

Contrôle continu du 24 novembre 2025

Les documents, calculatrices, téléphones ou autres appareils connectés sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 1h

Exercice 1 (7 points). Soit α et β deux nombres réels et q l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, q(A) = \alpha(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \beta(a_{11} + a_{22})^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Écrire la matrice de q relativement à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le noyau de q , en discutant selon les valeurs des nombres α et β .
4. Montrer que $q(A)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\text{tr}(A^2)$ et $\text{tr}(A)^2$.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Cayley–Hamilton.
5. En utilisant cette dernière expression pour écrire de deux manières la forme polaire de q et en supposant α non nul, en déduire l'identité

$$\forall (A, B) \in (M_2(\mathbb{R}))^2, \det(A + B) - \det(A) - \det(B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B) - \text{tr}(AB).$$

Exercice 2 (réduction de Gauss, 7 points). Effectuer une réduction de Gauss de la forme quadratique

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, q(x) = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 4x_4^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 10x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4,$$

et en déduire la signature de q , une base orthogonale pour q et la matrice de q relativement à cette base.

Exercice 3 (restriction d'une forme quadratique et sous-espace totalement isotrope, 7 points). Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, q une forme quadratique sur E et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Expliciter le noyau de la restriction q à F , notée $q|_F$, et en déduire que la forme $q|_F$ est non dégénérée si et seulement si $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

Dans le reste de l'exercice, on suppose la forme q non dégénérée (sur E).

2. Montrer que la restriction $q|_F$ est non dégénérée si et seulement si $E = F \oplus F^\perp$.

On suppose enfin que F est *totalement isotrope* pour q , c'est-à-dire que la restriction $q|_F$ est la forme nulle.

3. Montrer que $F \subset F^\perp$ et en déduire que $2 \dim(F) \leq \dim(E)$.
4. Donner un exemple pour lequel on a égalité dans l'inégalité précédente.