

Contrôle continu du 5 octobre 2026

Les documents, calculatrices, téléphones ou autres appareils connectés sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 1h

Exercice 1 (4 points). Soit n un entier naturel non nul et M et N deux matrices d'ordre n . Montrer que $I_n - NM$ est inversible si $I_n - MN$ est inversible et qu'on a

$$(I_n - NM)^{-1} = I_n + N(I_n - MN)^{-1}M.$$

Exercice 2 (aucune valeur propre, 4 points). Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle continues et u l'endomorphisme de E défini par

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que u ne possède pas de valeurs propres.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en considérant successivement les cas d'une valeur propre nulle et d'une valeur propre non nulle.

Exercice 3 (7 points). Réduire, c'est-à-dire diagonaliser ou trigonaliser, les matrices réelles suivantes lorsque cela est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (polynômes annulateurs, 2 points). Soit n un entier naturel non nul. Étant donnée une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on considère l'endomorphisme u de $M_n(\mathbb{R})$, défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), u(M) = AM.$$

Montrer qu'un polynôme est annulateur de u si et seulement s'il est annulateur de A .

Exercice 5 (endomorphisme induit et polynôme minimal, 3 points). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que le polynôme minimal de l'endomorphisme induit par u sur F divise le polynôme minimal de u .