Feuille 1 : Topologie, E.V.N.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans l'espace $M_n(\mathbb{R})$, muni de sa topologie naturelle.

1. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est-il un ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$?
2. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 est-il un ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Soit $E = C^1([0,1])$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{C^1}$ est une norme.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $f \in E$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme C^1 si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f'.
3. Montrer que $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1})$ est un espace de Banach.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$ (muni de sa topologie naturelle).
2. Soit E un espace de Banach. On considère $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E, muni de sa norme induite.
   (a) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|u\| < 1$, alors $Id - u$ est inversible, et que de plus
   $$\|(Id-u)^{-1}\| \leq (1 - \|u\|)^{-1}.$$
   (b) Montrer que l'ensemble des endomorphismes inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 4. *[Calculs de norme d'applications linéaires]*

1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|P\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.
   (a) Justifier qu'il s'agit bien d'une norme.
   (b) Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère $\delta_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\forall P \in E, \delta_a(P) = P(a)$. Déterminer pour quels $a \in \mathbb{R}$ la forme linéaire δ_a est continue, et calculer $\|\delta_a\|$ dans ce cas.
2. Soit $E = C^0([0,1])$.
   (a) Montrer que l'application $\delta_0 : f \in E \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ est continue si on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais n'est pas continue si on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
   (b) On munit E de la norme uniforme. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par
   $$\forall f \in E, \quad \phi(f) := \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt.$$
   Montrer que ϕ est continue, calculer sa norme, et montrer que cette norme n'est pas atteinte, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\phi(f)| = \|\phi\|$.
   (c) Refaire la question précédente en munissant E de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 5. On travaille dans $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ muni de la norme uniforme. On considère $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ défini par

$$\forall x \in \ell^\infty, \quad T(x) = T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_1/1, x_2/2, x_3/3, \ldots) = (x_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1. Montrer que T est bien défini, et linéaire continu avec $\|T\| = 1$.
2. Montrer que T est injectif, mais non surjectif.

Exercice 6. Soit $E = C^0([0,1])$ muni de la norme uniforme. On définit $T : E \to E$ par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que T est bien défini, linéaire continu, et calculer $\|T\|$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad |T^n(f)(x)| \leq \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty.$$
En déduire la valeur de $\|T^n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda Id - T$ est inversible, et que $\|(\lambda Id - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}e^{1/|\lambda|}$. Que peut-on dire pour $\lambda = 0$?

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et F un s.e.v. de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un s.e.v. de E.
2. Donner un exemple où $\overline{F} \neq F$ (il faudra choisir E également). Un tel exemple est-il possible si E est de dimension finie ?
3. Montrer l'équivalence
$$\mathring{F} \neq \emptyset \Leftrightarrow F = E.$$

Exercice 8. Soit $E = C^0([0,1])$ muni de la norme uniforme.

1. Soit $F = \{f \in E,\ f \geq 0 \text{ sur } [0,1]\}$. Montrer que F est fermé. Décrire le complémentaire de F.
2. Soit $O = \{f \in E,\ f > 0 \text{ sur } [0,1]\}$. Montrer que O est ouvert (on pourra faire deux preuves, une directe, une qui consiste à montrer que O^c est fermé).
3. On remplace E par $E = C_b^0(\mathbb{R}_+)$ (espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}_+$), et on considère cette fois-ci $O = \{f \in E,\ f > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+\}$. Cet ensemble est-il ouvert ?

Exercice 9. Soit $E = C^0([0,1])$ muni de la norme uniforme. Montrer qu'une forme linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ positive (c'est-à-dire satisfaisant $\forall f \in E, f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$) est continue.

Exercice 10. Soit (E, d) un espace métrique.

1. (a) Montrer qu'un ensemble $U \subset E$ est dense si et seulement si U rencontre tout ouvert non vide de E.
   (b) Etant donné U et V deux ouverts denses de E, montrer que $U \cap V$ est aussi un ouvert dense de E. Est-ce encore vrai si U et V ne sont plus nécessairement ouverts ?

On suppose désormais l'espace (E, d) complet.

2. *[Théorème des fermés emboîtés]* Soit (F_n) une suite de fermés non vides de E. On suppose que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, et que le diamètre de F_n converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Montrer que l'intersection des $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non vide, réduite à un singleton.
3. (*) *[Théorème de Baire]* Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
4. En déduire qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

5. *[Une application classique]* Montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Exercice 11. Soit $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles qui converge vers 0.

1. Montrer que c_0 est un s.e.v. fermé de $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ (c'est donc un espace de Banach).
2. Montrer que l'ensemble des suites à support fini (c'est-à-dire constantes égales à 0 à partir d'un certain rang) est dense dans c_0.

Exercice 12. *[Problème d'optimisation en dimension infinie].* On pose $E = C^0([0,1])$, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$\begin{array}{rccl} G: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx \end{array}$$

1. Montrer G est bien définie et continue.
2. On pose $F = \{f \in E,\ \|f\|_\infty \leq 2,\ f(0) = 1\}$. Montrer que F est fermé et borné.
3. Montrer que F n'est pas compact.
4. Etudier la question d'existence pour le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{f\in F} G(f).$$

Exercice 13. *[Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz].* On pose $E = C^0([0,1])$, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$\begin{array}{rccl} T: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & T(f) \text{ définie par : } \ \forall\, x \in [0,1],\ \ T(f)(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \sin(f(t))dt \end{array}$$

1. Montrer T est bien définie, et qu'il existe un unique élément $y \in E$ tel que $T(y) = y$.
2. Montrer que y est de classe C^1 et vérifie l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}\sin(y)$, et $y(0) = 1$.
3. Montrer que si z est une fonction C^1 satisfaisant $z' = \frac{1}{2}\sin(z)$ et $z(0) = 1$, alors $T(z) = z$. En déduire $z = y$.

Exercice 14. Soit d une métrique sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n = B\left(0, \frac{1}{n}\right)^c = \left\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]},\ \ d(f,0) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

1. Montrer qu'il existe n_0 tel que C_{n_0} contient une infinité de fonctions qui sont indicatrices d'un singleton.
2. Montrer qu'on peut choisir une suite dans C_{n_0} qui converge simplement vers 0.
3. En déduire qu'il n'existe pas de métrique sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$ telle que la convergence pour cette métrique soit équivalente à la convergence simple sur $[0,1]$.

Exercice 15. On considère l'espace $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On pose

$$\forall f,g \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \ d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, \|f-g\|_{\infty,[-n,n]}).$$

   Montrer que d est une métrique, et que la convergence pour d équivaut à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de norme sur $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que la convergence pour cette norme soit équivalente à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Université Paris-Dauphine 2014/2015
L3 Maths J. Lamboley
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Feuille 2 : Espaces L^p

Sauf précision contraire, Ω désigne un borélien de $\mathbb{R}^N$, on travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, et la tribu considérée est celle des boréliens.

Exercice 1. Soient f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On considère les fonctions f^+, f^- définies par :

$$f^+(x) = \max(0, f(x)), \quad f^-(x) = \max(0, -f(x)).$$

1. Montrer que f^+, f^- sont mesurables, et que pour tout x de Ω, $f^+(x)f^-(x) = 0$ et $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ (les fonctions f^+ et f^- sont appelées respectivement partie positive et partie négative de f). Exprimer $|f|$ en fonction de f^+ et f^-.
2. Montrer que les définitions de f^+ et f^- sont légitimes et que les mêmes propriétés restent vraies presque partout si f, g sont des classes d'équivalence de fonctions (disons $f, g \in L^1(\Omega)$).

Exercice 2. Soit Ω un ensemble borélien tel que $|\Omega| = \int_\Omega 1 \, \mathrm{d}x < +\infty$. Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

1. Montrer que si Ω est borné alors $|\Omega| < \infty$. Donner un exemple de Ω non borné tel que $|\Omega| < +\infty$. Et Ω un *ouvert* non borné tel que $|\Omega| < \infty$?
2. Montrer les inclusions
$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$
(On pourra donner une solution qui n'utilise pas l'inégalité de Hölder).
3. Montrer que si $u \in L^q(\Omega)$, alors $u \in L^p(\Omega)$ et
$$||u||_p \leq (|\Omega|)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} ||u||_q.$$
En déduire que l'injection de $L^q(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est continue (et donc que la convergence dans $L^q(\Omega)$ implique la convergence dans $L^p(\Omega)$).
4. Soit $u \in L^\infty(\Omega)$, montrer que $\lim_{p \to +\infty} ||u||_p = ||u||_\infty$.
5. On ne suppose plus que Ω est de mesure finie. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ on a
$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$
6. Ici on prend $\Omega = \mathbb{R}$ (de mesure infinie). Montrer qu'aucune inclusion entre $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ (pour $p \neq q$) n'est satisfaite.

Exercice 3. On considère des réels p, q et r tels que $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Montrer que $fg \in L^r(\Omega)$ et que

$$||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, \infty[$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$, et $f \in L^p(\Omega)$.

1. Est-il vrai que si $\|f_n\|_p \underset{n \to \infty}{\to} \|f\|_p$, alors f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$? Et la réciproque ?
2. Est-il vrai que si $f_n \underset{n \to \infty}{\to} f$ *p.p.*, alors f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$?
3. Montrer que si on suppose $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans $L^p(\Omega)$ et $f_n \underset{n \to \infty}{\to} f$ *p.p.*, alors $f \in L^p(\Omega)$.

4. On suppose ici $p = 1$, $f_n \to f$ *p.p.* et $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$ quand $n \to \infty$. Montrer que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ dans $L^1(\Omega)$. *(On pourra introduire $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$).*

Exercice 5. Soient Ω un borélien de $\mathbb{R}^N$ non nécessairement borné et $p \in [1, +\infty[$.

1. Montrer que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et que pour tout $f \in L^p(\Omega)$

$$||f||_p \leq (||f||_1)^{\frac{1}{p}}(||f||_\infty)^{1-\frac{1}{p}}.$$

2. Soit $f \in L^p(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, g_n \in L^\infty(\Omega)$ et g_n est à support compact.
(Ici on demande de répondre à la question sans utiliser le résultat de densité de $C_c^0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$)
3. En déduire que $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ et que $L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 6 (Loi des grands nombres L^4)**.** Soient $X_1, X_2 \ldots, X_n, \ldots$ des v.a.i.i.d. centrées admettant un moment d'ordre 4. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n^4)$ en fonction des moments d'ordre 2 et 4 des X_i.
2. En déduire que S_n/n converge vers 0 dans L^4 et dans L^1.
3. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right) < \infty.$$

et en déduire que S_n/n converge p.s. vers 0
4. Montrer que si les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont plus équidistribuées, mais que $(\mathbb{E}(X_n^4))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée uniformément en n (on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^4), le résultat reste vrai.

Exercice 7 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 8. 1. Soient λ et μ deux nombres réels. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ et $g : x \mapsto e^{\mu x}$ n'admettent jamais de produit de convolution.
2. On pose $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-2|x|}$. Calculer $f \star g$.
3. On pose $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ et $g : x \mapsto \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Calculer $f \star g$.
4. Montrer que si f est à support compact et g est T-périodique, $T \in \mathbb{R}$, alors $f \star g$ existe et est T-périodique.

Exercice 9. Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty]$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ où q est le conjugué de p.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto (f * g)(x)$ est bien définie en tout point de $\mathbb{R}$, et est continue, bornée, et que $||f * g||_\infty \leq ||f||_p ||g||_q$.
2. Montrer que si $p \in]1, \infty[$, alors $f \star g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.
Indication : pensez d'abord aux fonctions continues à support compact.
3. Si $p \in \{1, \infty\}$, a-t-on encore $f \star g(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$?

Exercice 10 (Continuité des translations dans L^p)**.** Soient $p \in [1, +\infty[$, f et $g \in L^p(\mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit la fonction $\tau_a f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tau_a f(x) = f(x - a)$ pour presque tout x.

1. Montrer que la définition de $\tau_a f$ est légitime.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$||\tau_a f||_p = ||f||_p, \quad ||\tau_a f - \tau_b f||_p = ||\tau_{a-b} f - f||_p, \quad ||\tau_a f - \tau_a g||_p = ||f - g||_p.$$

3. La fonction f étant fixée dans $L^p(\mathbb{R})$, on considère l'application $\Lambda_f : \mathbb{R} \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$, définie par $\Lambda_f(a) = \tau_a f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \in C_c(\mathbb{R})$, montrer alors que Λ_f est uniformément continue.
4. En déduire que lorsque $f \in L^p(\mathbb{R})$, Λ_f est uniformément continue.

Exercice 11. 1. On définit g sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) := e^{-1/t} \mathbb{1}_{t>0}$. Démontrer que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^N$ par $h(x) = g(1 - \|x\|^2)$, où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne, est C^∞.
3. Soit une suite de nombres (ε_n) strictement positifs convergeant vers 0. Montrer qu'en posant $C = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)dx$, la suite de fonctions définies par

$$\rho_n(x) := (C\varepsilon_n^N)^{-1} h(\varepsilon_n^{-1} x)$$

est une suite régularisante.
4. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. On suppose que g est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_n * g(x_0) = g(x_0).$$

Exercice 12. Soit A et B deux borélien de $\mathbb{R}$, de mesures (de Lebesgue) finies non nulles.

1. Donner un exemple de borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie non nulle, et d'intérieur vide.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ est bien définie, continue, intégrable, et calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$.
3. On définit $A + B = \{a + b, a \in A, \ b \in B\}$. Déduire de ce qui précède que $A + B$ est d'intérieur non vide.

Exercice 13 (Non densité de C_c^0 dans L^∞)**.** 1. Montrer que $C_c^0(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

2. Identifier l'adhérence de $C_c^0(\mathbb{R})$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ et montrer que l'espace obtenu est un espace de Banach.

Feuille 3 : Transformation de Fourier

On définit la transformée de Fourier d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

Exercice 1. 1. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{-|x|}, \qquad f_2(x) = e^{-a|x|}, a > 0,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \le 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1/2 \end{cases}, \quad f_4(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad |x| \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases},$$

$$f_5(x) = e^{-x^2}, \qquad f_6(x) = e^{-ax^2},\ a > 0.$$

(pour f_5, on pourra trouver une équation différentielle satisfaite par $\widehat{f_5}$).

2. Calculer $f_3 * f_3$, et en déduire un nouveau calcul de $\widehat{f_4}$.
3. En appliquant l'égalité de Plancherel à f_4, montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^4 dt = 2/3$.

Exercice 2 (Lien entre régularité de f et comportement en l'infini de $\widehat{f}$, et vice-versa)**.**

1. Soit f une fonction réelle dans $C^1_c(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\widehat{f'}\,(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{R},$$

   et en déduire $\widehat{f}(\xi) = \underset{|\xi|\to\infty}{o} \left(\frac{1}{|\xi|} \right)$.
2. Même question en supposant seulement $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
3. Généraliser la question précédente à l'ordre k où $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Donner une condition suffisante sur f pour avoir $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
5. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, et si $g : x \mapsto xf(x)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^1 et

$$\widehat{f}\,'(\xi) = -i\, \widehat{g}(\xi).$$

   Généraliser à l'ordre $k \in \mathbb{N}$.
6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction $\xi \mapsto \xi\widehat{f}(\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f coïncide presque partout avec une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
7. Tester ces résultats sur les fonctions $(f_i)_{1\le i\le 6}$ et $(\widehat{f_i})_{1\le i\le 6}$ de l'exercice 1.

Exercice 3. On définit l'ensemble de fonctions $S(\mathbb{R})$ par :

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2, \exists\, C_{n,m}, \forall\, x \in \mathbb{R}, |x^n f^{(m)}(x)| \le C_{n,m}\}.$$

1. Montrer que $C^\infty_c(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$, et que $x \mapsto e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $p \in [1,\infty]$, $S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1,\infty[$.

3. Soit $f \in S(\mathbb{R})$, montrer que f' et $x \mapsto xf(x)$ sont également dans $S(\mathbb{R})$. En déduire que pour tout n et m dans $\mathbb{N}$, $x^n f^{(m)}(x) \in S(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$.
5. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & S(\mathbb{R}) & \to & S(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \widehat{f} \end{array} \right.$ est une bijection.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $e \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad e * f = f.$$

(on dit que l'algèbre $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot, *)$ n'a pas d'élément unité pour la convolution).

Exercice 5 (Extension à $L^2(\mathbb{R})$)**.** Dans cet exercice, on généralise à $L^2(\mathbb{R})$ des propriétés connues pour des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{\tau_\alpha f}(\xi) = e^{-i\xi\alpha}\widehat{f}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, que la fonction $f * g$ est bien définie presque partout, et que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.
3. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$,
$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\,\widehat{g} \ \ \textit{p.p.}$$
Cette formule a-t-elle un sens si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$?

Exercice 6 (Transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^N$)**.** Pour une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe C^2, on définit $\Delta u = \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Calculer $\widehat{\Delta u}$ pour $u \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 7 (Équation de la chaleur.)**.** On se propose de résoudre le problème suivant : trouver une fonction $(t, x) \mapsto u(t, x)$ définie pour $(t, x) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation suivante :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (t, x) \in]0, \infty[\times\mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

1. On suppose que u est solution de $(*)$, et on pose $\widehat{u}(t, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} u(t, x) e^{-i\xi x}\, dx$. Ecrire formellement le système satisfait par $\widehat{u}$ et le résoudre. En déduire une expression de u sous forme de convolution.
2. On définit u la fonction obtenue formellement à la question précédente. Montrer que $u \in C^\infty(]0, \infty[\times\mathbb{R})$ si $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, alors $\lim_{t\to 0} u(t, x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'on peut ainsi prolonger u par continuité à $[0, \infty[\times\mathbb{R}$. Ainsi u est une solution de $(*)$.

Exercice 8 (Fonction caractéristique)**.** Si X est une variable aléatoire réelle, on définit sa fonction caractéristique :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

1. Expliquer que φ_X ne dépend que de la loi de X. On peut donc parler de la fonction caractéristique de la loi d'une variable aléatoire.
2. Calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. *(On pourra utiliser l'exercice 1.)*
3. Calculer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes ayant pour lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. *(On rappelle que la fonction caractéristique caractérise la loi : si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors X et Y ont même loi)*
4. Montrer que si X a un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$, alors φ_X est de classe C^k, et écrire un développement limité de φ_X à l'ordre k en 0.

Université Paris-Dauphine 2014/2015
L3 Maths J. Lamboley
Topologie et Analyse Fonctionnelle

Feuille 4 : Séries de Fourier

On définit les coefficients de Fourier d'une fonction localement intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique par

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

On définit aussi

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad e_n(x) := e^{inx}, \quad \text{et} \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n.$$

Exercice 1. Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T-périodique, localement intégrable. Montrer que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Soit $f \in L^1([0, 2\pi])$.

1. On pose $\widetilde{f}(t) = f(-t)$. Montrer que $\widehat{\widetilde{f}}(n) = \widehat{f}(-n)$ et que $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(n)}$.
2. Supposons f paire. Montrer que
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t, \qquad S_N(f)(t) = \widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}(n) \cos(nt)$$
3. On suppose f impaire. Montrer que
$$\widehat{g}(n) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t, \qquad S_N(g)(t) = \widehat{g}(0) + 2i \sum_{n=1}^{N} \widehat{g}(n) \sin(nt).$$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\tau_a f(x) = f(x - a)$. Montrer que $\widehat{\tau_a f}(n) = e^{-ina} \widehat{f}(n)$ et $\widehat{e_k f}(n) = \widehat{f}(n - k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.

1. Calculer la série de Fourier des deux fonctions 2π-périodiques suivantes :
$f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$; $g(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$ et $g(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0[$.
2. Calculer la série de Fourier de la fonction périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$. En déduire le calcul des séries
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 4. Soit f une fonction continue par morceaux et 2π-périodique.

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{|\widehat{f}(n)|}{n}$ est convergente.
2. On suppose que la série de Fourier de f converge uniformément. Montrer que cette convergence a lieu vers f (qu'en déduit-on sur f ?)

3. On suppose que f est continue et C^1 par morceaux. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément.

Exercice 5. Soit f une fonction continue 2π-périodique.

1. Si $f \in C^1$, montrer que $\widehat{(f')}(n) = in\widehat{f}(n)$.
2. Si $f \in C^k$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \widehat{f}(n) = 0$.
3. Pour $k \geq 2$, on suppose qu'il existe $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k}$ si $n \geq n_0$. Montrer que $f \in C^{k-2}$.

Exercice 6. Soit la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Déterminer deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

2. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k = 1, 2, 3$.

Exercice 7. Pour $\varepsilon \in]0,\pi[$, on définit $\sigma_\varepsilon(t) = 1$ si $|t| \leq \varepsilon$ et 0 si $\varepsilon < |t| \leq \pi$. On prolonge σ_ε sur $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique.

1. Calculer $\widehat{\sigma_\varepsilon}$ et $S_N(\sigma_\varepsilon)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(\sigma_\varepsilon)(\varepsilon) = 1/2$.
3. En déduire que $\sum_1^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$, où $0 < a < 2\pi$.

Exercice 8. Pour $\varepsilon \in]0,\pi[$, on définit $\delta_\varepsilon(t) = 1 - |t|/\varepsilon$ si $|t| \leq \varepsilon$ et 0 si $\varepsilon < |t| \leq \pi$. On prolonge δ_ε sur $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique.

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \delta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 2\sum_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos(n\varepsilon)}{n^2\pi\varepsilon}\cos(nt).$$

2. Par un choix convenable de ε et t, montrer que

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 9 (Équation de la chaleur)**.** Soit $Q = [0,+\infty[\times]0,L[$; $(t,x) \in Q$. Soit $h \in C^1([0,L])$ telle que $h(0) = h(L) = 0$. On considère le problème suivant : trouver une fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$ dans $C^0(\overline{Q}) \cap C^\infty(Q)$ telle que :

(1) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \ \forall (t,x) \in]0,\infty[\times]0,L[$,

(2) $u(t,0) = u(t,L) = 0$, $\forall t \geq 0$,

(3) $u(0,x) = h(x)$, $\forall x \in [0,L]$.

1. Trouver une suite de fonctions solutions de (1) et (2) sous la forme $u_n(t,x) = f(t)g(x)$.
2. Ces solutions satisfont-elles (3) en général ?
3. Montrer que pour toute suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction $\sum_{n=0}^{N} a_n u_n(t,x)$ est solution de (1) et (2).
4. En déduire une solution de (1), (2) et (3) par un choix convenable de $(a_n)_n$.

Feuille 5 : Espaces de Hilbert

Exercice 1 (Identité du parallélogramme)**.** Soit H un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$ pour simplifier) dont la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme, c'est à dire pour tout $u, v \in H$ on a :

$$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Montrer que H est un Hilbert.

Exercice 2. Montrer que les espaces $L^p(\mathbb{R})$ ne sont pas des espaces de Hilbert si $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$.

Exercice 3. On considère l'espace $\ell^2(\mathbb{C})$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite f_k par

$$f_k = (1, a^k, a^{2k}, a^{3k}, \cdots, a^{nk}, \cdots).$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k \in \ell^2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'espace $Vect(f_k, k \in \mathbb{N}^*)$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{C})$.

Exercice 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Considérons $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ tel que

$$\|K\|^2_{L^2([a,b]^2)} = \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y < 1.$$

1. Soit $h \in L^2([a, b])$. Montrer que $\left(x \mapsto \int_a^b K(x, y)h(y) \,\mathrm{d}y\right)$ est bien définie et appartient à $L^2([a, b])$.
2. On définit la fonctionnelle
$$T \;:\; L^2([a, b]) \longrightarrow L^2([a, b])$$
comme suit : pour $h \in L^2([a, b])$, Th est la fonction :
$$\left(x \mapsto Th(x) = \int_a^b K(x, y)h(y) \,\mathrm{d}y\right)$$
Montrer que T est une application linéaire continue.
3. Soit $g \in L^2([a, b])$. Montrer qu'il existe un unique $h \in L^2([a, b])$ tel que
$$h - Th = g.$$

Exercice 5 (Polynômes de Tchebycheff)**.** On définit la fonction θ sur $[-1, 1]$ par $\theta(x) = \arccos(x)$, puis on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions T_n et U_n (toujours sur $[-1, 1]$) par

$$T_n(x) = \cos(n\theta(x)) \quad \text{et} \quad U_n(x) = \frac{\sin((n + 1)\theta(x))}{\sin(\theta(x))}$$

1. Calculer T_n et U_n pour $n = 0, 1, 2, 3$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \forall\, x \in [-1,1]$$

et que

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \quad \forall\, x \in [-1,1].$$

En déduire que T_n et U_n sont des polynômes de degré n et ont la même parité que n. Les T_n et les U_n sont appelés respectivement polynômes de Tchebycheff de première et de seconde espèce.

3. Vérifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite de polynômes orthogonaux dans $L^2([-1,1],p)$ où le poids p est défini par $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (respectivement par $p(x) = \sqrt{1-x^2}$).

Exercice 6 (Polynômes de Legendre)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction polynômiale P_n définie pour $x \in [-1,1]$ par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

1. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de $L^2([-1,1])$.
3. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1])$.
4. Trouver les valeurs des réels a, b et c qui minimisent l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Exercice 7 (L'espace de Sobolev $h^1(\mathbb{N})$)**.** On travaille dans

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 < \infty \right\}$$

que l'on munit de son produit scalaire usuel. On pose

$$h^1(\mathbb{N}) := \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\text{ tel que }\; \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 u_n^2 < \infty \right\}.$$

On note

$$\forall\,(a,b) \in h^1(\mathbb{N})^2, \quad \langle a,b\rangle_{h^1(\mathbb{N})} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1+n^2)a_n b_n.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite $\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle dans $\ell^2(\mathbb{N})$? Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ est-elle dans $h^1(\mathbb{N})$?
2. Montrer que l'espace $h^1(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h^1(\mathbb{N})}$ est un espace de Hilbert. La norme associée à ce produit scalaire est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$?
3. Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est un sous-espace dense de $\ell^2(\mathbb{N})$.
4. Calculer la distance $d(u, h^1(\mathbb{N}))$ pour $u \in \ell^2(\mathbb{N})$.
5. Soit $B_{h^1(\mathbb{N})}(0,1) = \{a \in h^1(\mathbb{N})\ ,\ \|a\|_{h^1(\mathbb{N})} \leq 1\}$. Montrer que $B_{h^1(\mathbb{N})}(0,1)$ est un compact de $\ell^2(\mathbb{N})$.
Indication : *On pourra utiliser le procédé diagonal de Cantor, puis le théorème de convergence dominée et le lemme de Fatou.*