

Corrigé (succinct) du contrôle continu du 5 octobre 2026

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul et M et N deux matrices d'ordre n . Montrer que $I_n - NM$ est inversible si $I_n - MN$ est inversible et qu'on a

$$(I_n - NM)^{-1} = I_n + N(I_n - MN)^{-1}M.$$

La matrice $I_n - MN$ est inversible si et seulement si 0 ne fait pas partie de ses valeurs propres, ce qui signifie encore que 1 n'est pas valeur propre de MN . On sait par le cours que les matrices MN et NM ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres. Par conséquent, si 1 n'est pas valeur propre de MN , 1 n'est pas non plus valeurs propre de NM et la matrice $I_n - NM$ est inversible. Enfin, le calcul

$$\begin{aligned} (I_n + N(I_n - MN)^{-1}M)(I_n - NM) &= I_n + N(I_n - MN)^{-1}M - NM - N(I_n - MN)^{-1}MNM \\ &= I_n + N(I_n - MN)^{-1}(I_n - (I_n - MN) - MN)M \\ &= I_n, \end{aligned}$$

montre que l'inverse de $I_n - NM$ est bien de la forme donnée.

Exercice 2 (aucune valeur propre). Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle continues et u l'endomorphisme de E défini par

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que u ne possède pas de valeurs propres.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en considérant successivement les cas d'une valeur propre nulle et d'une valeur propre non nulle.

Si 0 est une valeur propre de u , associée au vecteur propre f , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) dt = 0,$$

ce qui signifie que la primitive de f s'annulant en 0 est la fonction nulle. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, il découle du théorème fondamental de l'analyse que f est la dérivée d'une fonction constante, et donc la fonction nulle. Si le réel non nul λ est une valeur propre de u , associée au vecteur propre f , on montre, avec le même théorème, que la primitive de f s'annulant en 0, notée F , est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = \frac{1}{\lambda} F(x),$$

qui a pour solution générale

$$F(x) = C e^{\frac{x}{\lambda}},$$

où la valeur de la constante C est fixée par la valeur en $x = 0$ de F . Cette condition implique que $C = 0$ et f est de nouveau la dérivée d'une fonction constante. Un vecteur propre ne pouvant être nul, on arrive dans les deux cas à une absurdité et l'endomorphisme n'admet donc pas de valeur propre.

Exercice 3. Réduire, c'est-à-dire diagonaliser ou trigonaliser, les matrices réelles suivantes lorsque cela est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2+1).$$

Ce polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et il n'est donc pas possible de réduire la matrice A .

On a ensuite

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -X & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-4)(X-1)(X-2) + X(X-2) = (X-2)^3.$$

La matrice B possède donc une unique valeur propre, qui est 2. On détermine le sous-espace propre associé E_2 .

On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2 \iff BX = 2X \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

L'espace E_2 est donc engendré par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la matrice B n'est pas diagonalisable (ceci était prévisible

puisque, si B était diagonalisable, elle serait semblable, et donc égale, à $2I_3$). Elle est en revanche trigonalisable, puisque le polynôme χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $B = PTP^{-1}$. La première colonne de P peut être formée par V_1 . Pour obtenir la seconde colonne, on

complète la famille formée par V_1 en une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on cherche V_2 telle

que $V_2 = \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3$ et $BV_2 = t_{12}V_1 + 2V_2$, avec α_2, α_3 et t_{12} des réels à déterminer. On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 - t_{12} = 0, \\ 2\alpha_2 - t_{12} = 0 \end{cases}$$

que $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$ et $t_{12} = 2$ vérifient. On trouve alors $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'on complète ensuite la famille

$\{V_1, V_2\}$ par le vecteur U_3 afin d'obtenir une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche alors V_3 telle que $V_3 = \alpha_3 U_3$ et $BV_3 = t_{13}V_1 + t_{23}V_2 + 2V_3$, où α_3, t_{13} et t_{23} sont des réels à déterminer. On a le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha_3 - t_{13} - t_{23} = 0 \\ -\alpha_3 - t_{13} + t_{23} = 0, \\ -t_{13} = 0 \end{cases}$$

que $\alpha_3 = 1, t_{13} = 0$ et $t_{23} = 1$ vérifient, d'où $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a enfin

$$\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & 1 \\ -2 & X-4 & -2 \\ 1 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X-4)(X^2-6X+8) = (X-2)(X-4)^2.$$

La matrice C possède donc deux valeurs propres, 2 et 4, d'ordres de multiplicité algébrique respectivement égaux à 1 et 2. Le polynôme caractéristique de C est donc scindé sur $\mathbb{R}$ et, pour savoir si C est diagonalisable, il faut

caractériser le sous-espace propre E_4 afin de déterminer sa dimension. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_4 \iff CX = 4X \iff \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = -x_3.$$

On en déduit que $\dim(E_4) = 2$, d'où la matrice est diagonalisable : il existe une matrice inversible P , dont les colonnes sont formées de vecteurs propres de C , et une matrice diagonale D , dont les coefficients diagonaux sont

les valeurs propres de C , telles que $C = PDP^{-1}$. Une base de ce sous-espace est donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. On

a, d'autre part,

$$CX = 2X \iff \begin{cases} x_1 & -x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & +2x_3 = 0 \\ -x_1 & +x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = x_3,$$

d'où $E_2 = \text{Vect} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$, et donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (polynômes annulateurs). Soit n un entier naturel non nul. Étant donnée une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on considère l'endomorphisme u de $M_n(\mathbb{R})$, défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), u(M) = AM.$$

Montrer qu'un polynôme est annulateur de u si et seulement s'il est annulateur de A .

Il est facile de montrer, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall M \in M_n(\mathbb{R}), u^k(M) = A^k M.$$

Par conséquent, si $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ est un polynôme annulateur de u , on a

$$\begin{aligned} P(u) = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))} &\iff \forall M \in M_n(\mathbb{R}), P(u)(M) = 0_n \\ &\iff \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \sum_{k=0}^p a_k u^k(M) = 0_n \\ &\iff \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \sum_{k=0}^p a_k A^k M = 0_n \\ &\iff \forall M \in M_n(\mathbb{R}), \left(\sum_{k=0}^p a_k A^k \right) M = 0_n \\ &\iff \forall M \in M_n(\mathbb{R}), P(A)M = 0_n \\ &\iff P(A) = 0_n. \end{aligned}$$

Exercice 5 (endomorphisme induit et polynôme minimal). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que le polynôme minimal de l'endomorphisme induit par u sur F divise le polynôme minimal de u .

Par définition, le polynôme minimal de u est annulateur de u . On a donc

$$\forall x \in E, \mu_u(u)(x) = 0_E,$$

et, en particulier,

$$\forall x \in F, \mu_u(u|_F)(x) = \mu_u(u)(x) = 0_E.$$

Le polynôme minimal de u est donc annulateur de $u|_F$ et, puisque le polynôme minimal d'un endomorphisme divise tout polynôme annulateur de cet endomorphisme, on a prouvé l'assertion.