Corrigé (succinct) du contrôle continu du 6 octobre 2025

Exercice 1 (déterminant d'une matrice par blocs). Soit m et n deux entiers naturels non nuls et M une matrice s'écrivant par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où A appartient à $GL_m(\mathbb{R})$ et D appartient à $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice triangulaire supérieure par blocs N telle que

$$MN = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & S \end{pmatrix},$$

où $S = D - CA^{-1}B$.

On cherche la matrice N sous la forme

$$N = \begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$MN = \begin{pmatrix} AE & AF + BG \\ CE & CF + DG \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système d'équations matricielles

$$\begin{aligned} AE &= A \\ AF + BG &= 0 \\ CE &= C \\ CF + DG &= D - CA^{-1}B, \end{aligned}$$

et au choix $E = I_m$, $F = -A^{-1}B$ et $G = I_n$.

2. En déduire que

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Les matrices N et MN étant respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure par blocs, leurs déterminants sont donnés par le produit des déterminants de leurs blocs diagonaux. On a ainsi $\det(N) = \det(I_m)\det[I_n) = 1$ et $\det(MN) = \det(A)\det(S) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. On conclut en utilisant que $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et u l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, qui à une matrice M associe la matrice AM.

1. Montrer que u est un endomorphisme.

L'application allant de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, on doit seulement montrer qu'elle est linéaire. Soit M et N deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ et α un nombre réel. On a

$$u(\alpha M + N) = A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha\, u(M) + u(N).$$

2. Déterminer la matrice représentative de u dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

On a

$$u(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ u(E_{21}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont on déduit que la matrice représentative est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les valeurs propres de u. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

La matrice a pour polynôme caractéristique $\chi(X) = X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 12X + 9$, dont -1 est racine évidente. On a donc $\chi(X) = (X+1)(X^3-5X^2+3X+9)$, où -1 est racine évidente du quotient. On trouve finalement $\chi(X) = (X+1)^2(X^2-6X+9) = (X+1)^2(X-3)^2$. Les valeurs propres de u sont donc -1 et 3. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

étant toutes deux clairement de rang égal à 2, on en déduit que les deux sous-espaces propres associés sont de dimension égal à E et l'endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 3. Réduire (c'est-à-dire diagonaliser ou, si cela n'est pas possible, trigonaliser) les matrices réelles suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on a $\chi_A(X) = (X+1)(X-2)^2$. On détermine le sous-espace propre associé à -1. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \in E_{-1} \iff x_1 = 3x_3, \ x_2 = -5x_3,$$

d'où $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. On détermine ensuite le sous-espace propre associé à 2. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \in E_2 \iff x_1 = 0 \text{ et } x_2 = x_3,$$

d'où $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ et la matrice A n'est donc pas diagonalisable. Son polynôme caractéristique étant scindé, elle est trigonalisable. On complète la famille libre formée par les deux vecteurs obtenus en une base, par exemple avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$. On a alors

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite $\chi_B(X) = (X+1)(X^2-4X+6)$, qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. On ne peut donc réduire la matrice B.
Enfin, on a $\chi_C(X) = (X-1)(X-2)^2$. On détermine le sous-espace propre associé à 1. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \in E_1 \iff x_1 = x_2 = -x_3,$$

d'où $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. On détermine ensuite le sous-espace propre associé à 2. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^\top \in E_2 \iff 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0,$$

d'où $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ et la matrice C est donc diagonalisable. On a $C = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On suppose que u soit diagonalisable. Montrer que u et v commutent entre eux si et seulement si chaque sous-espace propre de u est stable par v.
On sait par le cours que si u et v commutent entre eux, alors tout sous-espace vectoriel de la forme $\mathrm{Ker}(u-\lambda id_E)$, avec λ un scalaire, est stable par v, ce qui montre le sens direct de l'équivalence. On suppose à présent que chaque sous-espace propre de u soit stable par v. L'endomorphisme u étant diagonalisable, on a $E=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}\ker(u-\lambda id_E)$ et on peut donc écrire

$$\forall x\in E,\ x=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}x_\lambda,\ x_\lambda\in\ker(u-\lambda id_E).$$

Il vient alors, pour tout vecteur x de E,

$$\begin{aligned}u\circ v(x)=u\circ v\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}x_\lambda\right)&=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}u\circ v(x_\lambda)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}u(v(x_\lambda))=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}\lambda v(x_\lambda))\\&=v\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}\lambda x_\lambda\right)=v\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}u(x_\lambda)\right)=v\left(u\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}x_\lambda\right)\right)=v\circ u\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}x_\lambda\right)=v\circ u(x).\end{aligned}$$

Exercice 5). Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, défini par

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\ u(P)(X)=P(1-X).$$

Montrer que u est un automorphisme et déterminer ses valeurs propres.
On a

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\ u^2(P)(X)=P(1-(1-X))=P(X),$$

d'où u est involutif et donc inversible. On en déduit que $X^2-1=(X+1)(X-1)$ est un polynôme annulateur de u, -1 et 1 sont par conséquent des valeurs propres possibles de u. On montre alors facilement que tout polynôme constant non nul (ou plus généralement tout polynôme non nul dont la fonction associée est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$) est un vecteur propre de u associée à 1 et que le polynôme $P(X)=X-\frac{1}{2}$ (ou plus généralement tout polynôme non nul dont la fonction associée est antisymétrique par rapport à $\frac{1}{2}$) est un vecteur propre de u associée à -1.
On peut tout aussi bien dire que u est une symétrie vectorielle pour arriver aux mêmes conclusions.