Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Mai 2016, Examen. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés
Le sujet est long, et il n'est pas attendu de faire tout le sujet pour obtenir une note maximale. Dans ce sens, un barème indicatif est donné.

Exercice 1 (4 points)**.** Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.

1. Justifier sans calcul que $\widehat{f_a}$, la transformée de Fourier de f_a, appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\widehat{f_a}$.
3. En déduire la valeur de
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx.$$

Exercice 2 (4 points)**.** On pose Δ l'application de dérivation sur les polynômes, qui est bien définie et linéaire :
$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}.$$
(Dans la suite on ne demande pas de démontrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont bien des normes sur $\mathbb{R}[X]$. De plus, on rappelle que si $P = 0$ alors $deg(P) = -\infty$, et dans ce cas le sup *qui définit $\|\cdot\|_1$ est alors considéré égal à 0, tout comme la somme qui définit $\|\cdot\|_2$)*

1. Si $P = \sum_{n=0}^{deg(P)} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_1 = \sup_{0 \le n \le deg(P)} |a_n|$, qui définit bien une norme. Dire si, quand on munit $\mathbb{R}[X]$ de cette norme $\|\cdot\|_1$, l'application Δ est continue, et si oui calculer sa norme d'application linéaire.

2. Même question si on munit maintenant $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\|_2 = \sum_{n=0}^{deg(P)} |a_n| n!$ (où $P = \sum_{n=0}^{deg(P)} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$).

Exercice 3 (8 points)**.** Soit $p \in]1, \infty[$, et $(u, v) \in L^p(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, muni de la tribu des boréliens de Ω, et de la mesure de Lebesgue.

1. On pose $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad g(t) = |t|^p$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée, encore dénotée g, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = p|t|^{p-1}\text{signe}(t),$$
où $\text{signe}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.
(Dans la suite, on utilisera avec un léger abus la notation $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^p$ pour faire référence à la fonction g prolongée par continuité)

2. On pose, pour $x \in \Omega$ fixé :
$$\varphi(t) = |u(x) + tv(x)|^p.$$
   (a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En appliquant le théorème des accroissement finis, montrer que pour tout $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$,
$$\frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{|t|} \le p\,[|u(x)| + |v(x)|]^{p-1}\,|v(x)|.$$
   (c) On pose $h(x) = [|u(x)| + |v(x)|]^{p-1}\,|v(x)|$ pour presque tout $x \in \Omega$. Montrer que $h \in L^1(\Omega)$.
   (d) Conclure que
$$\frac{1}{t}\int_\Omega \Big[|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p\Big]dx \xrightarrow[t\to 0]{} p\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\mathrm{signe}(u(x))v(x)dx.$$
3. On suppose que u n'est pas nulle (en tant que classe de fonction). Montrer que l'application
$$N : t \in \mathbb{R} \mapsto \|u + tv\|_p$$
est dérivable en 0, et calculer $N'(0)$.

Exercice 4 (9 points)**.** On rappelle que $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est la donnée d'une fonction 2π-périodique. De plus
$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C},\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\right\},$$
et si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\widehat{f}$ désigne la suite des coefficients de Fourier de f.

On pose, pour $s \in \mathbb{R}_+$,
$$H^s(\mathbb{T}) := \left\{f \in L^2(\mathbb{T}),\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s}|\widehat{f}(n)|^2 \ <\ +\infty\right\}.$$

1. Identifier l'espace $H^0(\mathbb{T})$.
2. Soit $s \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1 + |n|^{2s})\widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \end{array}$$
   est bien définie, et est un produit scalaire sur l'espace $H^s(\mathbb{T})$.
   (b) Donner une expression de la norme associée à ce produit scalaire, que l'on note $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T})}$ et montrer que $H^s(\mathbb{T})$ est complet pour cette norme.
   (c) Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, l'ensemble des polynômes trigonométriques, est dense dans $H^s(\mathbb{T})$.
3. Pour $s_1 < s_2$ où $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2$, y a-t-il une inclusion entre $H^{s_1}(\mathbb{T})$ et $H^{s_2}(\mathbb{T})$? Justifier.
4. Montrer que si $s > \frac{1}{2}$, et $f \in H^s(\mathbb{T})$, alors $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, f a un représentant continu (que l'on note f), et il existe une constante C_s indépendante de f telle que
$$\|f\|_\infty \le C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$
5. Soit $s \in \mathbb{R}_+$. On pose (on rappelle que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques) :
$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{P}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & H^s(\mathbb{T}) \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}.$$
Montrer que T se prolonge en une application linéaire continue de $H^{s+1}(\mathbb{T})$ vers $H^s(\mathbb{T})$ (que l'on munit de leurs normes respectives).

Corrigé Examen Mai 2016

Corrigé 1. 1. Comme $f_a \in L^2(\mathbb{R})$ (puisque f est bornée à support compact), par le théorème de Plancherel, on sait que $\widehat{f_a} \in L^2(\mathbb{R})$. Par contre, si par l'absurde $\widehat{f_a}$ appartenait à $L^1(\mathbb{R})$, on pourrait appliquer le théorème d'inversion, et alors f_a aurait un représentant continu sur $\mathbb{R}$, ce qui constitue une contradiction. Ainsi $\widehat{f_a} \notin L^1(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$\widehat{f_a}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi a} - e^{+i\xi a}}{-i\xi} = \frac{2\sin(\xi a)}{\sqrt{2\pi}\xi}. \tag{1}$$

De plus

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_a(x)dx = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}},$$

ce qui correspond bien à la limite en 0 dans (1).

3. Le théorème de Plancherel nous donne l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} |f_a(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f_a}(\xi)|^2 d\xi$$

or

$$\int_{\mathbb{R}} |f_a(x)|^2 dx = 2a, \qquad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f_a}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2\sin(\xi a)}{\sqrt{2\pi}\xi}\right)^2 d\xi = \frac{4a}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\xi)}{\xi}\right)^2 d\xi$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$

Corrigé 2. 1. L'application Δ n'est pas continue si on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$. En effet

$$\frac{\|\Delta(X^n)\|_1}{\|X^n\|_1} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

2. L'application Δ est continue si on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_2$. En effet, si $P = \sum_{n=0}^{deg(P)} a_n X^n$,

$$\|\Delta(P)\|_2 = \sum_{n=0}^{deg(P')} |(n+1)a_{n+1}| n! = \sum_{n=1}^{deg(P)} |a_n| n! \leq \|P\|_2,$$

ce qui donne $\|\Delta\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_2)} \leq 1$. De plus

$$\frac{\|\Delta(X)\|_2}{\|X\|_2} = 1,$$

d'où finalement $\|\Delta\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_2)} = 1$.

Corrigé 3. 1. Par la définition, $\forall t \in \mathbb{R}^*, g(t) = e^{p\ln(|t|)}$ est clairement (par composition) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad g'(t) = \begin{cases} \frac{p}{t} e^{p\ln(t)} & \text{si } t > 0 \\ \frac{-p}{-t} e^{p\ln(-t)} & \text{si } t < 0 \end{cases} = p|t|^{p-1}\text{signe}(t).$$

De plus $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$ puisque $p > 0$ et donc on peut prolonger g par continuité en 0 avec $g(0) = 0$. Enfin

$$\forall t \neq 0, \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{|t|^p}{t} = \text{signe}(t)|t|^{p-1} \to_{t\to 0} 0$$

puisque $p - 1 > 0$, d'où g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

2. (a) On a $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = g(u(x)+tv(x))$ donc par composition φ est dérivable, et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = g'(u(x)+tv(x)).v(x) = p|u(x)+tv(x)|^{p-1}\text{signe}(u(x)+tv(x)).v(x).$$

(b) Pour $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$, le théorème des accroissement finis appliqué à φ entre 0 et t (applicable car φ est dérivable sur $\mathbb{R}$) montre qu'il existe $t_0 \in]0,t[$ (ou $]t,0[$ suivant le signe de t) tel que

$$\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{|t|} = |\varphi'(t_0)| = p|u(x)+t_0v(x)|^{p-1}|v(x)| \le p\,[|u(x)|+|v(x)|]^{p-1}\,|v(x)|,$$

où on a utilisé $|t_0| \le 1$ et que la fonction $\theta \in \mathbb{R}_+ \mapsto \theta^{p-1}$ est croissante.

(c) On applique l'inégalité de Hölder, et comme $(p-1)p' = p$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h(x)|dx &\le \left(\int_\Omega [|u(x)|+|v(x)|]^{(p-1)p'}\,dx\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{1/p}\\ &= \||u|+|v|\|_p^{p/p'}\|v\|_p \le (\|u\|_p+\|v\|_p)^{p/p'}\,\|v\|_p < \infty\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Minkowski. Et donc $h \in L^1(\Omega)$.

(d) On applique le théorème de convergence dominée. En effet, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\frac{1}{t}\Big[|u(x)+tv(x)|^p - |u(x)|^p\Big] = \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi'(0) = p|u(x)|^{p-1}\text{signe}(u(x))v(x),$$

et on a la domination par la fonction $h \in L^1(\Omega)$, indépendante de t. D'où le résultat.

3. On pose $\psi(t) = \int_\Omega |u(x)+tv(x)|^p dx$. Alors $N = \psi^{1/p}$, or $\psi(0) \neq 0$ (car u est non nulle), donc par composition N est dérivable en 0, et

$$N'(0) = \frac{1}{p}\psi'(0)\psi(0)^{1/p-1} = \|u\|_p^{1-p}\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\text{signe}(u(x))v(x)dx.$$

Corrigé 4. 1. L'espace $H^0(\mathbb{T})$ est égal à l'espace $L^2(\mathbb{T})$, puisque d'après le théorème de Parseval, pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$.

2. (a) Notons b l'application

$$\begin{array}{rccl} b: & H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) & \to & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})\widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}. \end{array}$$

L'application b est bien définie, car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, si $f,g \in H^s(\mathbb{T})$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sqrt{1+|n|^{2s}}\widehat{f}(n)\sqrt{1+|n|^{2s}}\widehat{g}(n)\right| \le \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})|\widehat{f}(n)|^2}\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})|\widehat{g}(n)|^2} < \infty,$$

et par complétude de $\mathbb{C}$, la convergence absolue implique la convergence de la série qui définit b.

On constate facilement que b est sesquilinéaire et positive. Quant au caractère défini positif, il découle (par exemple) facilement du théorème de Parseval, car si $b(f,f) = 0$, alors $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \le b(f,f) = 0$ et donc $f = 0$.

(b) La norme associée à ce produit scalaire s'écrit

$$\forall f \in H^s(\mathbb{T}),\ \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})|\widehat{f}(n)|^2}.$$

Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $H^s(\mathbb{T})$. Par définition du critère de Cauchy, on a

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \ \forall p\geq p_0, q\geq p_0,\quad \|f_p-f_q\|_{H^s(\mathbb{T})}=\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})|\widehat{f_p-f_q}(n)|^2}\leq\varepsilon. \quad (2)$$

Ainsi à n fixé, on a en conséquence que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \ \forall p\geq p_0, q\geq p_0, |\widehat{f_p-f_q}(n)|\leq\varepsilon,$$

et donc la suite $\left(\widehat{f_p}(n)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, qui est complet, donc il existe $g(n)$ tel que $\widehat{f_p}(n)\to_{p\to\infty}g(n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, et en remarquant que (2) se réécrit

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \ \forall p\geq p_0, q\geq p_0,\quad \forall N\in\mathbb{N},\quad \sqrt{\sum_{n=-N}^{N}(1+|n|^{2s})|\widehat{f_p-f_q}(n)|^2}\leq\varepsilon.$$

on obtient en passant à la limite $q\to\infty$ (valable car pour N fixé, il y a un nombre fini de terme dans la somme, en on peut faire ensuite $N\to\infty$),

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \ \forall p\geq p_0,\quad \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})|\widehat{f_p}(n)-g(n)|^2}\leq\varepsilon. \quad (3)$$

En particulier, cela implique facilement (en appliquant ce qui précède avec $\varepsilon=1$, $p=p_0$) que

$$\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})|g(n)|^2}\leq 1+\|f_{p_0}\|_{H^s(\mathbb{T})} \quad (4)$$

et donc en particulier $g\in\ell^2(\mathbb{Z})$. Par le théorème de Parseval, il existe $f\in L^2(\mathbb{T})$ tel que $\widehat{f}=g$. Les inégalités précédentes (4) et (3) montrent respectivement que $f\in H^s(\mathbb{T})$ et que $\|f_p-f\|_{H^s(\mathbb{T})}\to_{p\to\infty}0$, ce qu'il fallait démontrer.

(c)
- *Preuve 1 :* On constate que

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \ \|S_N(f)-f\|^2_{H^s(\mathbb{T})}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^{2s})|\widehat{f}(n)-\widehat{S_N(f)}(n)|^2=\sum_{|n|>N}(1+|n|^{2s})|\widehat{f}(n)|^2$$

  qui converge vers 0 quand $N\to\infty$ (c'est le reste d'une série convergente). Ainsi, comme $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, on a bien la densité de $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ dans $H^s(\mathbb{T})$.
- *Preuve 2 :* Comme $H^s(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert, on peut appliquer le critère de densité, à savoir montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{T})^\perp=\{0\}$. Soit donc $f\in\mathcal{P}(\mathbb{T})^\perp$: alors $b(f,e_n)=0=(1+|n|^{2s})\widehat{f}(n)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, et donc $\widehat{f}=0$. Par injectivité de l'opérateur "coefficient de Fourier", on a bien $f=0$, ce qui conclut la preuve.

3. Pour $s_1<s_2$, on a $|n|^{2s_1}\leq|n|^{2s_2}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, et donc $H^{s_2}(\mathbb{T})\subset H^{s_1}(\mathbb{T})$.
4. Soit $s>\frac{1}{2}$ et $f\in H^s(\mathbb{T})$. Alors par Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|=|\widehat{f}(0)|+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|n|^s}|n|^s|\widehat{f}(n)|\leq|\widehat{f}(0)|+\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|n|^{2s}}}\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|n|^{2s}|\widehat{f}(n)|^2}$$

qui est bien fini, puisque $2s>1$ (séries de Riemann convergentes). Ainsi, par un théorème du cours, f a un représentant continu (à savoir la limite uniforme de sa série de Fourier), et

$$\|f\|_\infty\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|\widehat{f}(n)e_n\|_\infty=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|\leq\left(1+\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|n|^{2s}}}\right)\|f\|_{H^s}$$

(on a utilisé l'inégalité $|\widehat{f}(0)|\leq\|f\|_{H^s}$ qui est facile à vérifier), d'où le résultat.

5. L'application T est clairement bien définie et linéaire. De plus

$$\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}), \quad \|T(P)\|^2_{H^s(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^{2s}) |\widehat{P'}(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^{2s}) n^2 |\widehat{P}(n)|^2 \leq 2 \|P\|^2_{H^{s+1}(\mathbb{T})}$$

où on a utilisé $(1 + |n|^{2s}) n^2 \leq 2(1 + |n|^{2s+2})$ (qu'on vérifie facilement). Ainsi T est continue si on munit $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ de la norme $H^s(\mathbb{T})$ (et bien sur $H^{s+1}(\mathbb{T})$ de la norme $H^{s+1}(\mathbb{T})$), et par complétude de ce dernier, le théorème de prolongement des applications linéaires continues s'applique, et T se prolonge en une application linéaire continue de $H^{s+1}(\mathbb{T})$ vers $H^s(\mathbb{T})$.

Commentaire culturel : Les espaces précédents sont appelés espaces de Sobolev (périodiques), qui sont d'une grande importance en analyse. Nous venons d'en étudier quelques propriétés. Notamment, à la dernière question, nous avons définit la notion de dérivée faible, que vous reverrez dans un cadre plus général avec la théorie des distributions, et qui explique l'importance de ces espaces dans la théorie des équations aux dérivées partielles (mais pour cela soit vraiment pertinent, il faudrait refaire l'exercice pour des fonctions de plusieurs variables ; pour cela les calculs sont un peu plus difficiles, mais les aspects essentiels sont les mêmes ; dans cette direction, on pourra consulter la partie 4 de l'écrit d'agrégation externe de Mathématiques de 1997 (épreuve d'Analyse) où ceci (et bien plus) est fait. Le reste du sujet donne une application à la géométrie différentielle).