Cours de Processus à sauts
Master 2 MASEF
Université Paris-Dauphine

Examen
Lundi 15 Janvier 2018
2h - documents non autorisés

Exercice I

Soit X un processus de Poisson composé d'intensité de saut $\lambda > 0$ et de loi de saut ν (ν étant une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$).

1. Quel est le triplet caractéristique de X ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}(X_t \geq 0, \forall t \geq 0) = 1$.
3. On suppose à présent que $\nu = \delta_a$ pour un certain $a > 0$. Trouver $c \in \mathbb{R}$ tel que le processus $(\exp(X_t + ct), t \geq 0)$ soit une martingale.
4. Toujours sous l'hypothèse $\nu = \delta_a$, résoudre explicitement l'équation différentielle $dS_t = S_{t-}dX_t$ partant de $S_0 > 0$.

Exercice II

Soit X un surbordinateur de drift nul, c'est-à-dire un subordinateur qui ne fait que des sauts. On note sa mesure de Lévy ν et l'on suppose que $\int_{(0,\infty)} x\nu(dx) = 1$. On introduit

$$\psi(q) := \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx})\nu(dx) ,$$

et l'on rappelle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[e^{-qX_t}] = e^{-t\psi(q)}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X_1] = 1$ et que $\lim_{q\to\infty} q^{-1}\psi(q) = 0$.
2. Montrer que presque sûrement $\lim_{t\to\infty} X_t/t = 1$. (Indication : on pourra commencer par considérer $t \in \mathbb{N}$.)
3. On pose $F(q) = q - \psi(q)$, $q \geq 0$. Montrer que F est une fonction bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

4. On pose $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction réciproque de F. Montre que pour tout $q \geq 0$ on a :
$$K(q) - q = \psi(K(q)) ,$$
puis déduire des questions précédentes que $\lim_{q\to\infty} q^{-1}K(q) = 1$.

5. Montrer que $Y_t = t - X_t$ est un processus de Lévy et déterminer $\mathbb{E}[e^{qY_t}]$ pour $q \geq 0$.

6. Montrer que $(\exp(K(q)Y_t - qt), t \geq 0)$ est une martingale dès que $q > 0$, et déterminer sa limite quand $t \to \infty$.

7. Pour tout $x \geq 0$, on introduit le temps d'atteinte $T_x := \inf\{t \geq 0 : Y_t > x\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Expliquer pourquoi $Y_{T_x} = x$ sur l'événement $\{T_x < \infty\}$ puis montrer que l'on a pour tout $q > 0$:
$$\mathbb{E}[\exp(-qT_x)] = \exp(-xK(q)) .$$

8. En déduire que $\mathbb{P}(T_x < \infty) = 1$ pour tout $x \geq 0$ puis montrer que $(T_x, x \geq 0)$ est un subordinateur dont on précisera l'exposant de Laplace.

Exercice III

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère l'actif risqué S suivant :
$$S_t := S_0 e^{X_t} , \quad t \geq 0 ,$$
où X est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}$. On travaille sur l'intervalle de temps $[0, T]$ avec $0 < T < \infty$ déterministe. On notera $r > 0$ le taux d'intérêt sans risque, et $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$ la valeur actualisée de l'actif risqué.
On suppose que sous la mesure $\mathbb{P}$, X est un processus de Lévy de triplet caractéristique (b, σ^2, ν) avec $\sigma = 0$ et tel que ν est de la forme suivante :
$$\nu = \alpha\delta_u + \beta\delta_v ,$$
avec $1 < u < v$ et $\alpha, \beta > 0$.

1. Rappeler la décomposition de Lévy-Itô de X. A quelle condition sur b le processus X est-il une martingale ?

2. Identifier l'ensemble des mesures $\mathbb{Q}$ équivalentes à $\mathbb{P}$ et sous lesquelles X est encore un processus de Lévy.

3. A quelle condition sur b l'une des mesures $\mathbb{Q}$ identifiées à la question précédente définit-elle une mesure risque neutre ?

4. On suppose la condition sur b vérifiée. Peut-on affirmer que le marché financier considéré est complet ?

Cours de Processus à sauts
Master 2 MASEF
Université Paris-Dauphine

Exam
Monday 15th January 2018
2h - no lecture notes allowed

Exercice I

Let X be a compound Poisson process with jump intensity $\lambda > 0$ and whose jumps have law ν (ν is a probability measure on $\mathbb{R}$).

1. What is the characteristic triplet of X ?
2. Provide a necessary and sufficient condition to have $\mathbb{P}(X_t \geq 0, \forall t \geq 0) = 1$.
3. We now assume that $\nu = \delta_a$ for some $a > 0$. Find $c \in \mathbb{R}$ such that the process $(\exp(X_t + ct), t \geq 0)$ is a martingale.
4. Under the assumption $\nu = \delta_a$, solve explicitly the differential equation $dS_t = S_{t-} dX_t$ starting from $S_0 > 0$.

Exercise II

Let X be a surbordinator without drift, that is, a subordinator that only makes jumps. We denote by ν its Lévy measure and we assume that $\int_{(0,\infty)} x\nu(dx) = 1$. We define

$$\psi(q) := \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-qx})\nu(dx) ,$$

and we recall that for all $t \geq 0$, $\mathbb{E}[e^{-qX_t}] = e^{-t\psi(q)}$.

1. Show that $\mathbb{E}[X_1] = 1$ and that $\lim_{q\to\infty} q^{-1}\psi(q) = 0$.
2. Show that almost surely:
$$\lim_{t\to\infty} X_t/t = 1 ,$$
Hint : one can start with the case $t \in \mathbb{N}$.
3. We set $F(q) = q - \psi(q)$, $q \geq 0$. Show that F is a bijection from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}_+$.

4. We set $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ the reciprocal of F. Show that for all $q \geq 0$ we have:

$$K(q) - q = \psi(K(q)) \ ,$$

and then deduce from previous questions that $\lim_{q\to\infty} q^{-1}K(q) = 1$.

5. Show that $Y_t = t - X_t$ is a Lévy process and determine $\mathbb{E}[e^{qY_t}]$ for all $q \geq 0$.

6. Show that $(\exp(K(q)Y_t - qt), t \geq 0)$ is a martingale as soon as $q > 0$, and determine its limit when $t \to \infty$.

7. For every $x \geq 0$, we introduce the hitting time $T_x := \inf\{t \geq 0 : Y_t > x\}$, with the usual convention $\inf \emptyset = +\infty$. Explain why $Y_{T_x} = x$ on the event $\{T_x < \infty\}$ and then show that we have for every $q > 0$:

$$\mathbb{E}[\exp(-qT_x)] = \exp(-xK(q)) \ .$$

8. Deduce from the previous questions that $\mathbb{P}(T_x < \infty) = 1$ for every $x \geq 0$, show that $(T_x, x \geq 0)$ is a subordinator and give its Laplace exponent.

Exercise III

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space. We consider the asset S defined by:

$$S_t := S_0 e^{X_t} \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

where X is a process taking values in $\mathbb{R}$. We work on the interval of time $[0, T]$ with $0 < T < \infty$ non-random. We let $r > 0$ be the interest rate, and $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$ be the discounted value of the asset.

We assume that under measure $\mathbb{P}$, X is a Lévy process with characteristic triplet (b, σ^2, ν) with $\sigma = 0$ and such that ν takes the form:

$$\nu = \alpha\delta_u + \beta\delta_v \ ,$$

with $1 < u < v$ and $\alpha, \beta > 0$.

1. Write the Lévy-Itô decomposition of X. Under what condition on b is the process X a martingale ?

2. Identify all the measures $\mathbb{Q}$ which are equivalent to $\mathbb{P}$ and under which X is again a Lévy process.

3. Under what condition on b one of these measures $\mathbb{Q}$ defines a risk-neutral probability measure?

4. Assume that this condition on b is satisfied. Can we say that the financial market is complete?