Examen du 3 juillet 2025

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles ou que des arguments de preuve ne sont pas rigoureusement justifiés.

Durée : 3 heures

Exercice 1 (5 points). Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrices non nulles de $M_n(\mathbb{C})$. On désigne par μ_A et μ_B les polynômes minimaux de A et de B.

1. Montrer que si les polynômes μ_A et μ_B sont premiers entre eux[1], alors les matrices $\mu_A(B)$ et $\mu_B(A)$ sont inversibles.

On suppose désormais qu'il existe une matrice non nulle M telle que $AM = MB$.

2. Que peut-on dire des valeurs propres de A et de B si M est inversible.
3. Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)M = MP(B)$.
4. Montrer que A et B ont une valeur propre commune. On pourra pour cela raisonner par contraposition, en remarquant que μ_A et μ_B sont premiers entre eux si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$ et en se servant du résultat établi dans la question précédente avec un polynôme bien choisi.

Exercice 2 (7 points). On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = 5{x_1}^2 + 8{x_2}^2 + 5{x_3}^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

1. Donner la forme polaire de q, notée b.
2. Déterminer la signature, le noyau et le cône isotrope de q.
3. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Diagonaliser cette matrice et en déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour q.
5. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, exprimer $q(x)$ en fonction des coordonnées de x dans cette dernière base.

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ N(x) = \frac{1}{3}\sqrt{q(x)}.$$

6. Interpréter géométriquement $N(x)$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$. On pourra pour cela utiliser le résultat de la question précédente.
7. Montrer que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ |b(x, y)| \leq 9N(x)N(y).$$
8. L'application N est-elle sous-additive ?
9. L'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 (décomposition d'un automorphisme dans un espace euclidien et caractérisations d'une similitude vectorielle, 14 points). Soit n un entier naturel non nul et E un espace euclidien de dimension égale à n, de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée notée $\|\cdot\|$. Soit u un endomorphisme de E, d'adjoint noté u^*.

1. On rappelle que deux polynômes P et Q sont dits premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes R et S tels que $PR + QS = 1$.

1. On définit l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ b(x, y) = \langle u(x), u(y) \rangle\,.$$

   (a) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.

   (b) Exprimer la matrice de b relativement à une base orthonormée de E en fonction de la matrice M de l'endomorphisme u dans cette même base.

   (c) Montrer que la forme b est positive et que son noyau est égal à $\ker(u)$.

   (d) En déduire que la forme b est non dégénérée si et seulement si u est un automorphisme de E.

On suppose dans toute la suite que u est un automorphisme de E.

2. On pose $w = u^* \circ u$.

   (a) Montrer que l'endomorphisme w est auto-adjoint et que l'on a

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ b(x, y) = \langle w(x), y \rangle\,.$$

   (b) Montrer que les valeurs propres de w sont strictement positives.

   (c) Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base orthonormée de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

      i. la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ est formée de vecteurs propres de w,

      ii. la famille $\{u(e_i)\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthogonale de E.

3. On se propose de montrer que l'automorphisme u admet une décomposition de la forme

$$u = \sigma \circ \tau,$$

où σ est une isométrie vectorielle et τ un endomorphisme auto-adjoint à valeurs propres strictement positives. Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de l'endomorphisme w.

   (a) Justifier qu'une telle base existe.

Pour tout entier naturel i appartenant à $\{1, \dots, n\}$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i.

   (b) Exprimer $\|u(e_i)\|$ en fonction de λ_i.

   (c) Montrer que l'endomorphisme σ de E défini par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sigma(e_i) = \frac{u(e_i)}{\|u(e_i)\|},$$

   est orthogonal.

On pose $\tau = \sigma^{-1} \circ u$.

   (d) Montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \tau(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i.$$

   En déduire que l'endomorphisme τ est auto-adjoint, à valeurs propres strictement positives.

   (e) Conclure.

4. On dit que l'endomorphisme u est une *similitude vectorielle* si et seulement s'il existe un réel λ strictement positif tel que

$$u^* \circ u = \lambda\, id_E,$$

où id_E désigne l'application identité de E. On se propose de montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

   i. l'endomorphisme u est une similitude vectorielle,

   ii. il existe un réel α strictement positif et une isométrie vectorielle v tels que $u = \alpha v$,

   iii. l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

   (a) Montrer que i. implique ii.. On pourra pour cela utiliser les résultats de la question précédente.

   (b) Montrer que ii. implique iii..

   (c) **(question difficile, hors barème)** Montrer que iii. implique i.. On pourra tout d'abord démontrer que, pour tout vecteur x non nul de E, $u^* \circ u(x) = \lambda(x)x$, où $\lambda(x)$ est un réel, puis que $\lambda(x)$ ne dépend pas de x.

   (d) Conclure.