Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Notions fondamentales L1/L2

Sujet Novembre 2014
Durée : 2 heures

Les différentes parties du sujet ne sont pas indépendantes ; néanmoins chaque partie peut être abordée en admettant les résultats des parties précédentes.
Le sujet est long, il n'est pas attendu que vous traitiez tout le sujet ; la qualité de la rédaction sera un élément déterminant dans la notation.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes, et pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

1 Etude d'un endomorphisme sur $\mathbb{R}[X]$

On introduit l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d strictement positif, montrer que $\Delta(P)$ est de degré $d-1$. Déterminer également le degré de $\Delta(P)$ dans le cas où P est de degré 0 ou $-\infty$.
   (c) Montrer que le noyau de Δ est $\mathbb{R}_0[X]$.

2. On fixe $d \in \mathbb{N}^*$, et on considère $\Delta_d : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ la restriction de Δ à $\mathbb{R}_d[X]$ (pour espace de départ et d'arrivée).
   (a) Montrer que Δ_d est bien définie. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Enoncer le théorème du rang. Identifier le noyau de Δ_d, et en déduire que $\mathrm{Im}(\Delta_d) = \mathbb{R}_{d-1}[X]$.

3. On pose E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes qui s'annulent en 0. Montrer que la restriction de Δ à E (c'est-à-dire l'application $\widetilde{\Delta} : P \in E \mapsto \Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$) est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

2 Polynômes de Newton

D'après la question 3 de la partie 1, on peut définir par récurrence la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$N_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta(N_{n+1}) = N_n \text{ avec } N_{n+1}(0) = 0.$$

(en effet, étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $N_n \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $N_{n+1} \in E$ antécédent de N_n par $\widetilde{\Delta}$, c'est-à-dire qui satisfait $N_{n+1} \in E$ et $\Delta(N_{n+1}) = N_n$)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$N_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

2. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{n\in[\![0,d]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

3. Etant donné $d \in \mathbb{N}$, écrire la matrice de Δ_d dans la base $(N_n)_{n\in[\![0,d]\!]}$. Δ_d est-il diagonalisable ?

3 Equivalent de $\left|N_n(x)\right|$ lorsque $n \to \infty$

Soit $x \in \mathbb{R}$: si $x \in \mathbb{N}$, il est clair que $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire à 0. On suppose donc $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et alors $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas. Enfin, étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^\alpha \left|N_n(x)\right|$.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$, et en déduire que
$$v_n = \frac{\alpha - x - 1}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Déterminer selon la valeur de α, la nature de la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (ainsi que son signe quand celle-ci diverge), et en déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer qu'il existe un réel strictement positif noté $C(x)$ tel que
$$N_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}.$$

4 Etude de $\sum_{n=0}^{\infty} t^n N_n(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in]-1,1[$, la série de terme général $(t^n N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. On pose $f : t \in]-1,1[\mapsto (1+t)^x$. Montrer que f est C^∞, et calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ en fonction de $N_k(x)$.

3. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral, et en l'appliquant à f, en déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n N_n(x).$$
(on montrera soigneusement que le reste intégral converge vers 0 ; on pourra pour cela montrer et utiliser l'inégalité
$$\forall s \in [0,t],\ \ 0 \le \frac{t-s}{1+s} \le t.)$$

5 Résolution de $P(X+1) - P(X) = Q(X)$, où Q est donné

On adopte la notation usuelle définie par récurrence : $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$.
Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. On cherche à trouver l'ensemble des polynômes P tels que
$$P(X+1) - P(X) = Q(X),$$
autrement dit on cherche l'ensemble des antécédents de Q par Δ.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} Q(k)$ faisant intervenir P solution de $\Delta(P) = Q$.

2. Montrer que
$$Q = \sum_{n=0}^{d} \Delta^n(Q)(0) N_n.$$

3. En déduire, en fonction de $(\Delta^n(Q)(0))_{n\in[\![0,d]\!]}$, l'ensemble des polynômes P vérifiant la relation $\Delta(P) = Q$.

4. **Exemple :** on considère $Q = X^2$. Trouver P solution de $\Delta(P) = Q$, et en déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n} k^2$, pour $n \in \mathbb{N}$.