet, nous avons dans ce cas

$$\begin{aligned} P(\{n\}) &= \int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda}d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)}\frac{b^a}{(b+1)^{a+n}} \end{aligned}$$

  qui est bien le poids de $\{n\}$ pour la loi $\mathcal{NB}(a,\frac{1}{b+1})$

- Considérons un couple de variables aléatoires (N,Λ) telles que $\Lambda\sim Q$ et $\mathcal{L}(N|\Lambda=\lambda)=\mathcal{P}(\lambda)$. Alors $N\sim\mathcal{MP}(Q)$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N=n) &= \int_{]0,+\infty[}\mathbb{P}(N=n|\Lambda=\lambda)dQ(\lambda) \\ &= \int_{]0,+\infty[} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}dQ(\lambda)\ . \end{aligned}$$

  pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Nous avons ensuite les propriétés suivantes.

Proposition 18. *Soit* $N \sim \mathcal{MP}(Q)$ *et* $r \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$\mathbb{E}[N(N-1)\cdots(N-r)] \;=\; \int_{]0,+\infty[} \lambda^{r+1} dQ(\lambda)$$

et

$$g_N(s) \;=\; L_Q(-(1-s))$$

avec L_Q *la fonction génératrice de la loi* Q *définie par*

$$L_Q(\theta) \;=\; \int_{]0,+\infty[} e^{\lambda\theta} dQ(\lambda) \;, \quad \theta \in \mathbb{R}_- \;.$$

Démonstration. D'après l'exemple précédent, nous pouvons supposer qu'il existe une variable aléatoire Λ telle que $\Lambda \sim Q$ et $\mathcal{L}(N|\Lambda = \lambda) = \mathcal{P}(\lambda)$. Dans ce cas nous avons d'après les propriétés de la loi de Poisson

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(N-1)\cdots(N-r)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(N-1)\cdots(N-r)|\Lambda]] \\
&= \mathbb{E}[\Lambda^{r+1}] \;=\; \int_{]0,+\infty[} \lambda^{r+1} dQ(\lambda) \;.
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière, nous avons

$$g_N(s) \;=\; \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^N|\Lambda]] \;=\; \mathbb{E}[e^{-\Lambda(1-s)}] \;.$$

□

On déduit également les conséquences suivantes sur le calcul des moments.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= M_1(Z) \;, \\
\sigma^2(N) &= \sigma^2(Z) + M_1(Z) \;, \\
\mu_3(N) &= \mu_3(Z) + 3\sigma^2(Z) + M_1(Z).
\end{aligned}$$

avec Z variable aléatoire de loi Q.

5.4 Nombres de sinistres et mélange de loi de Poisson

Les mélanges de lois de Poisson permettent de modéliser les inhomogénéités du paramètre de risque comme le montre le modèle suivant.

Fixons K paramètres de risques $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et K risques pour lesquels les nombres de sinistres respectifs $N_1, \ldots, N_K$ sont des variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson : $N_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$, $k \in \{1, \ldots, K\}$. Notons N le nombre total de sinistres :

$$N \;=\; \sum_{k=1}^{K} N_k \;.$$

Fixons également une variable aléatoire κ indépendante de $N_1, \ldots, N_K$ et de loi uniforme sur $\{1, \ldots, K\}$.

Proposition 19. *La loi de N est donnée par*

$$N \;\sim\; \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{K} \lambda_k) \;.$$

La loi de N_κ est donnée par

$$N_\kappa \;\sim\; \mathcal{MP}\Big(\sum_{k=1}^{K} \delta_{\lambda_k}/K\Big)$$

Démonstration. La première égalité se montre par récurrence. Pour la seconde, nous avons par indépendance de κ et des $N_1, \ldots, N_K$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_\kappa = n) \;&=\; \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(N_k = n, \kappa = k) \\
&=\; \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^n}{n!} \;=\; \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} d\, \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \delta_{\lambda_k}(\lambda) \;.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2. *La deuxième identité signifie que le nombre de sinistres d'un risque tiré au hasard parmi un ensemble de risques poissoniens inhomogènes suit un* *mélange de lois de Poisson. Ainsi, pour un ensemble de risques, comme un portefeuille d'assurance, pouvant être considéré comme constitué par tirage au hasard parmi la totalité des risques de même nature -par exemple tous les assurés d'un pays pour ce type de risque- les nombres de sinistres pour ces risques étant poissoniens mais inhomogènes, il est raisonnable de considérer que les nombres de sinistres de cet ensemble de risques sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi un mélange de lois de Poisson.*

5.5 Modèle des fréquences liées de Delaporte

On considère dans cette section un seul risque observé à plusieurs dates $t = 1, 2, \ldots$ et on note $N(t)$ le nombre de sinistres ayant lieu à la date t. Notre but est de prédire le nombre de sinistres $N(t+1)$ ayant lieu à la date $t+1$ lorsqu'on a connaissance de $N(1), \ldots, N(t)$. Cette prédiction nous permet alors de proposer un tarif à postériori (ou tarif bonus-malus).

Le principe est le suivant : on prédit $N(t+1)$ par la quantité

$$\mathbb{E}[N(t+1)|N(1), \ldots, N(t)] .$$

On calcul ensuite la prime pure en multipliant cette quantité par le coût moyen d'un sinistre. Ainsi, l'indice de fréquence I_t défini par

$$I_t(n_1, \ldots, n_t) = \frac{\mathbb{E}[N(t+1)|N(1) = n_1, \ldots, N(t) = n_t]}{\mathbb{E}[N(t+1)]}$$

représente le rapport entre la prime pure à postériori et la prime pure classique.

Hypothèses du modèle. Le modèle des fréquences liées de Delaporte suppose qu'il existe une variable aléatoire $\Lambda \sim \gamma(a, b)$ telle que conditionnellement à $\Lambda = \lambda$ les variables aléatoires $N(1), \ldots, N(t+1)$ sont IID de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Sous cette hypothèse, nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 20. *Sous les hypothèses du modèle de Delaporte, les variables aléatoires sont identiquement distribuées de loi $\mathcal{NB}(a, \frac{1}{b+1})$ et elles sont corrélées. Le* *coefficient de corrélation ρ est donné par*

$$\rho(N(r),N(s)) \quad = \quad \frac{1}{1+\frac{\mathbb{E}[\Lambda]}{\sigma^2(\Lambda)}} \quad = \quad \frac{1}{b+1} \; .$$

pour $r,s\in\{1,\dots,t+1\}$ avec $r\neq s$. De plus l'indice de fréquence est donné par

$$I_t(n_1,\dots,n_t) \quad = \quad \frac{1+(n_1+\cdots+n_t)/a}{1+t/b} \; .$$

Démonstration. Par définition du coefficient de corrélation nous avons

$$\rho(N(r),N(s)) \quad = \quad \frac{cov(N(r),N(s))}{\sigma(N(r))\sigma(N(s))} \; .$$

D'après les hypothèses $N(1),\dots,N(t)$ sont identiquement distribuée et

$$\begin{aligned}\sigma(N(u)) \quad &= \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(u)^2|\Lambda]]-\mathbb{E}[\mathbb{E}[N(u)|\Lambda]]^2 \\ &= \quad \mathbb{E}[\Lambda+\Lambda^2]-\mathbb{E}[\Lambda]^2 \quad = \quad \mathbb{E}[\Lambda]+\sigma^2(\Lambda) \quad = \quad a/b+a/b^2\end{aligned}$$

pour tout u. En utilisant l'hypothèse d'indépendance conditionnelle nous obtenons

$$\begin{aligned}cov(N(r),N(s)) \quad &= \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(r)|\Lambda]\mathbb{E}[N(s)|\Lambda]]-\mathbb{E}[\mathbb{E}[N(r)|\Lambda]]\mathbb{E}[\mathbb{E}[N(s)|\Lambda]] \\ &= \quad \mathbb{E}[\Lambda^2]-\mathbb{E}[\Lambda]^2 \quad = \quad \sigma^2(\Lambda) \quad = \quad a/b^2 \; .\end{aligned}$$

Ceci nous donne l'expression de la correlation. Pour l'expression de l'indice de fréquence nous avons par l'hypothèse d'indépendance conditionnelle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(1)=n_1,\dots,N(r)=n_r) \quad &= \quad \mathbb{E}[\mathbb{P}(N(1)=n_1,\dots,N(r)=n_r|\Lambda)] \\ &= \quad \mathbb{E}[\mathbb{P}(N(1)=n_1|\Lambda)\dots\mathbb{P}(N(r)=n_r|\Lambda)] \\ &= \quad \frac{1}{n_1!\cdots n_r!}\mathbb{E}\big[e^{-r\Lambda}\Lambda^{n_1+\cdots+n_r}\big] \; .\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[N(t+1)|N(1)=n_1,\dots,N(t)=n_t] \quad = \quad \sum_{k\geq 0} k\frac{\Gamma(a+n_1+\ldots+n_t+k)}{k!\Gamma(a+n_1+\ldots+n_t)}\Big(1-\frac{1}{b+t+1}\Big)^{a+n_1+\cdots+n_t}\Big(\frac{1}{b+t+1}\Big)^k$$

On reconnais la moyenne d'une loi $\mathcal{NB}(a+n_1+\cdots+n_t,\frac{1}{b+t+1})$ et

$$\mathbb{E}[N(t+1)|N(1)=n_1,\dots,N(t)=n_t] \quad = \quad \frac{a+n_1+\ldots+n_t}{b+t} \; .$$

De même, nous obtenons $\mathbb{E}[N(t+1)]=a/b$, ce qui donne le résultat. $\square$

Chapitre 6

Lois composées et modèle collectif

Le but de ce chapitre est de présenter et d'étudier les propriétés d'une classe de lois contenant les lois de sinistres cumulés dans le modèle collectif.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$ représentant le coût d'un sinistre, $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité, F_X sa fonction de répartition, f_X sa densité par rapport à une mesure lorsqu'elle existe et L_X sa fonction génératrice des moments.

On note aussi N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ représentant le nombre de sinistres d'un ensemble de risques, $\mathbb{P}_N = (p_n, n \in \mathbb{N})$ sa loi de probabilité, et g_N sa fonction génératrice.

6.1 Définition d'une loi composée, loi d'un modèle collectif

Définition 14. *Une loi P sur $[0, +\infty[$, de fonction de répartition F est une loi composée si elle vérifie :*

$$F = \sum_{n\geq 1} p_n F_X^{\otimes n}$$

pour deux variables aléatoires N et X. Cette loi est alors notée $\mathcal{LC}(\mathbb{P}_N, \mathbb{P}_X)$.

Il est également possible de calculer la fonction de répartition du montant cumulé des sinistres S d'un modèle collectif en fonction de la fonction de répartition

F_Y des Y_k et de la loi de N.

Proposition 21. *Soit $N, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1, X_2, \ldots$ soient IID de loi $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors la variable $\sum_{n=1}^{N} X_k$ suit une loi $\mathcal{LC}(\mathbb{P}_N, \mathbb{P}_X)$. En particulier dans le modèle collectif de risque N, $(Y_k)_{k\geq 1}$, avec montant cumulé des sinistres $S = Y_1 + \ldots + Y_N$ nous avons*

$$F_S = \sum_{n\geq 1} p_n F_Y^{\otimes n} \tag{6.1}$$

6.2 Densité, moments et fonction génératrice d'une loi composée

Proposition 22. *Soit $N, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1, X_2, \ldots$ soient IID de loi $\mathbb{P}_X$. Posons*

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_k .$$

(i) La fonction génératrice de S est donnée par

$$L_S(\theta) = g_N(L_X(\theta)) , \quad \theta \in]-\infty, 0] .$$

(ii) Si $\mathbb{E}[N] < \infty$ et $\mathbb{E}[X] < \infty$ alors

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] .$$

(iii) Si $\mathbb{E}[N^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors

$$\sigma^2(S) = \mathbb{E}[N]\sigma^2(X) + \sigma^2(N)\mathbb{E}[X]^2 .$$

(iv) Si $\mathbb{E}[N^3] < \infty$ et $\mathbb{E}[X^3] < \infty$ alors

$$\mu_3[S] = \mathbb{E}[N]\mu_3[X] + 3\sigma^2(N)\mathbb{E}[X]\sigma^2(X) + \mu_3(N)\mathbb{E}[X]^3 .$$

Remarque 3. *Lorsque la loi $\mathbb{P}_X$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[$, il n'en est pas de même pour la loi composée $\mathcal{LC}(\mathbb{P}_N,\mathbb{P}_X)$ lorsque $\mathbb{P}(N=0)>0$ (ce qui est la situation générale en assurance). En effet, on a*

$$\mathbb{P}(S=0) \quad \geq \quad \mathbb{P}(N=0) \quad > \quad 0 \; .$$

On peut en revanche répondre par l'affirmative dans le cas discret.

Proposition 23. *Supposons que la loi $\mathbb{P}_X$ admet une densité f_X par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Alors S admet une densité f_S par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ qui est donnée par*

$$f_S(k) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n f_X^{\otimes n}(k) \; , \quad k\in\mathbb{N} \; .$$

6.3 Loi de type Poisson composé

Nous considérons maintenant une composition particulière faisant intervenir la loi de Poisson. Nous notons dans a suite $\mathcal{PC}(\lambda,\mathbb{P}_X)$ pour $\mathcal{LC}(\mathcal{P}(\lambda),\mathbb{P}_X)$.

Proposition 24. *Pour $\lambda\in]0,+\infty[$ et $\mathbb{P}_X$ admettant une densité f_X par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, la loi $\mathcal{PC}(\lambda,\mathbb{P}_X)$ admet pour densité*

$$f_{\mathcal{PC}(\lambda,\mathbb{P}_X)}(k) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} f_X^{\otimes n}(k) \; , \quad k\in\mathbb{N} \; .$$

Nous passons aux moments de cette loi.

Proposition 25. *La fonction génératrice de $\mathcal{PC}(\lambda,\mathbb{P}_X)$ est donnée par*

$$L_{\mathcal{PC}(\lambda,\mathbb{P}_X)}(\theta) \quad = \quad \exp\big(-\lambda(1-L_X(\theta)\big) \; , \quad \theta\in]-\infty,0] \; .$$

Nous pouvons également en déduire les premier moments de cette loi à partir des résultats de la section précédente :

(i) La fonction génératrice de S est donnée par

$$L_S(\theta) \quad = \quad g_N(L_X(\theta)) \; , \quad \theta\in]-\infty,0] \; .$$

(ii) Si $\mathbb{E}[X] < \infty$ alors

$$\mathbb{E}[S] \quad = \quad \lambda \mathbb{E}[X] \; .$$

(iii) Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors

$$\sigma^2[S] \quad = \quad \lambda \sigma^2(X) + \lambda \mathbb{E}[N^2] \; .$$

(iv) Si $\mathbb{E}[X^3] < \infty$ alors

$$\mu_3[S] \quad = \quad \lambda \mathbb{E}[X^3] \; .$$

Nous nous intéressons maintenant à la propriété d'addition et de décomposition des risques que possède les lois de type poisson composées.

Proposition 26. *Considérons deux risques de montants des sinistres cumulés S_1 et S_2. Supposons que S_1 et S_2 sont indépendant et que*

$$S_i \quad \sim \quad \mathcal{PC}(\lambda_i, F_i) \; , \quad i \in \{1, 2\} \; ,$$

où F_1 et F_2 désignent des fonctions de répartitions. Alors le cumul des sinistres $S = S_1 + S_2$ suit également une loi de Poisson composée donnée par

$$S \quad \sim \quad \mathcal{PC}\Big(\lambda_1 + \lambda_1, \frac{\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\Big)$$

Démonstration. Calculer la fonction génératrice de $S_1 + S_2$. $\square$

Les résultats suivants nous donne des propriétés des sinistres par catégories de populations dans le cas d'un modèle collectif.

Proposition 27. *Considérons une variable aléatoire $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Supposons que $N = N_1 + \cdots + N_m$ où $\mathcal{L}((N_1, \ldots, N_m)|N = n) = \mathcal{M}(n, q_1, \ldots, q_m)$. Alors les variables aléatoires $(N_1, \ldots, N_m)$ sont indépendantes de loi $N_i \sim \mathcal{P}(\lambda q_i)$ pour $i = 1, \ldots, m$*

Démonstration. Fixons $n_1, \ldots, n_m$ et posons $n = n_1 + \cdots + n_m$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 = n_1 \ldots, N_m = n_m) &= \mathbb{P}(N_1 = n_1 \ldots, N_m = n_m | N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \frac{(n_1 + \cdots + n_m)!}{n_1! \cdots n_m!} q_1^{n_1} \cdots q_m^{n_m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n_1 + \cdots + n_m}}{(n_1 + \cdots + n_m)!} \\
&= \prod_{k=1}^{m} e^{-\lambda q_k} \frac{(\lambda q_k)^{n_k}}{n_k!} \; .
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $(N_1, \ldots, N_m)$ sont donc indépendantes de loi $N_i \sim \mathcal{P}(\lambda q_i)$ pour $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Application : cas d'une franchise. Lorsqu'une franchise est prévu dans le contrat, l'assureur couvre l'intégralité du dommage uniquement s'il excède le montant de cette franchise. Dans le cas où cette franchise est de niveau κ et que le montant du sinistre est représenté par une variable aléatoire X et le montant de l'indemnité est représenté par la variable aléatoire Y donnée par

$$Y = X\mathbb{1}_{X \geq \kappa} .$$

Dans ce cas, deux types de sinistres apparaissent. En supposant que le nombre N de sinistres suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, s'il y a indépendance mutuelle entre le nombre et les coûts des sinistres, le nombre $\tilde{N}$ de sinistres déclarés (donnant lieu à une indemnisation) suit une loi $\mathcal{P}(\lambda q)$ où q est la probabilité pour qu'un sinistre dépasse la franchise κ : $q = \mathbb{P}(X \geq \kappa)$.

Chapitre 7

Approximation de la probabilité de ruine dans le modèle collectif

7.1 Approximation de la probabilité de ruine

En général, l'assureur ne connaît pas précisément la loi déterminant sa probabilité de faire défaut. Il est intéressant pour lui d'approcher cette loi. Considérons une famille de lois de probabilité $\{\mathbb{P}_\theta \ : \ \theta \in \Theta\}$ sur $\mathbb{R}$ à laquelle sera associée la famille de fonctions de répartition $\{F_\theta \ : \ \theta \in \Theta\}$ définies par

$$F_\theta(x) \quad = \quad \mathbb{P}_\theta(]-\infty, x]) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Lorsqu'elles existent la moyenne et la variance de $\mathbb{P}_\theta$ seront respectivement notées m_θ et σ_θ^2.

Etant donnée une fonction de répartition F et une classe de fonction $\mathcal{H}$, il est naturel de recherché l'élément de la famille $\{F_\theta \ : \ \theta \in \Theta\}$ le plus proche de F au sens où il est solution du problème

$$\inf_{\theta \in \Theta} \left(\sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x) dF_\theta(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x) \right| \right) \ . \tag{7.1}$$

Dans le cas où $\Theta \subset \mathbb{R}^2$, F est la fonction de répartition d' une loi de probabilité admettant un moment d'ordre 2 et $\mathcal{H}$ est l'ensemble des polynômes de degrés 2, ce problème se ramène à un calcul de moment comme le montre la proposition suivante.

Proposition 28. *Soit une fonction de répartition F de moyenne m et de variance σ^2 finie et non nulle. Pour $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions polynômes de degré 2 sur $\mathbb{R}$, le problème* (7.1) *admet une solution unique telle que l'infimum est nul si et seulement si le système $m_\theta = m$ et $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$ admet une unique solution.*

Démonstration. Fixons une fonction h de la forme

$$h(x) \;=\; ax^2 + bx + c\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

avec a, b et c des constantes réelles. Nous avons alors

$$\inf_{\theta\in\Theta}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}}\left|\int_{\mathbb{R}} h(x)dF_\theta(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)dF(x)\right|\right) \;=$$
$$\inf_{\theta\in\Theta}\left(\sup_{a,b\in\mathbb{R}}\left|a(\sigma_\theta^2 - \sigma^2 + m_\theta^2 - m^2) + b(m_\theta - m)\right|\right)\,.$$

En prenant $a = 0$ et $b = 1$ puis $a = 1$ et $b = 0$, cette quantité est nulle si et seulement si $m = m_\theta$ et $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$. $\square$

Nous sous intéressons maintenant à deux approximations par des familles de lois particulières : les lois normale et gamma.

Approximation normale. Pour un réel m et un réel strictement positif σ^2 la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est la loi de fonction de répartition $f_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}$ donnée par

$$F_{\mathcal{N}(\mu,\nu^2)}(y) \;=\; \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\nu^2}} dx$$

Toujours dans le cas où la famille $\mathcal{H}$ est l'ensemble des polynômes de degré 2, nous avons le résultat suivant.

Proposition 29. *Pour la famille de lois normale $\{F_{\mathcal{N}(\mu,\nu^2)} \;:\; (\mu,\nu^2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\}$, le système $m_\theta = m$ et $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$ admet une unique solution dès que $\sigma^2 > 0$. Cette solution est donnée par*

$$\mu \;=\; m \quad \textit{et} \quad \sigma^2 \;=\; \nu^2\,.$$

*L'approximation obtenue est appelée **approximation normale de la fonction de répartition** F.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 28 au cas d'une famille de lois normales. □

Cette approximation est alors utile pour approcher la probabilité de ruine.

Définition 15. *Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S, de prime pure $\mathbb{E}[S]$ et de variance $\sigma^2(S)$ finie et non nulle. Lorsqu'un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha \in]0, 1]$ sont appliqués, **l'approximation normale de la probabilité de ruine** est donnée par*

$$P_{ruine} \approx 1 - \Phi\left(\frac{\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\sigma^2(S)}}\left(\eta + \frac{R}{\alpha\mathbb{E}[S]}\right)\right)$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Approximation gamma. Pour deux réels a et b strictement positifs la loi normale $\gamma(a, b)$ est la loi de fonction de répartition donnée par

$$F_{\gamma(a,b)}(x) = \int_0^{\max\{0,x\}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-by} dy , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$.

Toujours dans le cas où le famille $\mathcal{H}$ est l'ensemble des polynômes de degré 2, nous avons le résultat suivant.

Proposition 30. *Pour la famille de lois gamma $\{\gamma(a, b) : (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\}$, le système $m_\theta = m$ et $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$ admet une unique solution dès que $m > 0$ et $\sigma^2 > 0$. Cette solution est donnée par*

$$a = \frac{m^2}{\sigma^2} \quad \textit{et} \quad b = \frac{m}{\sigma^2} .$$

*L'approximation obtenue est appelée **approximation gamma de la fonction de répartition** F.*

Démonstration. En utilisant La proposition 28 et les expressions de la moyenne et de la variance d'une loi $\gamma(a, b)$, nous obtenons $\frac{a}{b} = m$ et $\frac{a}{b^2} = \sigma^2$ ce qui donne le résultat. □

Nous déduisons également de cette approximation une approximation de la probabilité de ruine.

Définition 16. *Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S, de prime pure $\mathbb{E}[S]$ et de variance $\sigma^2(S)$ finie et non nulle. Lorsqu'un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha \in]0,1]$ sont appliqués,* ***l'approximation gamma de la probabilité de ruine*** *est donnée par*

$$P_{ruine} \approx 1 - F_{\gamma\left(\frac{\mathbb{E}[S]^2}{\sigma^2(S)}, \frac{\mathbb{E}[S]}{\sigma^2(S)}\right)}\left((1+\eta)\mathbb{E}[S] + \frac{R}{\alpha}\right).$$

Nous nous concentrons dans la suite sur l'approximation normale. Nous présentons un résultats permettant de mesurer la qualité de cette approximation.

Théorème 4 (Inégalité de de Berry-Esseen)**.** *Si $S = \sum_{k=1}^{K} X_k$ est le cumul des sinistres d'un modèle individuel à K assurés, avec les variables X_k admettant un moment d'ordre 3 fini, alors il existe une constante C telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| F_S(x) - \Phi\Big(\frac{x - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\sigma^2(S)}}\Big) \right| \leq C\gamma_1(X_1)\frac{1}{\sqrt{K}}$$

pour tout $K \in \mathbb{N}^*$.

Ce résultat est admis.

Remarque 4. *Notons que le membre de gauche de l'inégalité de de Berry-Esseen est toujours inférieur à 1. Ainsi cette inégalité n'apporte (presque) pas d'information lorsque le coefficient d'asymétrie $\gamma_1(S) = \frac{\gamma_1(X_1)}{\sqrt{K}}$ est du même ordre de grandeur que 1. Cette situation se retrouve fréquemment en assurance du fait de la forte asymétrie des lois qui y interviennent. Ainsi pour pouvoir juger de la qualité de l'approximation normale il faut d'abord calculer ou estimer le coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X_1)$.*

Nous présentons maintenant un résultat permettant d'estimer la queue de distribution et donc la probabilité de ruine.

Théorème 5 (Inégalité de Markov exponentielle)**.** *Si $S = \sum_{k=1}^{K} S_k$, avec les variables S_k i.i.d. et admettant un moment exponentiel fini $i.e.$ il existe $\theta > 0$ tel que $L_{S1}(\theta) < +\infty$. Alors, en posant*

$$h(a) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(a\theta - \ln L_{S_1}(\theta)\right), \quad a \in \mathbb{R},$$

nous avons la majoration suivante

$$\mathbb{P}(S > Ka) \quad \leq \quad e^{-Kh(a)}$$

pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $a > \mathbb{E}[S_1]$.

Démonstration. Fixons $a > \mathbb{E}[S_1]$. Notons alors que

$$h(a) \quad = \quad \sup_{\theta \in \mathbb{R}_+^*} \left(a\theta - \ln L_{S_1}(\theta) \right) \; ,$$

puisque $a\theta - \ln L_{S_1}(\theta) \leq 0$ pour $\theta \leq 0$.

Soit maintenant $\theta > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\theta S_1}] < +\infty$. Par l'inégalité de Markov appliquée à $e^{\theta S}$ nous avons

$$\mathbb{P}(S > Ka) \quad = \quad \mathbb{P}(e^{\theta S} > e^{\theta K a}) \quad \leq \quad \frac{\mathbb{E}[e^{\theta S}]}{e^{\theta K a}} \; .$$

Puisque $S = \sum_{k=1}^{K} S_k$, avec les variables S_k i.i.d. nous obtenons

$$\mathbb{P}(S > Ka) \quad \leq \quad e^{-K\left(a\theta - \ln L_{S_1}(\theta)\right)}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ dans le cas où $L_{S_1}(\theta) = +\infty$, on a $h(a) = +\infty$ et l'inégalité reste valable), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > Ka) \quad &\leq \quad \inf_{\theta \in \mathbb{R}_+^*} e^{-K\left(a\theta - \ln L_{S_1}(\theta)\right)} \\ &= \quad e^{-K \sup_{\theta \in \mathbb{R}_+^*} \left(a\theta - \ln L_{S_1}(\theta)\right)} \quad = \quad e^{-Kh(a)} \; . \end{aligned}$$

□

Remarque 5. *Le résultat précédent n'est utile que lorsque* $h^+(a) > 0$*. Par exemple lorsque* $L_P(\theta) = +\infty$ *pour tout* $\theta > 0$ *il est facile de voir que* $h^+(.) = 0$ *et le majorant est trivial puisqu'il vaut 1.*

7.2 Développement d'Edgeworth et amélioration de l'approximation normale

Théorème 6. *Considérons le modèle individuel* $S = \sum_{k=1}^{K} X_k$ *avec les variables* X_k*,* $k \geq 1$*, admettant un moment d'ordre 3 fini. Lorsque* $\mathbb{P}(X_1 \in a\mathbb{Z} + b) < 1$

pour tout a et b réels, nous avons

$$\sqrt{K}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_S(x)-\Phi\Big(\frac{x-\mathbb{E}[S]}{\sigma(S)}\Big)-\frac{\gamma_1(S)}{3!}\Big(1-\Big(\frac{x-\mathbb{E}[S]}{\sigma(S)}\Big)^2\Big)\phi'\Big(\frac{x-\mathbb{E}[S]}{\sigma(S)}\Big)\right| \;\to\; 0$$

lorsque $K \to +\infty$. Lorsqu'il existe des réels a et b tels que $\mathbb{P}(X_1 \in a\mathbb{Z}+b)=1$, et en choisissant a strictement positif et le plus grand possible, la convergence précédente reste vraie à condition de prendre le supremum sur $a\mathbb{Z}+b+a/2$ au lieu de $\mathbb{R}$.

Ce résultat est admis. Nous terminons par la présentation d'une nouvelle approximation améliorant le développement d'Edgeworth pour des valeurs extrêmes.

Définition 17. *Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S. L'**approximation normale améliorée** est donnée par*

$$F_S(x) \;\approx\; \Phi\left(\frac{-3}{\gamma_1(S)}+\sqrt{1+\frac{9}{\gamma_1(S)^2}+6\frac{x-\mathbb{E}[S]}{\gamma_1(S)\sigma(S)}}\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7.3 Algorithme de Panjer

Théorème 7. *Considérons le modèle collectif $S=\sum_{k=1}^{N} Y_k$, avec $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ et les Y_k vérifiant $\mathbb{P}(Y_k \in \mathbb{N}) = 1$. Alors en notant f_S et f_Y les densités respectives de S et de Y_k par rapport à la mesure de comptage, nous avons*

$$f_S(0) \;=\; e^{-\lambda(1-f_Y(0))}$$

et

$$f_S(n) \;=\; \frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n} k f_Y(k) f_S(n-k)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. La preuve se déroule en 3 étapes. **1.** La première étape consiste à montrer que que

$$\mathbb{E}[Y_1|\sum_{k=1}^{n} Y_k = j] \;=\; \frac{j}{n}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2. La seconde étape consiste à prouver la relation

$$\mathbb{P}(Y_1 = i | \sum_{k=1}^{n} Y_k = j) \quad = \quad \frac{f_Y(i) f_Y^{\otimes(n-1)}(j-i)}{f_Y^{\otimes n}(j)}$$

3. La combinaison des deux étapes précédentes permet d'obtenir la relation de Panjer. □

L'algorithme de Panjer peut également s'utiliser lorsque les variables aléatoires Y_k admettent une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans ce cas il faut discrétiser ces variables aléatoires en choisissant un paramètre de discrétisation $\delta > 0$. On considère alors les nouvelles variables Y_k' définies par

$$Y_k' \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell \mathbb{1}_{[\delta\ell, \delta(\ell+1)[}(Y_k) \; .$$

Nous pouvons alors appliquer l'algorithme de Panjer pour trouver la densité par rapport à la mesure de comptage sur $\delta\mathbb{Z}$.

Chapitre 8

Crédibilité

8.1 Hétérogénéité des risques

Dans son portefeuille d'assurance, l'assureur souhaite en général différencier les primes qu'il demande à ses assurés. En effet, certains assurés ayant moins de sinistres que les autres risque de ne pas renouveler leurs contrats s'ils constatent qu'il payent une prime élevée par rapport à leur risque (phénomène d'antiselection). L'assureur peut donc utiliser l'historique de chaque assuré pour calculer une prime qui correspond à sont risque. C'est l'objet de la théorie de la crédibilité. Nous nous restreignons dans ce chapitre à un modèle simple où la prime à calculer est une fonction affine des sinistres passés de l'assuré. Ce modèle est dû à Hans Buhlmann et date des années 60.

8.2 Modèle de crédibilité de Buhlmann

On considère un portefeuille contenant K contrats d'assurance et on note $S_k(s)$ le montant du sinistre à la date s pour le contrat k. Le modèle de Buhmann fait les hypothèses suivantes.

Hypothèse 1. *(i) Chaque contrat k est caractérisé par un un paramètre de risque inconnu représenté par une variable aléatoire Λ_k à valeurs dans $\mathbb{R}_+$*

et les K vecteurs $\big(\Lambda_k, (S_k(n))_{n\geq 1}\big)$, $k \in \{1, \ldots, K\}$, sont indépendants et identiquement distribués.

(ii) Conditionnellement à $\Lambda_k = \lambda$, les v.a. $S_k(n)$, $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition G_λ.

(iii) Les deux premiers moments

$$\mu(\lambda) \;=\; \int_{\mathbb{R}_+} x dG_\lambda(x) \quad \textit{et} \quad \sigma^2(\lambda) \;=\; \int_{\mathbb{R}_+} (x - \mu(\lambda))^2 dG_\lambda(x)$$

existent pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Le modèle de Buhlmann propose de se limiter aux primes dépendant linéairement des sinistralités passée. Plus précisément l'assureur exigera pour le contrat k une prime à la date $t+1$ donnée par

$$c_0 + c_1 S_k(1) + \cdots + c_t S_k(t)$$

où les coefficients c_i sont choisis de manière à minimiser l'écart quadratique moyen

$$\mathbb{E}\big[(\mu(\Lambda_k) - c_0 - c_1 S_k(1) - \cdots - c_t S_k(t))^2\big] \; .$$

Afin de déterminer la prime, nous introduisons les paramètres de structure Σ^2 et M^2 définis par

$$\Sigma^2 \;=\; \mathbb{E}[\sigma^2(\Lambda_i)] \quad \text{et} \quad M^2 \;=\; \sigma^2(\mu(\Lambda_i)) \; .$$

Théorème 8. *Dans le modèle de Buhlmann, la prime p_k pour le contrat k est donnée par*

$$p_k \;=\; \alpha \mathbb{E}[S_k(1)] + (1-\alpha)\Big(\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} S_k(s)\Big)$$

où

$$\alpha \;=\; \frac{tM^2}{\Sigma^2 + M^2}$$

Démonstration. Notons $m = \mathbb{E}[\mu(\Lambda_k)]$. La condition du premier ordre nous donne

$$(1 - \sum_{s=1}^{t} c_s)m = c_0$$

et

$$\mathbb{E}\big[S_k(s)\big(\mu(\Lambda_k) - c_0 - c_1 S_k(1) - \cdots - c_1 S_k(t)\big)\big] = 0 ,$$

pour $s = 1, 2, \ldots, t$. En calculant

$$Cov(S_k(r), S_k(s)) = \mathbb{1}_{s=r}\Sigma^2 + M^2 \quad \text{et} \quad Cov(S_k(r), \mu(\Lambda_k)) = M^2$$

nous obtenons les $t + 1$ équations suivantes

$$c_0 + m \sum_{s=1}^{t} c_s = m$$

et

$$\Sigma^2 c_r + M^2 \sum_{s=1}^{t} c_s = M^2 \quad \text{pour } r = 1, \ldots, t .$$

On en déduit que $c_1 = c_2 = \cdots = c_t = \frac{M^2}{\Sigma^2 + tM^2}$ et $c_0 = m\frac{\Sigma^2}{\Sigma^2 + tM^2}$. □

8.3 Estimation des paramètres de structure

Estimation de la moyenne. Pour la police k on définit l'estimateur la moyenne $\hat{\mu}_k$ de $\mathbb{E}[S_k(1)]$ par

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} S_k(s) .$$

Estimation de Σ^2. Pour la police k on définit l'estimateur $\hat{\sigma}_k^2$ de la variance par

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{s=1}^{t} (S_k(s) - \hat{\mu}_k)^2 .$$

L'estimateur $\hat{\Sigma}^2$ de Σ^2 est alors donné par

$$\hat{\Sigma} \;=\; \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\hat{\sigma}_k^2\ .$$

Cet estimateur est non-biaisé puisque

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\hat{\Sigma}\big] \;&=\; \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\big[\hat{\sigma}_k^2\big] \;=\; \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[\hat{\sigma}_k^2\big]|\Lambda_k\big]\\ &=\; \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\big[\sigma^2(\Lambda_k)\big] \;=\; \Sigma^2\ .\end{aligned}$$

Estimation de M^2. Pour estimer M^2, nous proposons la quantité naturelle suivante

$$\frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(\hat{\mu}_k-\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell)^2\ . \tag{8.1}$$

Le calcul de l'espérance fait apparaître un biais. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(\hat{\mu}_k-\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell)^2\Big] \;&=\; \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}\sigma^2(\hat{\mu}_k)+\sigma^2\Big(\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell\Big)\\ &\quad -2\mathrm{cov}\Big(\hat{\mu}_k,\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell\Big)\end{aligned}$$

Sous les hypothèses, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sigma^2(\hat{\mu}_k) \;&=\; M^2+\frac{\Sigma^2}{t}\ ,\\ \sigma^2\Big(\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell\Big) \;=\; \mathrm{cov}\Big(\hat{\mu}_k,\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell\Big) \;&=\; \frac{1}{K-1}\Big(M^2+\frac{\Sigma^2}{t}\Big)\ ,\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(\hat{\mu}_k-\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell)^2\Big] \;=\; M^2+\frac{\Sigma^2}{t}\ .$$

On définit donc l'estimateur $\hat{M}^2$ de M^2 par

$$\hat{M}^2 \;=\; \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(\hat{\mu}_k-\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}\hat{\mu}_\ell)^2-\frac{\hat{\Sigma}^2}{t}\ .$$

Chapitre 9

Introduction à l'assurance vie

Nous présentons dans ce chapitre l'étude des contrats de type assurance vie dont il est fait référence dans le chapitre 1. Comme son nom l'indique, ce type d'assurance concerne les contrats où l'indemnisation de l'assuré dépend de son état (vivant ou décédé) à la maturité. Il s'agit donc de contrat d'assurance en cas de vie ou de décès.

L'aléa de ce type de contrat est alors la durée de vie de l'assuré qu'il faut essayer d'estimer. Cette variable peut être estimée à l'aide de variables explicatives : age, sexe, catégorie socio-professionnelle...

Une fois la durée de vie estimée, il y a une autre variable qui induit un risque. En effet, dans ce type de contrat, les échéances considérées sont longues. Le montant de l'indemnisation est alors fortement dépendant des taux d'intérêt proposés par les marchés. Ces taux sont eux aussi une source d'aléa qui engendre un risque appelé **risque de taux**.

La tarification de ce type de contrat repose alors sur deux points : la prévision du taux et la prévision de la mortalité. Dans ce chapitre nous nous intéressons uniquement à la prévision de la mortalité et nous supposons le taux d'intérêt donné.

9.1 Définition et premiers résultats

Notons T_x la durée de vie d'un individu à l'âge x $i.e.$ le temps qu'il reste à vivre à l'individu lorsque son âge est x. Ainsi T_0 est la durée de vie à la naissance. T_0 et T_x sont alors des variables aléatoires avec T_0 à valeurs dans $]0, \omega[$ où ω désigne l'âge limite (120 ans) et T_x n'est définie que sur l'ensemble $\{T_0 > x\}$.

Les calculs faisant intervenir T_x seront donc fait conditionnellement à l'évènement $\{T_0 > x\} = \{T_x > 0\}$.

Nous supposons dans la suite que T_0 satisfait les hypothèses classiques suivantes.

Hypothèse 2. *(i) T_0 admet la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.*

(ii) $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \omega[$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0] \cup [\omega, +\infty[$.

(iii) f est continue.

On note F la fonction de répartition de T_0 :

$$F(t) \;=\; \mathbb{P}(T_0 \leq t)\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Proposition 31. *La fonction de répartition F vérifie les propriétés suivantes :*

$$F(t) \;=\; \int_0^t f(x)dx\ , \quad t \in \mathbb{R}\ ,$$

F est dérivable et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0, \omega]$ et $F'(t) = 0$ pour tout $t \notin [0, \omega]$.

Théorème 9. *Soit $x \in]0, \omega[$.*

(i) Conditionnellement à $\{T_x > 0\}$, T_x admet la densité f_x donnée par

$$f_x(t) \;=\; \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}\mathbb{1}_{]0,\omega-x[}\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

(ii) La fonction de répartition F_x définie par $F_x(.) := \mathbb{P}(T_x \leq \cdot\ |T_x > 0)$ sur $\mathbb{R}_+$ est donnée par

$$F_x(t) \;=\; \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}\ , \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous avons

$$\mathbb{P}(T_x \in B \,|T_x > 0) \;=\; \mathbb{P}(T_0 - x \in B \,|T_0 > x) \;=\; \frac{\mathbb{P}(T_0 - x \in B \cap \mathbb{R}_+^*)}{\mathbb{P}(T_0 > x)}$$

Comme T_0 admet pour densité la fonction f qui est nulle sur $]-\infty, 0] \cup [\omega, +\infty[$, nous obtenons

$$\mathbb{P}(T_x \in B \,|T_x > 0) \;=\; \frac{\int_0^\omega \mathbb{1}_B(t-x) f(t)dt}{1 - F(x)} \;=\; \int_B \frac{f(x+t)\mathbb{1}_{]0,\omega-x[}(t)}{1-F(x)} dt \;,$$

ce qui nous donne l'expression attendue pour la densité. En prenant $B =]-\infty, y]$, avec $y \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$F_x(y) \;=\; \frac{\int_\infty^y f(x+t)\mathbb{1}_{]0,\omega-x[}(t)dt}{1-F(x)} \;=\; \frac{F(x+y) - F(x)}{1 - F(x)} \;.$$

□

Nous présentons maintenant des notations particulières à l'assurance vie.

Définition 18. *Le taux de survie à l'âge x pour 1 an est donné par*

$$p_x \;=\; \mathbb{P}(T_x > 1 | T_x > 0) \;.$$

Le taux de décès à l'âge x pour 1 an est donné par

$$q_x \;=\; \mathbb{P}(T_x \leq 1 | T_x > 0) \;.$$

Nous avons bien entendu $p_x + q_x = 1$. Le taux de survie s'estime en général de la façon suivante :

$$p_x \;\approx\; \frac{\text{Nombre de survivants à l'âge } x+1}{\text{Nombre de survivants à l'âge } x}$$

Ces quantités constituent ce que nous appellerons dans la suite **table de mortalité**.

Proposition 32. *Nous avons les égalités suivantes*

$$p_x \;=\; 1 - F_x(1) \;=\; \frac{1 - F(x+1)}{1 - F(x)} \;,$$
$$q_x \;=\; F_x(1) \;=\; \frac{F(x+1) - F(x)}{1 - F(x)} \;.$$

Démonstration. La première égalité est une conséquence de l'expression de la fonction de répartition conditionnelle F_x donnée par le théorème 9.1. La seconde égalité est une conséquence de la première puisque $p_x + q_x = 1$. $\square$

Nous généralisons maintenant la définition de p_x et q_x.

Définition 19. *Pour $t, x \geq 0$ tels que $t + x \leq \omega$, le taux de survie à l'âge x pour une période t est donné par*

$$_tp_x = \mathbb{P}(T_x > t | T_x > 0) \ ,$$

et le taux de décès à l'âge x pour une période t est donné par

$$_tq_x = \mathbb{P}(T_x \leq t | T_x > 0) \ .$$

Proposition 33. *Pour $x, s, t \geq 0$ tels que $x + s + t \leq \omega$ nous avons*

$$_{s+t}p_x = {_tp_x} \times {_sp_{x+t}} \ .$$

Démonstration. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} _{s+t}p_x &= \frac{\mathbb{P}(T_0 > t + s + x)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} = \frac{\mathbb{P}(T_0 > t + s + x)}{\mathbb{P}(T_0 > x + t)} \times \frac{\mathbb{P}(T_0 > x + t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \\ &= {_sp_{x+t}} \times {_tp_x} \ . \end{aligned}$$

$\square$

Définition 20. *On appelle **table de mortalité** l'ensemble $\{\ell_x, x \in \{0, \ldots, \omega\}\}$ avec ℓ_x le nombre de survivant à l'âge x dans une population dont tous les individus sont soumis aux mêmes conditions de mortalité.*

Notons que

— ℓ_x **prend des valeurs entières**,

— ℓ_x est **décroissant en** x,

— $\ell_\omega = 0$.

En général ces données sont prises pour une population de $100\ 000$ individus : $\ell_0 = 100\,000$.

Définition 21. *Le taux instantané de mortalité à l'âge x est défini par*

$$\mu_x \quad = \quad \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \le x+h)}{h\mathbb{P}(x < T_0)} \; .$$

Proposition 34. *(i)* $\mu_x = -\frac{\partial \; {}_t p_x}{\partial s}\Big|_{t=0}$.

(ii) $\mu_{x+t} = -\frac{\partial \; \ln {}_s p_x}{\partial s}\Big|_{s=t}$.

(iii) La densité de durée de vie est égale au produit de la probabilité de survie et du taux instantané de mort :

$$f_x(t) \quad = \quad {}_t p_x \times \mu_{x+t} \; .$$

(iv) ${}_t p_x = \exp\Big(- \int_x^{x+t} \mu_y dy\Big)$.

Démonstration. (i) Par définition du taux instantané de survie et en notant que ${}_0 p_x = 1$, nous avons

$$\mu_x \quad = \quad \lim_{h\downarrow 0} - \frac{{}_h p_x - {}_0 p_x}{h} \quad = \quad - \frac{\partial \; {}_t p_x}{\partial s}\Big|_{t=0} \; .$$

(ii) En utilisant la proposition 33 nous avons

$$\mu_{x+t} \quad = \quad \lim_{h\downarrow 0} - \frac{{}_h p_{x+t} - {}_0 p_{x+t}}{h} \quad = \quad -\frac{1}{{}_t p_x} \lim_{h\downarrow 0} - \frac{{}_{h+t} p_x - {}_t p_x}{h} \quad = \quad - \frac{\partial \; \ln {}_s p_x}{\partial s}\Big|_{s=t} \; .$$

(iii) Par définition de la densité f_x nous avons

$$\begin{aligned} f_x(t) \quad &= \quad \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(x+t < T_0 \le x+t+h | T_0 > x)}{h} \\ &= \quad \frac{\mathbb{P}(T_0 > x+t)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(x+t < T_0 \le x+t+h | T_0 > x+t)}{h} \\ &= \quad {}_t p_x \times \mu_{x+t} \; . \end{aligned}$$

(vi) Le résultat est une conséquence de (ii). □

Nous nous intéressons maintenant à l'espérance de la durée de vie à l'âge x.

Définition 22. *L'espérance de la durée de vie à l'âge x notée $\dot{e}_x$ est définie par*

$$\dot{e}_x \quad = \quad \mathbb{E}\big[T_x | T_x > 0\big] \; .$$

Nous avons alors les propriétés suivantes :

Proposition 35. *Pour une tête d'âge x, l'espérance de la durée de vie est donnée par*

$$\dot{e}_x = \frac{\int_0^{\omega-x} tf(x+t)dt}{1-F(x)} .$$

Démonstration. C'est une conséquence de la définition de $\dot{e}_x$ et du théorème 9. □

Nous introduisons également la durée de vie effective K_x qui est la partie entière de T_x et e_x l'espérance de vie effective définie par

$$e_x = \mathbb{E}\big[K_x | T_x > 0\big] .$$

Proposition 36. *Pour x entier, nous avons les égalités suivantes :*

$$e_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_kp_x$$

et

$$\sigma^2(K_x|T_x > 0) = 2\sum_{k=1}^{\omega-x-1} k\ {}_kp_x - e_x^2 - e_x$$

Démonstration. Par définition de K_x, nous avons

$$\begin{aligned} e_x &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}\big(k \leq T_x < k+1 | T_x > 0\big) \\ &= \sum_{k=1}^{\omega-x-1} k\ ({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_kp_x . \end{aligned}$$

Toujours en utilisant la définition de K_x nous avons

$$\begin{aligned} \sigma^2(K_x|T_x > 0) &= \mathbb{E}\big[K_x^2 | T_x > 0\big] - \mathbb{E}\big[K_x | T_x > 0\big]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\omega-x-1} k^2\ ({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) - e_x^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\omega-x-1} (2k-1)\ {}_kp_x - e_x^2 \\ &= 2\sum_{k=1}^{\omega-x-1} k\ {}_kp_x - e_x - e_x^2 . \end{aligned}$$

□

9.2 Assurance en cas de vie

On considère dans cette section un contrat d'assurance vie selon lequel l'assuré reçoit à chaque période un montant fixé au départ (pouvant éventuellement être différent à chaque date) tant qu'il est en vie. Les montants payés sont appelés **annuités viagères**.

Il existe pour ce type de contrat différentes modalités fixant les règles d'indemnisation dont voici les principales :

— le paiement de l'annuité viagère est fait par avance ou à terme échu,

— le paiement est fractionné où non,

— le paiement est différé (d'un certain nombre d'année) ou non,

— la durée du contrat.

Pour simplifier notre propos, nous supposons que le taux d'intérêt est fixé et nous le noterons i dans la suite.

Nous introduisons alors deux notions correspondants à la valeur d'indemnisation.

Définition 23. *(i) La **valeur actuelle aléatoire** notée VAA est le montant (aléatoire) actualisé de l'indemnisation reçu par une tête d'âge.*

*(ii) La **valeur actuelle probable** notée VAP est l'espérance du montant actualisé de l'indemnisation reçu par une tête d'âge.*

Nous nous limiterons dans la suite aux contrats indemnisant un montant unitaire à chaque période.

Nous considérons dans la suite deux types de contrats d'assurance vie : les contrats avec annuités payables d'avance et ceux payables à termes échus.

9.2.1 Annuités payables d'avance sur la vie entière

Contrat non différé et permanent. Dans ce type de contrat, l'assuré reçoit un montant unitaire à chaque début d'année s'il est encore en vie. Pour une tête d'âge x la VAA notée $\ddot{W}_x$ est donnée par

$$\ddot{W}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{1}{(1+i)^k} \mathbb{1}_{T_x>k} .$$

Nous en déduisons pour cette même tête d'âge, la VAP notée $\ddot{a}_x$:

$$\ddot{a}_x \;=\; \mathbb{E}[\ddot{W}_x|T_x > 0] \;=\; \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{1}{(1+i)^k}\mathbb{P}(T_x > k|T_x > 0)\ .$$

Proposition 37. *Pour une tête d'âge x, la VAP est donnée par*

$$\ddot{a}_x \;=\; \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^k {}_kp_x\ .$$

Pour une tête d'âge x, la variance de la VAA conditionnellement à $\{T_x > 0\}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\sigma^2(\ddot{W}_x|T_x > 0) \;=\; & \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{2k} {}_kp_x(1 - {}_kp_x) \\ & +2 \sum_{\substack{k_1,\,k_2\,=\,0\\ k_1\,<\,k_2}}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{k_1+k_2} {}_{k_2}p_x(1 - {}_{k_1}p_x)\ .\end{aligned}$$

Démonstration. Par définition de la VAP et du taux de survie ${}_{\cdot}p_x$, nous avons

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x \;=\; \mathbb{E}[\ddot{W}_x|T_x > 0] \;&=\; \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{1}{(1+i)^k}\mathbb{P}(T_x > k|T_x > 0) \\ &=\; \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^k {}_kp_x\ .\end{aligned}$$

La variance conditionnelle est donnée par

$$\begin{aligned}\sigma^2(\ddot{W}_x|T_x > 0) \;&=\; \mathbb{E}[\ddot{W}_x^2|T_x > 0] - \mathbb{E}[\ddot{W}_x|T_x > 0]^2 \\ &=\; \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{1}{(1+i)^k}\mathbb{1}_{T_x>k}\Big)^2\Big|T_x > 0\Big] - \Big(\sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{{}_kp_x}{(1+i)^k}\Big)^2 \\ &=\; \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{{}_kp_x}{(1+i)^{2k}} + 2 \sum_{\substack{k_1,\,k_2\,=\,0\\ k_1\,<\,k_2}}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{k_1+k_2} {}_{k_2}p_x \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{{}_kp_x{}^2}{(1+i)^{2k}} - 2 \sum_{\substack{k_1,\,k_2\,=\,0\\ k_1\,<\,k_2}}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{k_1+k_2} {}_{k_2}p_x \times {}_{k_1}p_x \\ &=\; \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{{}_kp_x(1 - {}_kp_x)}{(1+i)^{2k}} + 2 \sum_{\substack{k_1,\,k_2\,=\,0\\ k_1\,<\,k_2}}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{k_1+k_2} {}_{k_2}p_x(1 - {}_{k_1}p_x)\ .\end{aligned}$$

□

Contrat différé et temporaire. Il est également possible de considérer le contrat **différé de m année(s)** et **temporaire de n années**. Cela signifie que l'assuré est indemnisé d'un montant unitaire chaque année entre les dates m et $m+n-1$ (en fixant la date de signature du contrat en 0) tant qu'il est vivant. Il faut bien sûr imposer dans cas $m+n \leq \omega - x$.

Pour une tête d'âge x, la VAA notée ${}_{m|n}\ddot{W}_x$ est donnée par

$$ {}_{m|n}\ddot{W}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{(1+i)^k} \mathbb{1}_{T_x > k} . $$

La VAP pour cette même tête d'âge notée ${}_{m|n}\ddot{a}_x$:

$$ {}_{m|n}\ddot{a}_x = \mathbb{E}[{}_{m|n}\ddot{W}_x | T_x > 0] $$

Proposition 38. *La VAP ${}_{m|n}\ddot{a}_x$ est donnée par*

$$ {}_{m|n}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{(1+i)^k} {}_k p_x . $$

Démonstration. Par definition de la VAP, nous avons

$$ \begin{aligned} {}_{m|n}\ddot{a}_x &= \mathbb{E}[{}_{m|n}\ddot{W}_x | T_x > 0] = \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{(1+i)^k} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T_x > k} | T_x > 0] \\ &= \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{(1+i)^k} {}_k p_x . \end{aligned} $$

□

9.2.2 Annuités à terme échu sur la vie entière

Nous nous intéressons maintenant aux contrats où l'indemnisation se fait à terme échu : l'assuré ne reçoit une indemnisation pour l'année t que s'il a été vivant pendant toute l'année.

Contrat non différé et permanent. Pour une tête d'âge x la VAA notée W_x est donnée par

$$ W_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \frac{1}{(1+i)^k} \mathbb{1}_{T_x > k} = \ddot{W}_x - 1 . $$

Nous en déduisons pour cette même tête d'âge, la VAP notée a_x :

$$a_x = \mathbb{E}[W_x | T_x > 0] \ .$$

Proposition 39. *Pour une tête d'âge x, la VAP Q_x est donnée par*

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^k {}_kp_x = \ddot{a}_x - 1 \ .$$

Démonstration. La preuve est une conséquence de l'égalité $W_x = \ddot{W}_x - 1$ et de la Proposition 37. □

Contrat différé et temporaire. Il est également possible de considérer le contrat **différé de m année(s)** et **temporaire de n années** avec annuités à terme échu. Dans ce cas, la condition à vérifier est $m + n \leq \omega - x - 1$.

Pour une tête d'âge x, la VAA notée ${}_{m|n}W_x$ est donnée par

$${}_{m|n}W_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{1}{(1+i)^k} \mathbb{1}_{T_x > k} \ .$$

La VAP pour cette même tête d'âge est notée ${}_{m|n}Q_x$:

$${}_{m|n}a_x = \mathbb{E}[{}_{m|n}W_x | T_x > 0] \ .$$

Proposition 40. *Pour une tête d'âge x, nous avons la relation suivante*

$${}_{m|n}a_x = {}_{m+1|n}\ddot{a}_x = {}_{m|n}\ddot{a}_x - {}_mp_x \frac{1}{(1+i)^m} + {}_{m+n}p_x \frac{1}{(1+i)^{m+n}} \ .$$

Démonstration. La preuve est une conséquence des expressions de ${}_{m|n}\ddot{W}_x$ et de ${}_{m|n}W_x$. □

9.3 Assurance en cas de décès

Dans ce type de contrat l'assureur s'engâge à payer un capital unité au décès de l'assuré. Il s'agit donc d'un paiement à terme échu. Nous supposons dans cette section que les paiements de l'assureur sont effectués au milieu de l'année de décès de l'assuré (il s'agit d'une convention utilisée en France).

Contrat permanent et non différé. Dans ce type de contrat la VAA pour une tête d'âge x, notée W_x, prend la forme suivante :

$$W_x \;=\; \sum_{j=0}^{\omega-x-1} \mathbb{1}_{j<T_x\leq j+1}\big(\frac{1}{1+i}\big)^{j+\frac{1}{2}} \;=\; \big(\frac{1}{1+i}\big)^{K_x+\frac{1}{2}} \;.$$

La VAP pour une tête d'âge x est notée A_x :

$$A_x \;=\; \mathbb{E}[W_x|T_x>0] \;.$$

Proposition 41. *Pour une tête d'âge x, la VAP est donnée par :*

$$A_x \;=\; \sum_{j=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{j+\frac{1}{2}} {}_jp_x\; q_{x+j} \;.$$

On en déduit également l'expression de sa variance

$$\sigma^2(W_x|T_x>0) \;=\; \sum_{j=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{(1+i)^2}\Big)^{j+\frac{1}{2}} {}_jp_x\; q_{x+j} - A_x^2 \;.$$

Démonstration. Par définition de la VAP nous avons

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{j+\frac{1}{2}} \mathbb{P}(j<T_x\leq j+1|T_x>0) \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{j+\frac{1}{2}} \;\mathbb{P}(j<T_x|T_x>0)\;\mathbb{P}(T_x\leq j+1|T_{x+j}>0) \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x-1} \Big(\frac{1}{1+i}\Big)^{j+\frac{1}{2}} {}_jp_x\; q_{x+j} \;.
\end{aligned}$$

Pour la variance, nous avons

$$\sigma^2(W_x|T_x>0) \;=\; \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{(1+i)^2}\Big)^{K_x+\frac{1}{2}}\Big] - A_x^2 \;.$$

En remplaçant $(1+i)$ par $(1+i)^2$ dans le calcul de A_x, nous obtenons l'expression attendue. □

Contrat temporaire et différé. Il est également possible de considérer comme dans la section précédente un contrat différé de m année(s) et périodique de n

année(s). Dans ce type de contrat la VAA pour une tête d'âge x, notée ${}_{m|n}W_x$, prend la forme suivante :

$$ {}_{m|n}W_x \; = \; \mathbb{1}_{m<T_x\leq m+n+1}\big(\frac{1}{1+i}\big)^{K_x+\frac{1}{2}} \, . $$

La VAP notée ${}_{m|n}A_x$ pour une tête d'âge x est alors donnée par :

$$ {}_{m|n}A_x \; = \; \mathbb{E}[{}_{m|n}W_x|T_x > 0] \, . $$

Proposition 42. *Pour une tête d'âge x, la VAP est donnée par :*

$$ {}_{m|n}A_x \; = \; \sum_{j=m}^{m+n}\big(\frac{1}{1+i}\big)^{j+\frac{1}{2}} \; {}_jp_x \; q_{x+j} \, . $$

Démonstration. *Par définition de la VAP nous avons*

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}A_x &= \sum_{j=m}^{m+n}\mathbb{P}(j\leq T_x<j+1|T_x>0)\big(\frac{1}{1+i}\big)^{j+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{j=m}^{m+n}\big(\frac{1}{1+i}\big)^{j+\frac{1}{2}}\mathbb{P}(j<T_x|T_x>0)\;\mathbb{P}(T_x\leq j+1|T_{x+j}>0) \\
&= \sum_{j=m}^{m+n}\big(\frac{1}{1+i}\big)^{j+\frac{1}{2}} \; {}_jp_x \; q_{x+j} \, .
\end{aligned}
$$

□

Remarque 6. *Il est aussi possible de considérer des contrats mixtes où l'individu est indemnisé s'il décède ou non.*

9.4 Provisions

Une provision mathématique est une provision de numéraire nécessaire à la couverture d'un engagement pris par un assureur vis à vis des assurés ayant souscrit un contrat d'assurance vie. Le calcul des provisions est donc très important pour l'assureur. Notons que ce calcul est encadré par la règlementation.

Considérons alors un individu d'âge x ayant souscrit un contrat temporaire de n années. Nous cherchons à calculer la provision mathématique de l'année k pour $k \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Notons Π la prime pure unique et P la prime pure annuelle payable tant que l'assuré est vivant. Nous avons alors la relation :

$$P\ {}_n\ddot{a}_x \ = \ \Pi\ ,$$

où pour simplifier nous avons noté ${}_n\ddot{a}_x$ pour ${}_{0|n}\ddot{a}_x$ $i.e.$ la VAP du contrat non différé.

La quantité Π est aussi appelée **prime actuariellement juste** puisqu'elle correspond à la prime qui permet d'équilibrer les comptes en moyenne.

Fixons maintenant $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, et décomposons le temps en deux périodes :

— période I entre 0 et k,

— période II après k.

En notant Π_I et Π_{II} les primes périodiques respectives nous avons :

$$\Pi_I \ = \ P\ {}_k\ddot{a}_x \quad \text{et} \quad \Pi_{II} \ = \ P\ {}_{k|n-k}\ddot{a}_x$$

Si bien que $\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}$.

Notons E l'engagement total de l'assureur $i.e.$ le montant actualisé de l'indemnisation totale et E_I et E_{II} l'engagement de l'assureur ($i.e.$ la quantité moyenne de l'indemnisation) sur les périodes I et II. Nous avons alors $E_I \ = \ {}_k\ddot{a}_x$ et $E_{II} = {}_{k|n-k}\ddot{a}_x$.

Pour équilibrer son exercice l'assureur doit vérifier que les primes reçues couvrent sont engagement, ce qui se traduit par la condition

$$\Pi \ = \ E\ .$$

Dans le cas des primes sur les périodes I et II, l'égalité entre la prime actualisée et l'engagement n'est plus satisfaite du fait que **la mortalité n'est pas constante au cours du temps**. En particulier, l'assureur va demander une prime Π_I supérieure à son engagement E_I sur la période I et une prime Π_{II} inférieure à son engagement $\mathbb{E}_{II}$ sur la période II. Notons alors que l'égalité $\Pi = E$ impose

$$\Pi_I - E_I \ = \ E_{II} - \Pi_{II}\ .$$

Cette quantité est appelée **provision mathématique de l'année k vue l'année 0**

Bibliographie

[1] B. Denuit et A. Charpentier (2010) Mathématiques de l'assurance non-vie I. *Economica*.

[2] B. Denuit et A. Charpentier (2010) Mathématiques de l'assurance non-vie II. *Economica*.

[3] C. Hess (2000) Méthodes actuarielles de l'assurance vie. *Economica*.

[4] S. Loisel (2002) Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine, *Troisème année ISFA*.
`http://isfaserveur.univ-lyon1.fr/~stephane.loisel/poly3a-temp.pdf`

[5] D. Pierre-Loti-Viaud (2008) Actuariat Introduction. *Notes de cours*.

[6] D. Pierre-Loti-Viaud et P. Boulongne (2014) Mathématique de l'assurance, premiers éléments. *Ellipse*, 56 (6), 1907-1911.