Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille Bonus 1
Autour de la cardinalité, plus difficile

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

On dit que deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection entre E et F.

1. (*) Rappelez la notion de développement décimal d'un nombre, et décrire les réels admettant deux développements décimaux.
2. (**) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.
3. (** **Cantor**) Montrer que si E est un ensemble, alors E n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(E)$.
4. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
5. (** **Cantor-Bernstein**) Soit E et F deux ensembles. Montrer que si E est équipotent à un sous-ensemble de F et que F est équipotent à un sous-ensemble de E, alors E est équipotent à F.
6. (*) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à $\mathbb{R}$.

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille Bonus 2

Structures algébriques, Ensembles quotients

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Definition. • Une loi de composition interne $*$ sur un ensemble X est une application $* : X \times X \to X$. Pour $x \in X$ et $y \in X$, on note $x * y$ plutôt que $*(x, y)$.

- Si $(X, *)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne, on dit que $e \in X$ est un élément neutre (pour $*$) si $\forall x \in X, x * e = x$ **et** $e * x = x$.
  Dans le cas où il existe un élément neutre, si $x \in X$, on appelle inverse de x un élément $y \in X$ tel que $x * y = e$ **et** $y * x = e$ (on montre dans l'exercice 1 que l'élément neutre est unique ; sinon la notion d'inverse dépendrait de l'élément neutre considéré...).

Exercice 1. Soit $(X, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

1. Montrer qu'un élément neutre est nécessairement unique.
2. Supposons que $*$ est associative ($\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = x * (y * z)$), et qu'il existe un élément neutre $e \in X$ ($(X, *)$ est alors appelé un monoïde). Montrer qu'il y a unicité de l'inverse, c'est-à-dire que tout élément de X a au plus un inverse dans X. On note alors $\overset{-1}{*}x$ cet inverse, ou s'il n'y a pas d'ambiguité x^{-1}.
3. Sous les conditions de la question précédente, montrer que si x a un inverse, alors x^{-1} également, et que $(x^{-1})^{-1} = x$. Montrer que si x et y ont chacun un inverse, alors $x*y$ aussi et $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$.
4. Exemple : $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la loi de multiplication. Montrer qu'il existe un élément neutre, et caractériser les éléments ayant un inverse.

Definition. • Soit $(G, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne. On dit que $(G, *)$ est un groupe si:

  - $*$ est associative,
  - $*$ a un élément neutre dans G,
  - chaque élément de G a un inverse dans G pour la loi $*$.

- Si $(G, *)$ est un groupe et que $*$ est commutative ($\forall x, y \in G^2, x * y = y * x$), on dit que G est un groupe commutatif, ou encore un groupe abélien.
- Si $(G, *)$ est un groupe, on dit que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si
  - $H \subset G$,
  - $(H, *)$ est un groupe.

Exercice 2 (Caractérisation des sous-groupes)**.** Montrer que si $(G, *)$ est un groupe dont le neutre est noté e, alors

$$(H, *) \text{ est un sous-groupe de } (G, *) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H \subset G \\ e \in H \\ \forall x \in H, \forall y \in H, x * y^{-1} \in H \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e, tel que $\forall x \in G, x*x = e$. Montrer que G est abélien.

Definition. Etant donné un ensemble X, une loi de composition interne $*$ sur X, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On dit que $*$ passe au quotient par $\mathcal{R}$ si

$$\forall x, x', y, y' \in X, \quad (x\mathcal{R}x' \;\text{ et }\; y\mathcal{R}y'\ ) \Longrightarrow (x*y)\mathcal{R}(x'*y').$$

On peut alors définir une loi de composition interne $\overline{*}$ sur $X/\mathcal{R}$ par la formule

$$\forall x, y \in X, \quad \overline{x}\ \overline{*}\ \overline{y} = \overline{x*y}.$$

Definition. Soit $(A,+,*)$ un ensemble muni de deux lois de composition internes. On dit que $(A,+,*)$ est un anneau si

1. $(A,+)$ est un groupe abélien,
2. la loi $*$ a un élément neutre et est associative,
3. $\forall x,y,z \in A^3, (x+y)*z = x*z + y*z, \quad \text{et} \quad z*(x+y) = z*x + z*y.$

Dans ce cas, il est fréquent de noter 0 l'élément neutre de la loi $+$ et 1 l'élément neutre de la loi $*$. L'anneau est dit commutatif si $*$ est commutative.

Exemple. $(\mathbb{Z},+,*)$, $(\mathbb{R}[X],+,*)$ et $(M_n(\mathbb{R}),+,*)$ sont des anneaux.

Exercice 4. Soit $(A,+,*)$ un anneau. Montrer que l'ensemble des inversibles pour la loi $*$, muni de cette même loi, est un groupe. On l'appelle groupe des inversibles de A. Identifier ces groupes dans les exemples ci-dessus.

Exercice 5. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les lois $+$ et $*$ sur $\mathbb{Z}$ passent au quotient pour la relation d'équivalence

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \ \mathcal{R}_n\ y \Longleftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}.$$

Montrer que l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par cette relation, muni des lois $\overline{+}$ et $\overline{*}$ est un anneau.

Exercice 6 (Passage au quotient par un sous-groupe)**.** Soit $(G,*)$ un groupe, et $(H,*)$ un sous-groupe de $(G,*)$. On dit que $(H,*)$ est distingué dans $(G,*)$ si

$$\forall g \in G, \forall h \in H, g*h*g^{-1} \in H.$$

(on note parfois $H \triangleleft G$).

1. Montrer que si $(G,*)$ est abélien, alors tous ses sous-groupes sont distingués.
2. On définit la relation binaire

   $$\forall x, y \in G^2, x\mathcal{R}_H y \Longleftrightarrow x*y^{-1} \in H.$$

   Montrer que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.
3. Montrer que si H est distingué, alors la loi $*$ passe au quotient par la relation $\mathcal{R}_H$. Montrer que l'ensemble $G/\mathcal{R}_H$ muni de la loi $\overline{*}$ est un groupe. On le note plutôt G/H et on l'appelle groupe quotient de G par H.

Exercice 7. Soit $(A, +, *)$ un anneau commutatif (cette dernière hypothèse est là pour simplifier ; il existe la notion d'idéal à gauche, à droite, et bilatère, qui sont communes dans le cas commutatif). On dit que $I \subset A$ est un idéal de A si

$$\begin{cases} (I, +) \text{ est un sous-groupe de } (A, +) \\ \forall a \in A, \forall i \in I, \quad a * i \in I. \end{cases}$$

1. Montrer que si I est un idéal de $(A, +, *)$, alors les lois $+$ et $*$ passent au quotient par la relation d'équivalence
$$\forall x, y \in A^2, x\mathcal{R}_I y \iff x - y \in I,$$
et que l'ensemble quotient $(A/\mathcal{R}_I, \overline{+}, \overline{*})$ est un anneau. On le note plutôt A/I et on l'appelle anneau quotient de A par I.

2. Montrer que $n\mathbb{Z}$ (où $n \in \mathbb{N}$) est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, *)$ (on retrouve avec la question précédente le résultat de l'exercice 5). Montrer que ce sont les seuls (autrement dit, tout idéal de $\mathbb{Z}$ s'écrit $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$; en fait on montre mieux : tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et il se trouve que ce sont en plus des idéaux).

3. Montrer que les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont de la forme $P\mathbb{R}[X] = \{PQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ (on note plutôt $(P) = \{PQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}$, c'est l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par P).

Definition. Soit $(K, +, *)$ un ensemble muni de deux lois de composition internes. On dit que $(K, +, *)$ est un corps si

- $(K, +, *)$ est un anneau commutatif non nul (i.e. $K \neq \{0\}$),
- tous les éléments de $K^* := K \setminus \{0\}$ ont un inverse dans K pour la loi $*$.

Exercice 8. On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation
$$\forall (p, q), (p', q'), \quad (p, q)\mathcal{R}(p', q') \iff pq' = p'q.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

2. On définit sur l'ensemble quotient $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{R}$ les lois
$$\forall (p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \overline{(p, q)} + \overline{(p', q')} = \overline{(pq' + p'q, qq')}, \quad \overline{(p, q)} * \overline{(p', q')} = \overline{(pp', qq')}.$$
Montrer que ces lois sont bien définies (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du choix du représentant de $\overline{(p, q)}$ et $\overline{(p', q')}$.

3. Montrer que $((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{R}, +, *)$ est un corps.

4. (*) Identifiez ce corps à un corps bien connu. *(le mot "Identifiez" est un peu ambiguë, on aurait dû dire "Montrer qu'il existe un isomorphisme entre ce corps et un corps bien connu", le mot "isomorphisme de corps" signifiant une bijection qui respecte les structures de corps des ensembles d'arrivée et de départ ; dans le cas présent, le corps qu'on vient de construire peut en fait être considéré comme une définition (une construction) de ce corps bien connu)*

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'un polynôme est irréductible s'il ne peut pas être écrit comme produit de deux polynômes non constants (c'est l'équivalent de la notion de nombre premier dans $\mathbb{Z}$). On rappelle également que deux polynômes sont dits premiers entre eux s'ils n'ont aucun polynôme non constant qui les divise tous les deux.

1. Rappeler le théorème de Bezout.

2. (*) Montrer que si P est irréductible, alors $(\mathbb{R}[X]/(P), +, *)$ (par abus, on omet les barres sur $+$ et $*$) est un corps.

3. Montrer que $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

4. (*) On en déduit que $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ est un corps. Identifiez ce corps bien connu.

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille Bonus 3
Analyse

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. On sait que

$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}.$$

2. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 2. 1. Rappelez la définition de la continuité uniforme d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

2. Trouver une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. (*) Enoncer et démontrer le théorème de Heine.
4. (*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq ax + b.$$

5. (**) Montrer que la réciproque du résultat précédent est faux, même si on suppose f continue, positive, et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (autrement dit, calculer la limite simple, et établir si la convergence est uniforme ou non).

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_n : x \mapsto n\left[f(x + 1/n) - f(x)\right].$$

1. On suppose f deux fois dérivables de dérivée seconde bornée. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' (sur $\mathbb{R}$).
2. (*) On suppose f de classe C^1. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = a_n x^n (1-x).$$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que cette série converge normalement si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. (*) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6. Théorème de projection. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire. Soit S une partie fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappeler la définition du produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que tout point admet une projection sur S, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe p tel que
$$\|x-p\|_2 = \inf_{y\in S} \|x-y\|_2.$$
3. Montrer que si S est de plus convexe, alors il y a unicité d'un tel projeté. Dans ce cas, on parle *du* projeté de $x \in \mathbb{R}^n$ sur S, et on le note $P_S(x)$. L'application $x \mapsto P_S(x)$ s'appelle alors la projection sur S.
4. Donnez un exemple où il n'y a pas unicité du projeté.
5. Dans le cas où S est convexe et $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que le projeté $p = P_S(x)$ est caractérisé par les propriétés :
$$\begin{cases} p \in C \\ \forall y \in C, \langle x-p, y-p\rangle \leq 0 \end{cases}$$
6. Supposons que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que S est convexe, et que l'application P_S alors bien définie est linéaire.

Exercice 7 (**)**.** Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie naturelle. Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$: on dit qu'un point $x \in \mathbb{R}^n$ est isolé dans A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$. On dit que la partie A est discrète si tous ses points sont isolés.
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappelez la définition et la caractérisation d'un sous-groupe.
2. Donnez des exemples de sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ (un qui est discret (mais distinct de $\{0\}$), un qui est dense (mais distinct de $\mathbb{R}^n$), et dans le cas $n \geq 2$, un qui n'est ni discret, ni dense).
3. On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que G est discret. En déduire que G est fermé.
4. (*) **Cas** $n = 1$. Montrer que si 0 n'est pas isolé dans G, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un réel a, soit dense dans $\mathbb{R}$.
5. **Application à la notion de période :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose
$$\mathcal{P}_f = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_f$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

   On dit que f est périodique si $\mathcal{P}_f \neq \{0\}$.

   (b) Donner des exemples de fonctions f telles que
   $$\mathcal{P}_f = \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}_f = \{0\}, \quad \mathcal{P}_f = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{P}_f = \mathbb{Q}.$$
   (c) Montrer que si f est continue, périodique et non constante, alors il existe $T_0 \in]0,\infty[$ tel que $\mathcal{P}_f = T_0\mathbb{Z}$.

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille Bonus 4
Algèbre linéaire

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si f est inversible, alors f^{-1} est un polynôme en f.
2. (*) On définit
$$\exp(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^n.$$
Justifier que cette somme est bien définie et que $\exp(f) \in \mathcal{L}(E)$. Montrer également que $\exp(f)$ est un polynôme en f.

Exercice 2. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.
2. (*) Montrer que si f et g sont diagonalisables, alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g *(on dit que f et g sont codiagonalisables)*.
3. (*) Montrer que si f et g sont trigonalisables, alors il existe une base commune de trigonalisation de f et g *(on pourra commencer par montrer que f et g ont un vecteur propre commun)*.