Contrôle continu du 6 octobre 2025

Les documents, calculatrices, téléphones ou autres appareils connectés sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 1h

Exercice 1 (déterminant d'une matrice par blocs, 3 points). Soit m et n deux entiers naturels non nuls et M une matrice s'écrivant par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où A appartient à $GL_m(\mathbb{R})$ et D appartient à $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice triangulaire supérieure par blocs N telle que

$$MN = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & S \end{pmatrix},$$

où $S = D - CA^{-1}B$.

2. En déduire que

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Exercice 2 (4 points). Soit la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et u l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, qui à une matrice M associe la matrice AM.

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Déterminer la matrice représentative de u dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer les valeurs propres de u. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 3 (7 points). Réduire (c'est-à-dire diagonaliser ou, si cela n'est pas possible, trigonaliser) les matrices réelles suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (3 points). Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On suppose que u soit diagonalisable. Montrer que u et v commutent entre eux si et seulement si chaque sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 5 (3 points). Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)(X) = P(1 - X).$$

Montrer que u est un automorphisme et déterminer ses valeurs propres.