Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Mars 2012, Partiel. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés

Exercice 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient $p \in]1, +\infty[$ et p' son exposant conjugué, c'est-à-dire l'unique élément de $]1, +\infty[$ satisfaisant $1/p + 1/p' = 1$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^{p'}(\Omega)$. On suppose qu'il existe $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ tels que

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \text{et} \quad g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \text{ dans } L^{p'}(\Omega). \tag{0.1}$$

1. Montrer que la fonction fg, ainsi que les fonctions $f_n g_n$ avec $n \in \mathbb{N}$, sont dans $L^1(\Omega)$.
2. Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction fg dans $L^1(\Omega)$.
3. On suppose dans cette question que Ω est borné. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\Omega)$, et que f_n converge vers f dans $L^1(\Omega)$.
4. Soit $q \in]1, \infty[$ avec $q \neq p$. On suppose, en plus de (0.1), que pour tout n, $f_n \in L^q(\Omega)$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^q(\Omega)$. Montrer que f_n converge vers f dans $L^q(\Omega)$ et que $f \in L^q(\Omega)$.

Exercice 2. On pose, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n(x) = \frac{1}{2n}\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et que $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $L^1(\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x) - I\alpha_n(x)$ où $I = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy$. Montrer que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. On pose
$$A = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0 \right\}.$$
Montrer que A est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. On cherche à trouver toutes les fonctions $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *intégrables* qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$\Phi(2x) + \Phi(2x-1) = \Phi(x) \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

1. Montrer que $\mathbb{1}_{[0,1]}$ est une solution de (0.2), et calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[0,1]}$.

***Dans la suite de l'exercice, on prend $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ une solution de* (0.2).**

2. Exprimer les transformées de Fourier des fonctions
$$\Phi_1 : x \mapsto \Phi(2x) \quad \text{et} \quad \Phi_2 : x \mapsto \Phi(2x-1)$$
en fonction de $\widehat{\Phi}$.
3. En déduire que $\widehat{\Phi}$ satisfait :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\Phi}(\xi) = \frac{1 + e^{-i\xi/2}}{2}\widehat{\Phi}(\xi/2).$$

4. Montrer l'identité :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \prod_{k=1}^{N} \frac{1+e^{-i\xi/2^k}}{2} = \exp\left(-i\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi}{2^{k+1}}\right)\frac{1}{2^N}\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\sin(\frac{\xi}{2^{N+1}})} \quad \text{pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Rappels : $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

5. En déduire

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{\Phi}(0)e^{-i\xi/2}\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}.$$

6. Conclure en déterminant toutes les fonctions $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ solutions de (0.2).

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Mai 2012, Examen. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés

Exercice 1. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Etant donné $f \in L^p(]0,+\infty[)$, on pose

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Dans le cas $p = +\infty$, montrer que F est lipschitzienne.
3. Dans le cas $1 < p < +\infty$, montrez que F est γ-hölderienne pour un certain exposant $\gamma \in]0,1[$ qu'on donnera explicitement en fonction de p.

(Etant donné $\gamma \in]0,1]$, on dit qu'une fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est γ-hölderienne s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x,y \in]0,+\infty[^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq M|x-y|^\gamma.$$

Si $\gamma = 1$, on retrouve la définition d'une fonction lipschitzienne.)

4. Dans le cas $p = 1$, montrer que F est continue.

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions f de $L^1(\mathbb{R})$ qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$f * f = f.$$

Exercice 3.

1. Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X), (Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ deux espaces de Hilbert (avec pour corps de base $\mathbb{R}$). On suppose qu'il existe une isométrie surjective $L : X \to Y$ (le caractère isométrique signifie $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X, \ \forall x \in X$).
Montrer que L est bijective, et que

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad \langle L(x_1), L(x_2)\rangle_Y = \langle x_1, x_2\rangle_X.$$

2. On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de X. Montrer que la famille $(L(e_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de Y.

Exercice 4 (Formule de Poisson)**.** *Pour éviter toute confusion, on conseille (mais on n'oblige pas) dans cet exercice de noter $\widehat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction de $f \in L^1(\mathbb{R})$, et $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier d'une fonction g 2π-périodique localement intégrable.*

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la somme

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi n)$$

est bien définie pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, et que la fonction $\widetilde{f}$ ainsi définie est 2π-périodique et appartient à $L^1(0,2\pi)$.

Indication : On pourra commencer par montrer que la fonction $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t+2\pi n)|$ appartient à $L^1(0,2\pi)$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de $\widetilde{f}$ en fonction de $\widehat{f}$, la transformée de Fourier de f.

3. Montrez que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int} \quad \text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrez que si $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall |t| \leq A,\ \ \forall |n| \geq n_0,\ \ \frac{1}{(1+|t+2\pi n|)^2} \leq \frac{1}{(1+2\pi|n|-A)^2}.$$

5. En déduire que si

$$\exists M \in \mathbb{R},\quad \forall t \in \mathbb{R},\ \ |f(t)| \leq \frac{M}{(1+|t|)^2}, \tag{H1}$$

alors la série $t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n)$ converge uniformément (en t) sur tout intervalle $[-A, A]$ où $A \in \mathbb{R}_+$, et en déduire que dans ce cas $\widetilde{f}$ est une fonction continue.

6. Montrez que si f vérifie $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $(f, f', f'') \in L^1(\mathbb{R})^3$, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty. \tag{H2}$$

7. Montrez que si f vérifie (H1) et (H2), alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

8. En appliquant la formule (6) à la fonction $f : x \mapsto e^{-a|x|}$ pour $a \in]0, \infty[$ (on justifiera en particulier la validité de cette application), en déduire que,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a} \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}.$$

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Septembre 2012, Examen de rattrapage. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés

Exercice 1.
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi[$ et prolongée par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f est continue.
2. Montrer, sans la calculer, que la suite $(\widehat{f}(n) = c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$. Définir $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ la série de Fourier de f et montrer l'égalité :
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad S_N(f)(x) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{N} \widehat{f}(n)\cos(nx).$$
4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2},$$
où la convergence des séries a lieu en norme $\|\cdot\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}$ et $\|\cdot\|_{L^2(-\pi,\pi)}$.
5. En déduire les valeurs de :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2},\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 2. On notera dans cet exercice $\widehat{f}$ ou encore $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier d'une fonction f dans $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$, et on notera $\mathcal{F}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse.
On s'intéresse à l'équation fonctionnelle
$$f * f = f, \tag{0.3}$$
d'inconnue f, où on cherchera f tantôt dans $L^1(\mathbb{R})$, tantôt dans $L^2(\mathbb{R})$.

Partie I : Préliminaires

1. Exhiber une fonction $f_1 \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$ et une fonction $f_2 \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.
2. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, dans quels espaces se trouvent $f * f$ et $\widehat{f}$ en général ? Même question si $f \in L^2(\mathbb{R})$. *(On ne demande pas de démonstration)*
3. Montrer que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors
$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\widehat{g}.$$
(On demande ici une redémonstration de ce résultat de cours.)
4. Etant donné $c \in]0, +\infty[$, décrire l'ensemble des solutions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad g(\xi)^2 = cg(\xi)\ .$$
On montrera en particulier qu'il y a exactement deux solutions $g \in C^0(\mathbb{R})$ (pour un c donné), et une infinité de solutions $g \in L^2(\mathbb{R})$ (pour un c donné).

5. Etant donné $a \in]0, \infty[$, on pose $f_a(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}, \forall \xi \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]}) = f_a.$$

En déduire que $f_a \in L^2(\mathbb{R})$ et que $f_a \notin L^1(\mathbb{R})$.

Partie II : Résolution

1. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une solution de l'équation (0.3), alors sa transformée de Fourier satisfait

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \widehat{f}(\xi)^2 = c\widehat{f}(\xi),$$

où c est une constante strictement positive que l'on déterminera.

2. Montrez qu'il y a une unique $f \in L^1(\mathbb{R})$ solution de l'équation (0.3) que l'on déterminera.
3. Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est une solution de l'équation (0.3) si et seulement si sa transformée de Fourier inverse satisfait

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)^2 = c\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi), \ \textit{pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

(On admettra la formule suivante, valable pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}^{-1}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g)$.)

4. Montrer que l'équation (0.3) a une infinité de solution dans $L^2(\mathbb{R})$.
(On pourra montrer en particulier que les fonctions $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_a)_{a \in]0,\infty[}$ sont des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ solutions de (0.3)).

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Mars 2013, Partiel. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés

Exercice 1. On travaille dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty]$ les fonctions suivantes sont-elles dans l'espace $L^p(\mathbb{R})$?

$$f_1 : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \qquad f_2 : x \mapsto e^{-x} \qquad f_3 : x \mapsto x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \qquad f_5 : x \mapsto \frac{1}{x^3}\mathbb{1}_{]1,\infty[}(x).$$

   (b) Dans chaque cas, calculer les valeurs des normes L^p pour tout $p \in [1, \infty]$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{n}.e^{-\frac{n^2x^2}{2}}.$$

   (a) Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. dire si la suite de fonctions converge simplement et si oui, identifier la limite).

   (b) Montrer que

$$f_n \longrightarrow 0 \text{ dans l'espace } L^1(\mathbb{R}).$$

   (c) Calculer $\|f_n\|_2$ pour $n \in \mathbb{N}$, et montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Pour $p \in [1, \infty[$, on pose

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \ \|a\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

et pour $p = \infty$ on pose

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $1 < p < q < \infty$, $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ et que

$$\forall a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|a\|_\infty \leq \|a\|_q \leq \|a\|_p \leq \|a\|_1.$$

2. Montrer que les inclusions $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ (avec $1 < p < q < \infty$) sont strictes.
3. On définit

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^1(\mathbb{N}) \\ & a & \longmapsto & (\frac{a_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

   Montrer que T est bien défini et linéaire continu (on munit naturellement les espaces $\ell^1(\mathbb{N})$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ respectivement). Calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}),\ell^1(\mathbb{N}))}$.

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = f(x + c)$$

.

1. Montrer que $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Etablir l'équation satisfaite par $\widehat{f}$.
3. En conclure que $f = 0$.
4. Dans le cas $c = 0$, décrire l'ensemble des fonctions $y \in C^1(\mathbb{R})$ qui satisfont $y' = y$ sur $\mathbb{R}$, et expliquer la différence avec le résultat de la question précédente.

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Mai 2013, Examen. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés.
On portera un soin particulier à la rédaction. En particulier, on doit rappeler et vérifier les hypothèses de chaque résultat de cours utilisé.

Exercice 1. On travaille dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\right)$ (on considère ici les fonctions à valeurs réelles).

1. Rappeler la définition de cet espace, et son produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
2. Calculer les 6 premiers moments de la loi normale centrée réduite.
3. Trouver 4 polynômes (P_0, P_1, P_2, P_3) tels que
$$\forall (i,j) \in [\![0,3]\!],\ \ \langle P_i, P_j\rangle = \delta_{i,j}, \quad \deg(P_i) = i.$$
4. En déduire 4 fonctions qui forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Exercice 2 (Inégalité de Hardy)**.** Soit $p \in]1,+\infty[$. Pour $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, on définit
$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ H(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. On suppose dans cette question que f est une fonction continue à support compact dans $]0,+\infty[$. On pose $F = H(f)$.
   (a) Montrer que F est bien définie, et appartient à $L^p(]0,+\infty[)$.
   (b) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et satisfait
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ xF'(x) + F(x) = f(x).$$
   (c) En déduire l'égalité :
   $$\int_0^\infty F(x)^p dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F(x)^{p-1}f(x)dx.$$
   (d) On suppose, en plus des hypothèses précédentes, que f est positive. Montrer :
   $$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$
   (e) Généraliser l'inégalité précédente dans le cas où l'on ne suppose plus $f \ge 0$.
2. Montrer que l'application $H : (C_c^0(]0,+\infty[), \|\cdot\|_p) \to (L^p(]0,+\infty[), \|\cdot\|_p)$ est linéaire continue.
3. Montrer que H se prolonge de manière unique en un endomorphisme continu de $L^p(]0,+\infty[)$ et satisfait alors (en notant encore H ce prolongement) :
$$\forall f \in L^p(]0,+\infty[),\ \ \|H(f)\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Exercice 3 (Preuve du théorème de Weierstrass par la convolution)**.**
Soit $a < b$ deux réels. On travaille dans l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme : $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. On cherche à montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans cet espace. Soit $f \in C^0([a,b])$.

1. Montrer qu'on peut trouver P_0 un polynôme de degré 1 tel que $P_0([-1/2,1/2]) = [a,b]$.

Ainsi on peut poser $g = f \circ P_0 \in C^0([-1/2,1/2])$.

2. Montrer qu'on peut trouver un polynôme P_1 tel que l'application $g - P_1$ soit nulle en $-1/2$ et en $1/2$.

Ainsi on peut prolonger par continuité cette fonction par 0 en dehors de l'intervalle $[-1/2,1/2]$ *:*
plus précisément, on pose $h = (g - P_1)\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]} \in C^0(\mathbb{R})$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = \alpha_n(1-x^2)^n \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ où $\alpha_n = \left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\right)^{-1}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est une fonction positive, continue, à support compact, et telle que $\int_{\mathbb{R}} p_n(x)dx = 1$.
4. Montrer que pour tout $\delta > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} p_n(x)dx = 0.$$

(On pourra montrer et utiliser la majoration $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n \leq n+1$.*)*

5. Montrer que $(p_n * h)_{n\in\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions qui converge vers h uniformément sur $\mathbb{R}$ *(ici on demande une redémonstration, et non une application directe du cours).*
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction à $[-1/2,1/2]$ de $p_n * h$ est une fonction polynomiale.
7. Conclure en montrant qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Juillet 2013, Rattrapage. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés.
On portera un soin particulier à la rédaction. En particulier, on doit rappeler et vérifier les hypothèses de chaque résultat de cours utilisé.

Exercice 1. *Les 3 questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que la fonction
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin(nx)$$
est bien définie et continue.

2. On pose $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour quels $p \in [1, \infty]$ la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle vers la fonction nulle en norme $L^p(\mathbb{R})$?

3. Soient $f, g \in L^3(\mathbb{R})$. Montrer que $f^2 g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. On pose pour $x > 0$,
$$H(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que
$$\left(\int_0^x f(t)dt \right)^2 \leq 2\sqrt{x} \int_0^x \sqrt{t} f(t)^2 dt.$$

2. En déduire que $H(f) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et que
$$\|H(f)\|_2 \leq 2\|f\|_2.$$

3. Montrer que l'application $H : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ est continue.

Exercice 3 (Inégalité de norme)**.** *Dans cet exercice, si $n \in \mathbb{Z}$, on note $\widehat{g}(n)$ le n-ième coefficient de Fourier d'une fonction 2π-périodique g. Il est autorisé d'utiliser la notation $c_n(g)$ à la place.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, de classe C^1, et telle que
$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0.$$

1. Enoncer le théorème de Parseval.
2. Rappeler et démontrer le lien entre les coefficients de Fourier $\widehat{f}(n)$ et $\widehat{f'}(n)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$|f(t)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|} |\widehat{f'}(n)|.$$

4. En déduire l'inégalité suivante :
$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}}\|f'\|_2.$$
(On prend ici la convention $\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} g(t)^2 dt}$. On rappelle également que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
5. L'inégalité précédente reste-t-elle valable si on ne suppose plus $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$?

Exercice 4 (Polynômes de Hermite et Transformée de Fourier)**.** On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = e^{-x^2}$. On définit également
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \psi^{(n)}(x).$$

1. Calculer H_0, H_1, H_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que $h_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
4. Exprimer h'_n en fonction de h_n et h_{n+1}, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\widehat{h_n} = (-i)^n h_n.$$
(On rappelle et on ne demande pas de démonstration du fait suivant : si $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$, alors $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{\varphi} = \varphi$).

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Mars 2014, Partiel. Durée : 2 heures

La rédaction devra être soignée, les réponses concises et lisibles. Les démonstrations devront répondre aux exigences habituelles de la logique mathématique.

Exercice 1. Sur $\mathbb{R}_+$, on considère la mesure μ de densité $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue dx. Soit une fonction borélienne f sur $\mathbb{R}_+$ telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que f est μ-intégrable.

Exercice 2. Soit une fonction borélienne $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, $d \geq 1$, où dx est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que
$$\lim_{m\to\infty} \int_{|f|>m} |f(x)|dx = 0.$$
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$dx(A) < \delta \Rightarrow \int_A f(x)dx < \varepsilon.$$

Exercice 3. Une fonction borélienne f sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, est dîte quasicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que $dx(\mathcal{O}) < \varepsilon$ et f est égale presque partout à une fonction continue sur $\mathbb{R}^d \backslash \mathcal{O}$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions f_n continues à supports compacts telles que $f_n \to f$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$ et $\|f_n - f_{n+1}\|_1 \leq 4^{-n}$ pour tout n.

2. Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que $dx(\mathcal{O}) \leq \varepsilon$ et sur $\mathbb{R}^d \backslash \mathcal{O}$, f_n converge uniformément vers f. (Indication : considérer les ensembles $\{|f_n - f_{n+1}| > 2^{-n}\varepsilon^{-1}\}$).

Exercice 4. Calculer le produit de convolution $f * f$ lorsque $f(x) = e^{-x}1_{x\geq 0}$.

Exercice 5. Soit $f(x) = 1_{[0,r]}(x)$ où $r \in [0, 1[$. On note $f^{(1)} = f$, $f^{(2)} = f * f$ et, par récurrence, on définit $f^{(k+1)} = f * f^{(k)}$.

1. Calculer explicitement $f^{(2)} = f * f$.

2. Montrer par récurrence que $f^{(k)} \in C_c^{k-2}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Supp} f^{(k)} \subseteq [0, rk]$ pour tout $k \geq 2$.

3. Démontrer par récurrence que $\|f^{(k)}\|_1 = r^k$ et $\|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(k-1)}\|_1$ pour tout $k \geq 1$.

4. On pose pour $n \geq 2$
$$g^n = \sum_{k=2}^{n} f^{(k)}.$$
Montrer que $g^{n+1} = f * g^n + f^{(2)}$.

5. En déduire que g^n converge dans L^1 vers une fonction g continue solution de l'équation fonctionnelle (E) : $g = f * g + f^{(2)}$.

6. Calculer la transformée de Fourier de f définie par
$$\hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(x)dx.$$
   (a) Montrer que si $f \in L^1$, alors $\hat{f}$ est continue et bornée.
   (b) En admettant la propriété $\widehat{f * \varphi} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\widehat{\varphi}$ et l'implication $\widehat{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, en déduire que l'équation fonctionnelle (E) admet une unique solution continue et intégrable.

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Mai 2014, Examen. Durée : 2 heures

La rédaction devra être soignée, les réponses concises et lisibles. Les démonstrations devront répondre aux exigences habituelles de la logique mathématique.

Exercice 1. (3 points) Soit f une fonction continue, positive, bornée et Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose pour $t > 0$:

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dy.$$

1. Montrer que $u(t,\cdot)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à x.
   Calculer sa norme L^1.
2. Montrer que $u(t,x)$ converge vers $f(x)$ quand $t \to 0$.

Exercice 2. (3 points) On pose $f(x) = 1_{[-1,2]}(x)$ et $g(x) = x1_{[0,1]}(x)$. Calculer le produit de convolution $h = f \star g$. (Indication : 5 cas à considérer).

Exercice 3. (4 points)
Soit f une fonction réelle 2π-périodique et C^1. On note par $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f.

1. Montrer que $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. Supposons que $\widehat{f}(0) = 0$. En utilisant l'égalité de Parseval en déduire l'inégalité de Wirtinger.

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt.$$

Exercice 4. (11 points)
Soit une fonction X positive sur $\mathbb{R}$, C^∞ à support compact dans $[-1,1]$. Pour tout $k > 0$, on pose $X^k(x) = X(x/k)$.

1. Montrer que la transformée de Fourier de X est bien définie. Prouver qu'il existe une constante C telle que $|\hat{X}(x)| \leq \frac{C}{|x|}$ si $x \neq 0$. En déduire que $\hat{X} \in L^2$.
2. Montrer que $\hat{X}$ est C^∞-différentiable et donner ses dérivées successives.
3. Exprimez la transformée de Fourier de X^k en fonction de $\hat{X}$.
4. Montrer que $f \star \hat{X}^k$ est bien définie si $f \in L^1$ ou $f \in L^2$.
5. Prouver que pour f continue bornée, $f \star \hat{X}^k(x) \to f(x)$ quand $k \to \infty$
   si on suppose que $\hat{X} \in L^1$ est telle que $\int_{\mathbb{R}} \hat{X}(u)du = 1$.
6. On suppose que $X(0) = 1$. Soit $f \in L^2$. Montrer que le produit
   $g^k := fX^k$ converge vers f dans L^2. Qu'en déduit-on sur la convergence
   de $\hat{g}^k$?

Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Juillet 2014, Examen de rattrapage. Durée : 2 heures

La rédaction devra être soignée, les réponses concises et lisibles. Les démonstrations devront répondre aux exigences habituelles de la logique mathématique.

Exercice 1. (3 points) Soit une suite $(f_n)_n$ dans un espace L^p qui converge vers $f \in L^p$ pour la norme L^p.

1. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que
$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}, \quad \forall k.$$
2. En déduire que la suite $(f_n)_n$ possède une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge vers f dans L^p et presque surement telle que $|f_{n_k}| \leq h$ pout tout k où $h \in L^p$.

Exercice 2. (6 points) Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Ecrire une équation différentielle vérifiée par f.
2. Rappeler la relation entre la transformée de Fourier d'une fonction et de sa dérivée ainsi que la formule donnant la dérivée d'une tranformée de Fourier. Justifier.
3. En déduire une équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier de f.
4. Déterminer alors $\hat{f}$.

Exercice 3. (8 points) Soient $f(x) = e^{-ax}1_{x\geq 0}$ et $g(x) = e^{ax}1_{x\leq 0}$ définies sur $\mathbb{R}$ où $a > 0$.

1. Calculer les transformées de Fourier de f et g.
2. En déduire la transformée de Fourier de $f \star g$.
3. En déduire sans l'aide de primitives, le calcul de $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{a^2+x^2}$.
4. Calculer $f \star g$.
5. En déduire le calcul de
$$\varphi(y) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{a^2 + x^2} dx.$$

Exercice 4. (4 points) Soit f une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{itx}$ sur $]0, 2\pi]$ où $t \notin \mathbb{Z}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En utilisant l'identité de Parseval, en déduire le calcul de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t-n)^2}$.