Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 1

Révisions générales, raisonnements, quantificateurs

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^*, \;\; x < y \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \;\; x < \sqrt{x}$.
3. $\forall N \in \mathbb{N}^*, \;\; \exists n \in \mathbb{N}^*, \;\; \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geq N$.

Pour le numéro 1, calculer la dérivée de la fonction inverse, et comprendre l'erreur qu'on aurait pu commettre en étudiant les variations de cette fonction en fonction du signe de sa dérivée.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
2. f possède un minimum.
3. f s'annule au plus une fois.

Exercice 3. (*) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ possède un point fixe.

Exercice 4 (Analyse fonctionnelle 2015)**.** Soit $f_1, f_2 \in C^0([0,1])$ telles que

$$\forall \varphi \in C^0([0,1]), \quad \int_0^1 f_1(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f_2(x)\varphi(x)dx.$$

Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 5. (*) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un groupe de n personnes qui se serrent la main (ou pas) pour se dire bonjour. Montrer qu'au moins 2 personnes serrent le même nombre de mains.

Exercice 6. (*) Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et que cette décomposition est unique.

Exercice 7.

1. Déterminer, par analyse-synthèse toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}, \;\; f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. (**Ultra-Classique) Résoudre la même question mais en cherchant les fonctions seulement supposées continues.

Exercice 8. (**) A l'aide du nombre $\sqrt{2}$ (dont on admet qu'il est irrationnel), montrer que

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \;\; x^y \in \mathbb{Q}.$$

Feuille 2
Les suites

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1 (Mines 2015)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer :

$$\forall\varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, |u_p| < \varepsilon.$$

Que signifie cette propriété ? Donner sa négation.

Exercice 2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.
3. (*) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
2. (**) Comment aurait-on pu calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on ne nous avait pas donné le résultat ?

Exercice 4. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, positive, et qui converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers un réel $\ell > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k$

1. (*) Théorème de Césaro : on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Montrer que le résultat précédent est valable si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
3. Trouver un contre-exemple à la réciproque du théorème de Césaro.
4. (*) Réciproque partielle du théorème de Césaro : Montrer que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et que (u_n) est supposée monotone, alors (u_n) converge vers ℓ.

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 3
Autour de la dénombrabilité

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

On rappelle qu'on appelle ensemble dénombrable un ensemble qui peut s'injecter dans $\mathbb{N}$.
On rappelle qu'on peut démontrer qu'un ensemble infini dénombrable est en bijection avec $\mathbb{N}$.

1. (**) Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (faire un dessin et comprendre comment on peut deviner le candidat $f(m,n) = n + \sum_{i=0}^{m+n} i$).
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.
3. En déduire que le produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. (*) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles dénombrables d'un ensemble fixe E. En utilisant la question 1., montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.
6. (*) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
7. (*) Montrer que l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
8. (*) Montrer que les ensembles $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ sont en bijection. (donner 2 arguments : un premier utilisant la propriété rappelée en préambule, un second exhibant explicitement une telle bijection)

On admet que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels n'est pas dénombrable.

9. Montrer que l'ensemble des irrationnels est non dénombrable.

Definition. Un nombre réel x est dit algébrique s'il existe un polynôme non nul, à coefficients entiers ($P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$) tel que $P(x) = 0$. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

10. Montrer que les nombres rationnels sont algébriques.
11. (*) Montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont des nombres algébriques.
12. (*) Montrer que l'ensemble des nombres transcendants est non vide *(pensez à utiliser la notion de dénombrabilité !)*.

Hypothèse du continu : c'est la question de savoir si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dénombrable est nécessairement en bijection avec $\mathbb{R}$ (comparer avec la propriété rappelée en préambule : un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui n'est pas fini est en bijection avec $\mathbb{N}$).
Il se trouve qu'on ne peut pas montrer que c'est vrai, on ne peut pas montrer que c'est faux (dans l'axiomatique dite ZFC) : on dit que cette proposition est indécidable. Ce caractère indécidable de la proposition, lui, se démontre ! En d'autres termes, on peut *décider* que cette propriété est vraie ou fausse, au choix, et en faire un nouvel axiome, qui aura lui-même de nouvelles conséquences.

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 4
Analyse réelle

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

Exercice 2. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est bornée, et qu'elle atteint ses bornes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C_n \in \mathbb{R}_+$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|^n \leq C_n e^{2|x|}.$$

Exercice 3 (Mines 2015)**.** Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe.

1. Montrer que f atteint son maximum en a ou en b.
2. Même question sans supposer que f est dérivable.

Exercice 4. (*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (Limite sup/inf)**.** Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on pose dans $\overline{\mathbb{R}}$,
$$v_n := \inf_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_n, \qquad w_n := \sup_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_n.$$

1. Etudier la monotonie de v et w, et montrer que v et w ont une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, qu'on note respectivement ℓ_1 et ℓ_2. Justifiez également que
$$\ell_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_n, \qquad \ell_2 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\in[\![n,+\infty[\![} u_n.$$
2. Calculer ℓ_1, ℓ_2 dans le cas $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.
3. Montrer que
$$\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad \ell_1 = \ell_2,$$
et qu'alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la valeur commune $\ell_1 = \ell_2$.
4. Montrer plus généralement que ℓ_1 est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite dont la limite est ℓ_1, et que si ℓ est la limite d'une suite extraite de (u_n), alors $\ell \geq \ell_1$.)* De même, ℓ_2 est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 5
Suites et séries de fonctions

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f (sur $\mathbb{R}$).

1. Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ |P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1.$$
2. Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_{n_0}$ quand $n \geq n_0$?
3. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 2. Soit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1.

Exercice 3. On pose
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la fonction ζ est bien définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
2. Etudier la monotonie et la convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4. (*) Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+.
5. (*) En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

Feuille 6

Topologie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2. (*) Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $[0,1[$ et $\mathbb{R}$. Qu'en est-il de l'existence d'une bijection continue entre $[0,1]$ et $\mathbb{R}$? Et entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$?

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie naturelle. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappelez la définition d'une partie convexe. Donnez des exemples de parties convexes, et de parties non convexes.
2. Montrer que $\overline{C}$, l'adhérence de C, est convexe.
3. (*) Montrer que $\mathring{C}$, l'intérieur de C, est convexe.

Exercice 4.

1. Quelle est la dimension de l'espace des matrices carrées $M_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) ? En déduire que $M_n(\mathbb{R})$ est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, à $\mathbb{R}^p$ pour un entier p que l'on précisera.
2. En déduire un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, exprimé soit en fonction des coefficients des matrices, soit sous forme matricielle.
3. Décrire en fonction des coefficients la signification de A_k converge vers A quand $k \to +\infty$ où $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
4. (*) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{R})$ *(On pourra utiliser pour la partie densité qu'une matrice a nécessairement un nombre fini de valeurs propres, tout en en rappelant la démonstration).*

Exercice 5. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie naturelle.

1. (a) Montrer qu'un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dense si et seulement si U rencontre tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
   (b) (*) Etant donné U et V deux ouverts denses de $\mathbb{R}^n$, montrer que $U \cap V$ est aussi un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$. Est-ce encore vrai si U et V ne sont plus nécessairement ouverts ?
2. On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est σ-compact s'il existe une suite croissante de parties compactes $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_k$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
   (b) Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, distinct de $\mathbb{R}^n$, et a un point de U.
   Montrer que $\left\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x-a\|_2 \le k+1 \ \text{ et } d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \ge \frac{1}{k+1}\right\}$ est compact ($k \in \mathbb{N}$).
   (On rappelle et on pourra utiliser sans démonstration que pour toute partie A non vide la fonction $x \mapsto d(x,A) := \inf\{\|x-\alpha\|_2, \alpha \in A\}$ est continue).
   En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
   (c) La notion de σ-compacité dépend-elle de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$?

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 7

Espaces vectoriels, Applications linéaires

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, et F, G deux s.e.v. de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $F \cup G$ soit un s.e.v. de E.

Exercice 2.

1. Montrer que $C^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans l'espace $C^0(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $C^0(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Exercice 3. On définit :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes (c'est-à-dire des applications linéaires définies et à valeurs dans un même espace vectoriel).
2. Etudiez l'injectivité et la surjectivité de f et de g.
3. Comparez avec la situation des endomorphismes en dimension finie.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient f et g deux endomorphismes de E, tels que $f \circ g = Id_E$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 5. Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. En supposant que E est de dimension finie, montrer que le résultat précédent reste valable si $\lambda = 0$.
3. En étudiant les endomorphismes "dérivée" et "primitive nulle en 0" sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que le résultat n'est plus valable si $\lambda = 0$ et $E = \mathbb{R}[X]$.

Université Paris-Dauphine 2015/2016
L3 Maths J. Lamboley
Notions Fondamentales L1/L2

Feuille 8

Algèbre linéaire, Calcul Matriciel

Les questions précédées de (*) sont un peu plus difficiles, celles précédées de (**) nécessitent plus de travail, d'astuce ou de recul sur votre programme de L1/L2.

Dans toute cette feuille, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (Déterminant de Vandermonde)**.** Etant donnés $(a_1, \ldots, a_n)$ des réels, montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = v$ où v est un vecteur donné de E. Donner le rang de f, et discuter le caractère diagonalisable de f.

Exercice 4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto AM$.

1. Déterminer le noyau de $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base.
2. f est-il surjectif ?
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 (Mines 2015)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = I_2$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, dire si M est diagonalisable, dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$. Interprêter géométriquement.

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. On sait alors qu'il existe P un polynôme annulateur de B, scindé à racines simples (sur $\mathbb{K}$).

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B^p = \begin{pmatrix} A^p & pA^p \\ 0 & A^p \end{pmatrix}$
3. En déduire une expression de $P(B)$, et montrer que 0 est la seule valeur propre de A.
4. Conclure.