Corrigé (succinct) de l'examen du 12 janvier 2022

Exercice 1 (caractérisation d'une isométrie vectorielle). Soit E un espace préhilbertien. Montrer qu'une application u de E dans E est une isométrie vectorielle si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Notons $\|\cdot\|$ la norme associé au produit scalaire de E. Supposons que u est une isométrie vectorielle de E. Par définition, c'est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|.$$

On a alors, en vertu de l'identité de polarisation associée au produit scalaire sur E et au carré de la norme associée,

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \langle x, y\rangle .\end{aligned}$$

Réciproquement, en choisissant $x = y$ dans l'égalité de l'énoncé, on trouve que

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

et l'application u préserve la norme. Il reste à montrer qu'elle est linéaire. On a, pour tout réel λ et tous vecteurs x et y de E,

$$\begin{aligned}\|u(\lambda x+y) - \lambda u(x) - u(y)\|^2 &= \|u(\lambda x+y)\|^2 + \|\lambda u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2\langle u(\lambda x+y), \lambda u(x)\rangle - 2\langle u(\lambda x+y), u(y)\rangle + 2\langle \lambda u(x), u(y)\rangle\\ &= \|u(\lambda x+y)\|^2 + \lambda^2\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2\lambda\langle u(\lambda x+y), u(x)\rangle - 2\langle u(\lambda x+y), u(y)\rangle + 2\lambda\langle u(x), u(y)\rangle\\ &= \|\lambda x+y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\lambda\langle \lambda x+y, x\rangle - 2\langle \lambda x+y, y\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle\\ &= \|\lambda x+y\|^2 + \|\lambda x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle \lambda x+y, \lambda x\rangle - 2\langle \lambda x+y, y\rangle + 2\langle \lambda x, y\rangle\\ &= \|\lambda x+y-\lambda x-y\|^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par propriété de la norme, il vient alors que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ u(\lambda x+y) - \lambda u(x) - u(y) = 0_E,$$

d'où la conclusion.

Exercice 2 (sous-multiplicativité de la norme de Frobenius). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère le produit scalaire b sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ b(A,B) = \operatorname{tr}(A^\top B),$$

et on note N la norme associée à b. Le but de cette question est de montrer que cette norme est *sous-multiplicative*, c'est-à-dire que

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ N(AB) \leq N(A)N(B).$$

1. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux positifs et notés λ_i, $i = 1, \ldots, n$, telles que

$$P^\top (A^\top A) P = D.$$

On vérifie aisément que la matrice $A^\top A$ est réelle symétrique positive d'ordre n. On peut donc la diagonaliser à l'aide d'une matrice de passage orthogonale et ses valeurs propres sont réelles positives. Ainsi, il existe une matrice orthogonale P d'ordre n et une matrice diagonale D d'ordre n, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres λ_i, $i = 1, \dots, n$, de $A^\top A$, telles que

$$A^\top A = PDP^\top.$$

2. Pour toute matrice B de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $S = P^\top(BB^\top)P$. Montrer que

$$(N(A))^2 = \mathrm{tr}(D),\ (N(B))^2 = \mathrm{tr}(S),\ (N(AB))^2 = \mathrm{tr}(SD).$$

Par définition de la norme N, en utilisant la question précédente et par propriété de l'application trace, on trouve

$$(N(A))^2 = \mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}(PDP^\top) = \mathrm{tr}(P^\top PD) = \mathrm{tr}(D),$$

$$(N(B))^2 = \mathrm{tr}(B^\top B) = \mathrm{tr}(BB^\top) = \mathrm{tr}(PSP^\top) = \mathrm{tr}(P^\top PS) = \mathrm{tr}(S)$$

et

$$(N(AB))^2 = \mathrm{tr}((AB)^\top AB) = \mathrm{tr}(B^\top A^\top AB) = \mathrm{tr}(BB^\top A^\top A) = \mathrm{tr}(PSP^\top PDP^\top) = \mathrm{tr}(PSDP^\top) = \mathrm{tr}(P^\top PSD) = \mathrm{tr}(SD).$$

3. Montrer que $\mathrm{tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}$.

On a, en utilisant que la matrice D est diagonale, de coefficients diagonaux λ_i, $i = 1, \dots, n$,

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ (SD)_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^n s_{ik}\lambda_k \delta_{kj} = s_{ij}\lambda_j,$$

d'où $\mathrm{tr}(SD) = \sum_{i=1}^n (SD)_{ii} = \sum_{i=1}^n s_{ii}\lambda_i$.

4. Pour i un entier compris entre 1 et n, on note E_i le i^{e} vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$${E_i}^\top S E_i = \|B^\top P E_i\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire le signe du i^{e} coefficient diagonal de S.

On a

$$\|B^\top P E_i\|^2 = (B^\top P E_i)^\top B^\top P E_i = {E_i}^\top P^\top BB^\top P E_i = {E_i}^\top S E_i = s_{ii}.$$

On en déduit que le coefficient s_{ii} est positif.

5. Montrer enfin que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^n s_{jj}\right),$$

et conclure.

On a

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^n s_{jj}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \sum_{j=1}^n s_{jj}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i s_{ii} + \lambda_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n s_{jj}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n s_{jj}\right).$$

En utilisant que, pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \geq 0$ et $s_{ii} \geq 0$, on montre que $\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n s_{jj}\right) \geq 0$, dont se déduit l'inégalité attendue. On a ainsi montré que

$$(N(AB))^2 = \mathrm{tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^n s_{jj}\right) = \mathrm{tr}(D)\mathrm{tr}(S) = (N(A))^2(N(B))^2,$$

et, puisque $N(AB)$, $N(A)$ et $N(B)$ sont des réels positifs et que la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, on a finalement prouvé que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul et J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On cherche à caractériser les matrices A de $O(n)$ telles que $J + A$ soit inversible.

1. Montrer que $J + A$ n'est pas inversible si et seulement si -1 appartient à $\mathrm{Sp}(JA)$.

La matrice $J+A$ n'est pas inversible si et seulement s'il existe une matrice colonne X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$(J+A)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \iff JX = -AX \iff A^\top JX = -X \iff -1 \in \mathrm{Sp}(A^\top J).$$

On conclut en utilisant que $\mathrm{Sp}(A^\top J) = \mathrm{Sp}((A^\top J)^\top)$ et $(A^\top J)^\top = J^\top A$ avec $J^\top = J$.

2. Calculer la matrice JA. Quel est son rang ?

On a

$$\forall (i,l) \in \{1,\dots,n\}^2,\ (JA)_{il} = \sum_{k=1}^{n} j_{ik} a_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl}.$$

On constate que les coefficients de la matrice JA ne dépendent pas de leur indice de ligne, ce qui fait que les lignes de la matrice sont identiques. On en déduit que le rang de JA est au plus égal à 1.

3. En déduire que $\chi_{JA}(X) = X^{n-1}(X - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij})$.

Le noyau de JA étant de dimension au moins égale à $n-1$, 0 est valeur propre de multiplicité au moins égale à $n-1$ et en déduit par conséquent que

$$\chi_{JA}(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(JA)) = X^{n-1}\left(X - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right).$$

4. Conclure en énonçant une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A.

On déduit des précédentes questions que la matrice $J+A$ est inversible si et seulement si $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \neq -1$.

Exercice 4 (matrice commutant avec sa transposée). Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On note $M = AA^\top - A^\top A$.

1. Montrer que la matrice M est diagonalisable et calculer sa trace.

On vérifie aisément que les matrices $AA^\top$ et $A^\top A$ sont réelles symétriques et qu'elles ont les mêmes coefficients diagonaux. La matrice M est donc réelle symétrique, et par conséquent diagonalisable, à trace nulle.

2. Montrer alors que les matrices A et $A^\top$ commutent si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Si A et $A^\top$ commutent, la matrice M est nulle et possède donc pour seule valeur propre 0, qui est un réel positif. Réciproquement, le fait que M soit diagonalisable implique que sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Cette trace étant nulle, supposer que les valeurs propres de M sont positives implique qu'elles sont nulles. Il en découle que la matrice M est nulle (elle est en effet semblable à une matrice diagonale nulle) et donc A et $A^\top$ commutent.

Exercice 5 (polynômes de Laguerre). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On admet que l'application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par [1]

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X],\ \langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. On note $\|\cdot\|$ la norme qui lui est associée.

1. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation

$$\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P,Q\rangle - P(0)Q(0).$$

On remarque que si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, alors P' et Q' sont aussi des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'on a

$$\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \int_0^{+\infty} P'(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} P(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t))e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} (PQ)'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Réalisons une intégration par parties. Soit A un réel strictement positif. Les fonctions $t \mapsto (PQ)(t)$ et $t \mapsto e^{-t}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\int_0^A (PQ)'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = (PQ)(A)e^{-A} - (PQ)(0) + \int_0^A (PQ)(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans cette égalité et par croissances comparées, il vient

$$\int_0^{+\infty} (PQ)'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -(PQ)(0) + \int_0^{+\infty} (PQ)(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -P(0)Q(0) + \langle P,Q\rangle.$$

1. On admettra en particulier que, pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré inférieur, alors on a $\|P\| = |P(0)|$.

Soit P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré inférieur. Puisque le degré P' est strictement inférieur à celui de P, on a $\langle P, P'\rangle = \langle P', P\rangle = 0$ et il découle alors de la relation précédemment établie que $\langle P, P\rangle - P(0)P(0) = 0$, soit encore $\|P\|^2 = (P(0))^2$. Puisque $\|P\|$ est un réel positif, on en déduit que $\|P\| = |P(0)|$.

2. On se propose dans cette question de démontrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} L_0 = 1, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\},\ L_k \text{ est de degré } k, \\ \forall k \in \{1, \dots, n\},\ L_k(0) = 1, \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X]. \end{cases} \tag{1}$$

(a) On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

i. Justifier que, pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, $P_k(0) \neq 0$.

Par construction, la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est l'unique base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^k)$ et $\left\langle P_k, X^k\right\rangle > 0$. Ceci implique en particulier que, pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, le degré de P_k est égal à k. Par conséquent, le polynôme P_0 est constant et non nul, donc $P_0(0) \neq 0$, et, pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k, donc non constant, orthogonal à tout polynôme de degré inférieur et on a donc, d'après la précédente question, $|P_k(0)| = \|P_k\| = 1 \neq 0$.

ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant les propriétés (1).

On pose

$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ L_k = \frac{1}{P_k(0)} P_k.$$

Tout d'abord, on a que P_0 est constant, donc $P_0 = P_0(0)$ et donc $L_0 = 1$. Pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, P_k étant un polynôme de degré k, L_k est aussi de degré k et

$$L_k(0) = \frac{1}{P_k(0)} P_k(0) = 1.$$

Enfin, si i et j sont deux entiers de $\{0, \dots, n\}$, on a

$$\left\langle L_i, L_j\right\rangle = \frac{1}{P_i(0)} \frac{1}{P_j(0)} \left\langle P_i, P_j\right\rangle = \frac{1}{P_i(0)} \frac{1}{P_j(0)} \delta_{ij}.$$

On en déduit que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, puisque, comme précédemment établi, pour tout entier i de $\{0, \dots, n\}$, $(P_i(0))^2 = |P_i(0)|^2 = \|P_k\|^2 = 1$.

(b) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ vérifiant les propriétés (1). Montrer que, pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, $L_k = M_k$.

Pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, les familles $(L_0, \dots, L_k)$ et $(M_0, \dots, M_k)$ sont par hypothèse échelonnées en degré et orthonormales, donc libres. Ce sont par conséquent toutes deux des bases orthonormées de $\mathbb{R}_k[X]$. On a de plus $L_0 = 1 = M_0$.
Soit à présent k un entier de $\{1, \dots, n\}$. Le polynôme L_k étant orthogonal à toutes les éléments de la famille $(L_0, \dots, L_{k-1})$, il est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. De la même façon, le polynôme M_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $L_k - M_k$ est par conséquent orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Supposons que ce dernier polynôme n'est pas constant ; son degré est compris entre 1 et k et il est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, puisqu'il est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Il découle alors d'une question précédente que $\|L_k - M_k\| = |L_k(0) - M_k(0)| = |1 - 1| = 0$, ce qui contredit le fait que $L_k - M_k$ n'est pas constant. On en déduit que $L_k - M_k$ est constant et égal à 0 en 0, donc nul. On a donc $L_k = M_k$.

(c) Conclure et calculer L_1 et L_2.

On a montré l'existence et l'unicité de la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ satisfaisant les propriétés (1). Calculons L_1 et L_2. On sait que $L_0 = 1$, que L_1 est de degré 1, vaut 1 en 0 et est donc de la forme $aX + 1$, avec a un réel à déterminer. Pour ce faire, on utilise que L_1 est orthogonal à L_0 : $0 = \langle L_1, L_0\rangle = \langle aX + 1, L_0\rangle = a\langle X, L_0\rangle + \langle 1, L_0\rangle = a + 1$, et donc $L_1 = -X + 1$. On procède de la même manière pour calculer L_2, qui est de la forme $bX^2 + cX + 1$, avec b et c des réels à déterminer. On a $L_2 = bX^2 - c\,L_1 + (c+1)\,L_0$, d'où $0 = \langle L_2, L_0\rangle = b\left\langle X^2, L_0\right\rangle + (c+1)\langle L_2, L_0\rangle = 2b + c + 1$ et $0 = \langle L_2, L_1\rangle = b\left\langle X^2, L_1\right\rangle - c\langle L_1, L_1\rangle = b(-6+2) - c$, et donc $b = \frac{1}{2}$ et $c = -2$. On a trouvé $L_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.