Corrigé (succinct) de l'examen du 8 janvier 2025

Exercice 1 (décomposition de Schur). Soit n un entier naturel non nul. Montrer que toute matrice d'ordre n réelle M dont le polynôme caractéristique est scindé se décompose sous la forme

$$M = QTQ^\top,$$

où Q est une matrice orthogonale et T est une matrice triangulaire supérieure.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. Par hypothèse, cet endomorphisme est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, $u(\mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_i\})) \subset \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_i\})$. Soit $\{f_1, \dots, f_n\}$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partie de $\{e_1, \dots, e_n\}$ par application du procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. Par propriété du procédé, on a, pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, $\mathrm{Vect}(\{f_1, \dots, f_i\}) = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_i\})$ et cette dernière base est donc aussi une base de trigonalisation de u. La matrice de passage Q de la base canonique à $\{f_1, \dots, f_n\}$ étant la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre, elle est orthogonale et le résultat est donc démontré.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Montrer que

$$\forall x \in E,\ \|u^*(x)\| \leq \|x\|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz et l'hypothèse, on a

$$\forall x \in E,\ \|u^*(x)\|^2 = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \langle u(u^*(x)), x\rangle \leq \|u(u^*(x))\|\|x\| \leq \|u^*(x)\|\|x\|,$$

dont on déduit le résultat, que $u^*(x)$ soit nul ou non.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul, M une matrice d'ordre n réelle symétrique définie positive et N une matrice d'ordre n réelle symétrique positive.

1. Montrer que la matrice $I_n + MN$ est inversible.

La matrice M étant réelle symétrique définie positive, elle est inversible, son inverse est aussi une matrice réelle symétrique définie positive et on peut donc écrire $I_n + MN = M(M^{-1} + N)$. La matrice $M^{-1} + N$ est réelle symétrique et on a alors

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top(M^{-1} + N)X = X^\top M^{-1}X + X^\top NX > 0.$$

On en déduit que la matrice $M^{-1} + N$ est définie positive, donc inversible, et la matrice $I_n + MN$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles.

2. On suppose dans cette question que la matrice N est de plus définie. Montrer que $(M+N)^{-1} \neq M^{-1} + N^{-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

On raisonne par l'absurde en supposant que $(M + N)(M^{-1} + N^{-1}) = I_n$. En développant, il vient alors

$$MN^{-1} + NM^{-1} + I_n = 0_n.$$

La matrice M étant réelle symétrique définie positive, elle est inversible, et, en multipliant l'égalité ci-dessus à droite par la matrice M, on arrive à la relation équivalente

$$MN^{-1}M + N + M = 0_n.$$

Les matrices M, N et N^{-1} étant définies positives, on a alors

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top(MN^{-1}M + N + M)X = (MX)^\top N^{-1}(MX) + X^\top NX + X^\top MX > 0,$$

ce qui est absurde.

Exercice 4. Déterminer la nature de l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note M la matrice. On a $MM^\top = I_3$, l'endomorphisme est donc une isométrie vectorielle. La matrice est également symétrique, on en déduit que l'endomorphisme est une symétrie orthogonale. On détermine enfin le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ invariant par l'endomorphisme en caractérisant $\ker(M - I_3)$. On a

$$X \in \ker(M - I_3) \iff \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

et l'endomorphisme est donc la réflexion par rapport au plan d'équation cartésienne $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Exercice 5 (polynômes d'Hermite). On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

1. (a) Établir que

$$\forall (a,b) \in [0, +\infty[^2,\ ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Pour tout couple de réels (a,b), on a $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, d'où $2ab \leq a^2 + b^2$. On obtient le résultat en divisant par 2 cette dernière inégalité.

(b) En déduire que, pour tout couple (f,g) d'applications de E, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

En utilisant le précédent résultat, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right).$$

En multipliant cette inégalité par e^{-x^2}, qui est strictement positive, et en intégrant, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x)g(x)e^{-x^2} \right| \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right),$$

dont on déduit que l'intégrale est absolument convergente, puisque f et g sont des éléments de E, et donc convergente.

(c) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On montre que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues. Tout d'abord, si f est l'application nulle, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est nulle et donc convergente. Ainsi, l'ensemble E n'est pas vide. Ensuite, pour tout couple d'applications (f,g) de E et tout réel λ, la fonction $\lambda f + g$ est continue et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Les trois intégrales du membres de droite étant convergentes par définition de E et par la question précédente, on en déduit que $\lambda f + g$ est un élément de E, ce qui achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel.

(d) Montrer alors que l'application notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et définie par

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

est un produit scalaire sur E.

On note tout d'abord que, l'intégrale définissant le produit scalaire étant convergente pour tout couple d'éléments de E, l'application est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est clairement symétrique, par commutativité de la multiplication de réels. Soit λ un réel et f, g et h trois éléments de E. On a

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + g, h \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))h(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(x)h(x) + g(x)h(x))e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

toutes les intégrales étant convergentes. L'application est donc linéaire à gauche et donc, par symétrie, bilinéaire. On a également que

$$\forall f \in E,\ \langle f, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \geq 0,$$

par positivité de l'intégrale d'une fonction positive. Enfin, si $\langle f, f\rangle = 0$, cela implique que, par continuité et positivité de l'intégrande ainsi que la stricte positivité de la fonction exponentielle,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 e^{-x^2} = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \iff f = 0_E.$$

L'application définit bien un produit scalaire sur E.

(e) Montrer que $F \subset E$.

Il suffit de montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction puissance $x \mapsto x^n$ appartient à E. Il découle des croissances comparées des fonctions puissance et exponentielle que $x^{2n} e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. On peut alors conclure par comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives.

Dans la suite, on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire et on admet que la restriction de ce produit scalaire à F (ou à F_n) est encore un produit scalaire, que l'on continue de noter $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, définie par $\varphi(x) = e^{-x^2}$, et, pour tout entier naturel n, H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule de Rodrigues :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \varphi^{(n)}(x),$$

où $\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n^{e} de φ. En particulier, on a : $H_0 \equiv 1$.

2. (a) Donner, en faisant apparaître les calculs, les applications H_1, H_2 et H_3.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -2xe^{-x^2},\ \varphi''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2} \text{ et } \varphi'''(x) = (-8x^3+12x)e^{-x^2},$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2 \text{ et } H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

(b) Montrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_{n+1}(x) = 2x\,H_n(x) - H_n{}'(x).$$

En dérivant la formule définissant H_n pour tout entier naturel n, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n{}'(x) = (-1)^n 2xe^{x^2} \varphi^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} \varphi^{(n+1)}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$$

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, H_n est une application polynomiale de degré n et déterminer le coefficient de son terme de plus haut degré.

On raisonne par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, la propriété est vraie puisque $H_0 \equiv 1$. On suppose que la propriété soit vraie pour un entier naturel n. Les applications $H_n{}'$ et $x \mapsto 2xH_n(x)$ sont polynomiales, respectivement de degré strictement inférieur à n et de degré $n+1$, on déduit donc de la relation de récurrence précédente que H_{n+1} est une application polynomiale de degré $n+1$. Pour tout entier naturel n, on note α_n le coefficient du terme de plus haut degré de H_n. On a $\alpha_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, on déduit de la relation de récurrence précédente que $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, d'où $\alpha_n = 2^n$.

(d) Calculer alors H_4.

En utilisant la relation de récurrence précédente et le calcul de H_3 effectué plus haut, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_4(x) = 2x(8x^3 - 12x) - (24x^2 - 12) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

(e) Montrer enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Que dire de la parité de l'application H_n ?

On montre facilement, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(-x) = (-1)^n \varphi^{(n)}(x)$$

Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = (-1)^n e^{(-x)^2} \varphi^{(n)}(-x) = (-1)^n e^{x^2} (-1)^n \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x).$$

On en déduit que l'application H_n possède la même parité que l'entier n.

3. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in F,\ \left\langle P', H_{n-1}\right\rangle = \langle P, H_n\rangle.$$

On considère l'intégrale définissant le membre de gauche de l'égalité, mais sur un intervalle borné $[m, M]$, et on réalise une intégration par parties, toutes les fonctions impliquées étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a, en utilisant la relation de récurrence précédente au rang $n-1$,
$$\int_m^M P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\right]_n^M + \int_m^M P(x)H_n(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On conclut en divisant par $\sqrt{\pi}$, en faisant tendre m vers $-\infty$ et M vers $+\infty$ et en utilisant les croissances comparées des applications polynomiales et exponentielles.

(b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in F_{n-1},\ \langle P, H_n\rangle = 0.$$

En raisonnant par récurrence sur l'entier n et en procédant comme dans la question précédente, on établit facilement que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in F_{n-1},\ \langle P, H_n\rangle = \left\langle P^{(n)}, H_{n-n}\right\rangle = \left\langle P^{(n)}, H_0\right\rangle.$$

La dérivée n^e d'une application polynomiale de degré $n-1$ étant identiquement nulle, le membre de droite de cette dernière égalité est nul.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale dans F.

Si l'entier n est nul, le résultat est clairement vrai. On suppose que n est non nul et on considère deux entiers distincts i et j de $\{0, \dots, n\}$. Par symétrie du produit scalaire, on peut supposer dans perte de généralité que $i < j$. On sait d'après la question 2.(c) que H_i appartient à $F_i \subset F_{j-1}$ et que H_j appartient à F_j. Le résultat de la question précédente, appliqué pour $n = j$ et $P = H_i$, montre alors que $\left\langle H_i, H_j\right\rangle = 0$, ce qui implique que les éléments de la famille sont orthogonaux deux à deux.

(d) Établir que, pour tout entier naturel n, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de F_n.

D'après les précédentes questions, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale et constituée d'éléments non nuls de F_n. C'est ainsi une famille libre de cardinal $n+1$ d'un espace vectoriel de dimension $n+1$, et donc une base de cet espace.

(e) Montrer enfin que, pour tout entier naturel n, $\|H_n\|^2 = \left\langle {H_n}^{(n)}, H_0\right\rangle$ et en déduire la valeur de $\|H_n\|$.

En raisonnant par récurrence comme à la question 3.(b), il vient
$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n\rangle = \left\langle {H_n}^{(n)}, H_0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} {H_n}^{(n)}(x)H_0(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n! e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^n n! \sqrt{\pi} = 2^n n!,$$

d'où $\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}$.

On note u, v et w les applications de F dans F respectivement définies par
$$\forall P \in F,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = -P''(x) + 2xP'(x) + P(x),\ v(P)(x) = 2xP(x) - P'(x),\ w(P)(x) = P'(x).$$

4. Montrer que u est un endomorphisme de F.

Pour tout P de F, l'application $u(P)$ est une combinaison linéaire d'applications polynomiales, donc un élément de F. Pour tout réel λ et tout couple (P, Q) d'éléments de F, on a, par linéarité de la dérivation,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ u(\lambda P + Q)(x) &= -(\lambda P + Q)''(x) + 2x(\lambda P + Q)'(x) + (\lambda P + Q)(x)\\ &= -\lambda P''(x) - Q''(x) + 2\lambda x P'(x) + 2xQ'(x) + \lambda P(x) + Q(x)\\ &= \lambda(-P''(x) + 2xP'(x) + P(x)) + (-Q''(x) + 2xQ'(x) + Q(x))\\ &= \lambda u(P)(x) + u(Q)(x),\end{aligned}$$

et donc u est une application linéaire.

On admet que v et w sont aussi des endomorphismes de F.

5. (a) Établir que $v \circ w = u - id_F$ et $w \circ v = u + id_F$.

On a, pour tout P de F et tout x de $\mathbb{R}$,
$$v \circ w(P)(x) = v(P')(x) = 2xP'(x) - (P')'(x) = -P''(x) + 2xP'(x) + P(x) - P(x) = u(P)(x) - P(x)$$

et
$$w \circ v(P)(x) = (v(P))'(x) = 2P(x) + 2xP'(x) - P''(x) = -P''(x) + 2xP'(x) + P(x) + P(x) = u(P)(x) + P(x).$$

(b) En déduire que $u \circ v - v \circ u = 2v$.

En utilisant les résultats de la question précédente, on a

$$v \circ w \circ v = (v \circ w) \circ v = (u - id_F) \circ v = u \circ v - v \text{ et } v \circ w \circ v = v \circ (w \circ v) = v \circ (u + id_F) = v \circ u + v,$$

d'où $u \circ v - v \circ u - 2v = 0_{\mathscr{L}(F)}$.

6. Montrer que, pour tout réel λ et tout P de F, si $u(P) = \lambda P$, alors $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$.

On a, d'après la question précédente,

$$2v(P) = u \circ v(P) - v \circ u(P) = u(v(P)) - v(u(P)) = u(v(P)) - v(\lambda P) = u(v(P)) - \lambda v(P),$$

d'où $u(v(P)) = 2v(P) + \lambda v(P)$.

7. (a) Calculer $u(H_0)$.

On a $H_0{}' = H_0{}'' = 0_F$, d'où $u(H_0) = H_0$.

(b) Calculer, pour tout entier naturel n, $v(H_n)$ et en déduire que $u(H_n) = (2n+1)H_n$.

En utilisant la relation de récurrence établie à la question 2.(b), on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ v(H_n)(x) = 2xH_n(x) - H_n{}'(x) = H_{n+1}(x).$$

On raisonne par récurrence pour prouver l'identité. Pour $n = 0$, le résultat est vrai d'après la question précédente. On suppose alors que, pour un entier naturel n, $u(H_n) = (2n+1)H_n$. En utilisant la question 6, on a alors

$$u(H_{n+1}) = u(v(H_n)) = ((2n+1)+2)v(H_n) = (2(n+1)+1)H_{n+1}.$$

8. Établir que

$$\forall (P,Q) \in F^2,\ \left\langle P', Q' \right\rangle = \langle u(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle\,.$$

Comme dans la question 3.(a), on considère l'intégrale définissant le membre de gauche de l'égalité, mais sur un intervalle borné $[m, M]$, et on réalise une intégraltion par parties, toutes les fonctions impliquées étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\forall (P,Q) \in F^2,\ \int_m^M P'(x)Q'(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[P'(x)Q(x)e^{-x^2}\right]_m^M - \int_m^M (P''(x) - 2xP'(x))Q(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[P'(x)Q(x)e^{-x^2}\right]_m^M + \int_m^M (u(P)(x) - P(x))Q(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En divisant par $\sqrt{\pi}$, en faisant tendre m vers $-\infty$ et M vers $+\infty$ et en utilisant les croissances comparées des applications polynomiales et exponentielles, on arrive au résultat attendu.

9. Soit n un entier naturel.

(a) Montrer que la restriction de u à F_n, notée $u_{|_{F_n}}$, est un endomorphisme de F_n.

Pour tout élément P de F_n, $u(P)$ est une combinaison linéaire d'éléments de F_n et donc un élément de F_n. La restriction de u à F_n définit donc un endomorphisme de F_n.

(b) Montrer que cet endomorphisme est auto-adjoint.

D'après la question 8, on a, en particulier,

$$\forall (P,Q) \in {F_n}^2,\ \left\langle u_{|_{F_n}}(P), Q\right\rangle = \langle u(P), Q\rangle = \left\langle P', Q'\right\rangle + \langle P, Q\rangle\,,\ \left\langle u_{|_{F_n}}(Q), P\right\rangle = \langle u(Q), P\rangle = \left\langle Q', P'\right\rangle + \langle Q, P\rangle\,,$$

dont on déduit que, par symétrie du produit scalaire,

$$\forall (P,Q) \in {F_n}^2,\ \left\langle u_{|_{F_n}}(P), Q\right\rangle = \left\langle P, u_{|_{F_n}}(Q)\right\rangle.$$

(c) Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de $u_{|_{F_n}}$.

On sait d'après la question 3.(d) que la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n. Par ailleurs, on sait d'après la question 7.(b) que, pour tout entier naturel i de $\{0, \ldots, n\}$, H_i est un vecteur propre de $u_{|_{F_n}}$ associé à la valeur propre $2i+1$. Il résulte alors de la question 3.(e) que la famille $\left(\frac{H_i}{\sqrt{2^i i!}}\right)_{0 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de F_n, constituée de vecteurs propres de $u_{|_{F_n}}$.