

Corrigé (succinct) de l'examen du 3 juillet 2025

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrices non nulles de $M_n(\mathbb{C})$. On désigne par μ_A et μ_B les polynômes minimaux de A et de B .

1. Montrer que si les polynômes μ_A et μ_B sont premiers entre eux, alors les matrices $\mu_A(B)$ et $\mu_B(A)$ sont inversibles.

Les polynômes μ_A et μ_B étant premiers entre eux, il existe deux polynômes R et S tels que $\mu_A R + \mu_B S = 1$, que qui implique en particulier que $\mu_A(A)R(A) + \mu_B(A)S(A) = I_n$. Le polynôme μ_A étant annulateur de A , on a alors $\mu_B(A)S(A) = I_n$, ce qui équivaut à dire que la matrice $\mu_B(A)$ est inversible. On montre de la même manière que la matrice $\mu_A(B)$ est inversible.

On suppose désormais qu'il existe une matrice non nulle M telle que $AM = MB$.

2. Que peut-on dire des valeurs propres de A et de B si M est inversible.

Si la matrice M est inversible, on a

$$AM = MB \iff B = M^{-1}AM,$$

et les matrices A et B sont semblables, ce qui implique qu'elles possèdent le même spectre.

3. Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)M = MP(B)$.

On va montrer, en raisonnant par récurrence, que $A^k M = MB^k$ pour tout entier naturel k . C'est clair pour $k = 0$ et c'est l'hypothèse de l'exercice pour $k = 1$. On suppose que l'égalité soit vraie pour un entier k supérieur ou égal à 1. On a alors

$$A^{k+1}M = A(A^k M) = A(MB^k) = (AM)B^k = (MB)B^k = MB^{k+1},$$

ce qui prouve le résultat. Ainsi, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$, on a

$$P(A)M = \left(\sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k A^k \right) M = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k (A^k M) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k (MB^k) = M \left(\sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k B^k \right) = MP(B).$$

4. Montrer que A et B ont une valeur propre commune. On pourra pour cela raisonner par contraposition, en remarquant que μ_A et μ_B sont premiers entre eux si $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ et en se servant du résultat établi dans la question précédente avec un polynôme bien choisi.

On suppose que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$. Les valeurs propres des matrices A et B étant respectivement les racines des polynômes minimaux μ_A et μ_B , il en résulte que ces deux polynômes n'ont aucune racine commune et ils sont par conséquent premiers entre eux. En considérant le choix $P = \mu_A$ dans l'identité établie dans la question précédente, on obtient en particulier que $\mu_A(A)M = M\mu_A(B)$, d'où $M\mu_A(B) = 0_n$. La matrice $\mu_A(B)$ étant inversible, comme établi dans la première question, on en déduit que $M = 0_n$. On a donc prouvé la proposition « $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset \implies M = 0_n$ », dont la contraposée « $M \neq 0_n \implies \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$ » répond à la question posée.

Exercice 2. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, q(x) = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

1. Donner la forme polaire de q , notée b .

Par polarisation des monômes formant q , on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, b(x, y) = 5x_1y_1 + 8x_2y_2 + 5x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) - 4(x_1y_3 + x_3y_1) - 2(x_2y_3 + x_3y_2).$$

2. Déterminer la signature, le noyau et le cône isotrope de q .

On effectue une réduction de Gauss de la forme quadratique. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^3, q(x) &= 5 \left(x_1^2 - \frac{4}{5}x_1x_2 - \frac{8}{5}x_1x_3 \right) + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= 5 \left(x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 \right)^2 + \frac{36}{5}x_2^2 + \frac{9}{5}x_3^2 - \frac{36}{5}x_2x_3 \\ &= 5 \left(x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 \right)^2 + \frac{36}{5}(x_2^2 - x_2x_3) + \frac{9}{5}x_3^2 \\ &= 5 \left(x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 \right)^2 + \frac{36}{5} \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right)^2.\end{aligned}$$

La signature de q est donc $(2, 0)$, ce qui en fait une forme quadratique positive dégénérée. Son noyau est l'intersection des formes linéaires apparaissant dans les carrés de la forme réduite obtenue ci-dessus. On a

$$x \in \ker(b) \iff \begin{cases} x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases},$$

d'où $\ker(b) = \text{Vect}(\{(2, 1, 2)\})$. Enfin, le cône isotrope de q coïncide avec son noyau, puisque que c'est une forme quadratique positive.

3. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On trouve

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Diagonaliser cette matrice et en déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour q .

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$\chi(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 2 & 4 \\ 2 & X-8 & 2 \\ 4 & 2 & X-5 \end{vmatrix} = X(X-9)^2.$$

Les valeurs propres de la matrice sont donc 0 et 9 et l'on sait par la précédente question que le sous-espace propre

E_0 associé à 0 est $\text{Vect} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$. Puisque la matrice est réelle symétrique, on sait que ses sous-espaces propres

sont deux à deux orthogonaux. La matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est par conséquent un vecteur propre associé à 9 et

la matrice colonne $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, obtenue par produit vectoriel entre les deux vecteurs propres déjà obtenus, est un

troisième vecteur propre, associé à 9 et orthogonal aux deux autres. On a ainsi trouvé une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, qui est également orthogonale pour la forme quadratique (la matrice de q dans cette base est en effet diagonale). Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de diviser chacun des vecteurs par sa norme. On en déduit alors la famille $\left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}} \right) \right\}$ comme base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ associée.

5. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, exprimer $q(x)$ en fonction des coordonnées de x dans cette dernière base.

En notant (α, β, γ) les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ dans la base orthonormée déterminée dans la question précédente, on a $q(x) = 9(\beta^2 + \gamma^2)$.

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, N(x) = \frac{1}{3} \sqrt{q(x)}.$$

6. Interpréter géométriquement $N(x)$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$. On pourra pour cela utiliser le résultat de la question précédente.

En exprimant, comme on l'a fait dans la question ci-dessus, tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ dans la base orthonormée précédemment obtenue, on trouve que $N(x) = \frac{1}{3} \sqrt{9(\beta^2 + \gamma^2)} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \|p_{\text{Vect}(\{(2,1,2)\}^\perp)}(x)\|$. On peut donc interpréter $N(x)$ comme la norme euclidienne de la projection orthogonale du vecteur x sur le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(\{(2,1,2)\})$.

7. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, |b(x, y)| \leq 9N(x)N(y).$$

La forme quadratique q étant positive, elle satisfait une inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, |b(x, y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} = (3N(x))(3N(y)) = 9N(x)N(y),$$

par définition de N .

8. L'application N est-elle sous-additive ?

En utilisant l'inégalité prouvée dans la question précédente, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (N(x+y))^2 = \frac{1}{9}q(x) + \frac{1}{9}q(y) + \frac{2}{9}b(x, y) \leq \frac{1}{9}q(x) + \frac{1}{9}q(y) + 2N(x)N(y).$$

On a ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (N(x+y))^2 \leq (N(x))^2 + (N(y))^2 + 2N(x)N(y) = (N(x) + N(y))^2,$$

dont on conclut que N est sous-additive.

9. L'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^3$?

L'application N ne définit pas une norme, car elle ne vérifie pas la propriété de séparabilité. En effet, on a

$$N(x) = 0 \iff q(x) = 0 \iff x \in \text{Vect}(\{(2,1,2)\}),$$

ce qui n'équivaut pas à ce que x soit le vecteur nul.

Exercice 3 (décomposition d'un automorphisme dans un espace euclidien et caractérisations d'une similitude vectorielle, 15 points). Soit n un entier naturel non nul et E un espace euclidien de dimension égale à n , de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée notée $\|\cdot\|$. Soit u un endomorphisme de E , d'adjoint noté u^* .

1. On définit l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in E \times E, b(x, y) = \langle u(x), u(y) \rangle.$$

- (a) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique.

On a, en utilisant la linéarité de l'endomorphisme u et la bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, b(\lambda x + z, y) &= \langle u(\lambda x + z), u(y) \rangle = \langle \lambda u(x) + u(z), u(y) \rangle \\ &= \lambda \langle u(x), u(y) \rangle + \langle u(z), u(y) \rangle = \lambda b(x, y) + b(z, y). \end{aligned}$$

La symétrie de b découle directement de celle du produit scalaire.

- (b) Exprimer la matrice de b relativement à une base orthonormée de E en fonction de la matrice M de l'endomorphisme u dans cette même base.

Soit $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ une base orthonormée de E et $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Par définition, le coefficient à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne de la matrice de b relativement à la base $\mathcal{B}$ est donné par

$$\begin{aligned} b(e_i, e_j) &= \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n m_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n m_{lj} e_l \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{ki} m_{lj} \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{ki} m_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj}, \end{aligned}$$

La matrice s'écrit donc $M^T M$.

(c) Montrer que la forme b est positive et que son noyau est égal à $\ker(u)$.

On a

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) = \langle u(x), u(x) \rangle = \|u(x)\|^2,$$

la forme b est donc positive. Il en résulte que son noyau coïncide avec le cône isotrope de la forme quadratique qui lui est associée. On a donc

$$x \in \ker(b) \iff b(x, x) = 0 \iff \|u(x)\|^2 = 0 \iff u(x) = 0_E \iff x \in \ker(u).$$

(d) En déduire que la forme b est non dégénérée si et seulement si u est un automorphisme de E .

On déduit de la question précédente que

$$b \text{ non dégénérée} \iff \ker(b) = \{0_E\} \iff \ker(u) = \{0_E\} \iff u \in GL(E).$$

On suppose dans toute la suite que u est un automorphisme de E .

2. On pose $w = u^* \circ u$.

(a) Montrer que l'endomorphisme w est auto-adjoint et que l'on a

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad b(x, y) = \langle w(x), y \rangle.$$

D'après le cours, on a $w^* = (u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u = w$ et, par définition de l'adjoint, on a

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad b(x, y) = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(u(x)), y \rangle = \langle u^* \circ u(x), y \rangle = \langle w(x), y \rangle.$$

(b) Montrer que les valeurs propres de w sont strictement positives.

L'endomorphisme w étant auto-adjoint, son spectre est réel. Soit λ une valeur propre de w . Il existe un vecteur x non nul de E tel que $w(x) = \lambda x$. On a alors, en utilisant la question précédente,

$$b(x, x) = \langle w(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2,$$

d'où $\lambda = \frac{b(x, x)}{\|x\|^2}$. On conclut en utilisant que b est positive non dégénérée.

(c) Soit $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ une base orthonormée de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- i. la base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ est formée de vecteurs propres de w ,
- ii. la famille $\{u(e_i)\}_{i=1, \dots, n}$ est une base orthogonale de E .

On suppose l'assertion i. vraie. Pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, on note λ_i la valeur propre associée à e_i . On a

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle w(e_i), e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Ainsi, si les entiers i et j sont distincts, le scalaire $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle$ est nul et la famille $\{u(e_i)\}_{i=1, \dots, n}$ est orthogonale. Elle est par ailleurs libre, car c'est l'image d'une base de E par un automorphisme, et c'est donc une base orthogonale de E .

On suppose à présent l'assertion ii. vraie. Pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, on a

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, \quad \langle w(e_i), e_j \rangle = \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = 0.$$

En posant alors $\lambda_i = \langle w(e_i), e_i \rangle$, on peut écrire

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle w(e_i), e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle,$$

ce qui signifie encore que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle w(e_i) - \lambda_i e_i, e_j \rangle = 0,$$

d'où $w(e_i) - \lambda_i e_i$ appartient à $(\text{Vect}(\{e_i\}_{i=1, \dots, n}))^\perp = E^\perp = \{0_E\}$. On en déduit que la base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ est formée de vecteurs propres de w .

3. On se propose de montrer que l'automorphisme u admet une décomposition de la forme

$$u = \sigma \circ \tau,$$

où σ est une isométrie vectorielle et τ un endomorphisme auto-adjoint à valeurs propres strictement positives. Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de l'endomorphisme w .

(a) Justifier qu'une telle base existe.

L'endomorphisme w étant auto-adjoint, il existe, d'après le cours, une base orthonormale de vecteurs propres.

Pour tout entier naturel i appartenant à $\{1, \dots, n\}$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i .

(b) Exprimer $\|u(e_i)\|$ en fonction de λ_i .

On a

$$\|u(e_i)\| = \sqrt{\langle u(e_i), u(e_i) \rangle} = \sqrt{\langle w(e_i), e_i \rangle} = \sqrt{\langle \lambda_i e_i, e_i \rangle} = \sqrt{\lambda_i \langle e_i, e_i \rangle} = \sqrt{\lambda_i}.$$

(c) Montrer que l'endomorphisme σ de E défini par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sigma(e_i) = \frac{u(e_i)}{\|u(e_i)\|},$$

est orthogonal.

On a précédemment montré que la famille $\{u(e_i)\}_{i=1,\dots,n}$ était une base orthogonale de E . Par conséquent, la famille $\left\{ \frac{u(e_i)}{\|u(e_i)\|} \right\}_{i=1,\dots,n}$ est une base orthonormée de E . C'est de plus l'image de la base orthonormée $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E par l'endomorphisme σ , ce qui fait de ce dernier une isométrie vectorielle par un résultat du cours.

On pose $\tau = \sigma^{-1} \circ u$.

(d) Montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \tau(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i.$$

En déduire que l'endomorphisme τ est auto-adjoint, à valeurs propres strictement positives.

On a, en utilisant les définitions respectives des endomorphismes σ et τ , ainsi que l'avant-dernière question,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \tau(e_i) = \sigma^{-1}(u(e_i)) = \sigma^{-1}(\|u(e_i)\| \sigma(e_i)) = \|u(e_i)\| \sigma^{-1}(\sigma(e_i)) = \|u(e_i)\| e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i.$$

On en déduit que la matrice de τ dans la base orthonormée $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E est une matrice réelle diagonale, donc réelle symétrique. L'endomorphisme est donc auto-adjoint. Ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de cette matrice, c'est-à-dire $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$, et sont donc strictement positives.

(e) Conclure.

On a $\sigma \circ \tau = \sigma \circ \sigma^{-1} \circ u = u$, ce qui permet de conclure quant à l'existence de la décomposition annoncée.

4. On dit que l'endomorphisme u est une *similitude vectorielle* si et seulement s'il existe un réel λ strictement positif tel que

$$u^* \circ u = \lambda id_E,$$

où id_E désigne l'application identité de E . On se propose de montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- i. l'endomorphisme u est une similitude vectorielle,
- ii. il existe un réel α strictement positif et une isométrie vectorielle v tels que $u = \alpha v$,
- iii. l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

(a) Montrer que i. implique ii.. On pourra pour cela utiliser les résultats de la question précédente.

Si l'endomorphisme u est une similitude vectorielle, alors l'endomorphisme w introduit plus haut est une homothétie et possède donc une seule valeur propre, qui est le réel λ strictement positif de la définition ci-dessus. Il en découle qu'il existe des endomorphismes σ et τ , respectivement orthogonal et auto-adjoint avec pour seule valeur propre $\sqrt{\lambda}$, tels que $u = \sigma \circ \tau$, comme établi dans la question précédente. L'endomorphisme τ étant auto-adjoint, il est diagonalisable et on a donc $\tau = \sqrt{\lambda} id_E$, d'où $u = \sigma \circ (\sqrt{\lambda} id_E) = \sqrt{\lambda} \sigma \circ id_E = \sqrt{\lambda} \sigma$. Il suffit alors de poser $\alpha = \sqrt{\lambda}$ et $v = \sigma$.

(b) Montrer que ii. implique iii..

Soit (x, y) un couple de vecteurs de E tel que $\langle x, y \rangle = 0$. Si $u = \alpha v$ avec v une isométrie vectorielle, on a

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle \alpha v(x), \alpha v(y) \rangle = \alpha^2 \langle v(x), v(y) \rangle = \alpha^2 \langle x, y \rangle = 0,$$

puisque l'endomorphisme v conserve le produit scalaire.

(c) Montrer que iii. implique i.. On pourra tout d'abord démontrer que, pour tout vecteur x non nul de E , $u^* \circ u(x) = \lambda(x)x$, où $\lambda(x)$ est un réel, puis que $\lambda(x)$ ne dépend pas de x .

On observe tout d'abord que

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u^* \circ u(x), x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle = \lambda(x) \langle x, x \rangle,$$

en posant $\lambda(x) = \frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}$. De plus, pour tout vecteur y de l'espace euclidien E , on peut écrire $u = \gamma x + z$, où γ est un nombre réel et z un vecteur appartenant à $(\text{Vect}(\{x\}))^\perp$. Si l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité, il vient alors

$$\begin{aligned} \forall y \in E, \langle u^* \circ u(x) - \lambda(x)x, y \rangle &= \gamma \langle u^* \circ u(x), x \rangle + \langle u^* \circ u(x), z \rangle - \gamma \langle \lambda(x)x, x \rangle - \langle \lambda(x)x, z \rangle \\ &= \gamma \langle u(x), u(x) \rangle + \langle u(x), u(z) \rangle - \gamma \lambda(x) \langle x, x \rangle - \lambda(x) \langle x, z \rangle \\ &= \gamma (\|u(x)\|^2 - \lambda(x)\|x\|^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout vecteur x non nul de E , le vecteur $u^* \circ u(x) - \lambda(x)x$ appartient à $E^\perp$, d'où $u^* \circ u(x) = \lambda(x)x$ (on peut observer que le réel $\lambda(x)$ est unique, le vecteur x non nul constituant une base de $\text{Vect}(\{x\})$).

On montre à présent que la fonction $x \mapsto \lambda(x)$ est constante sur $E \setminus \{0_E\}$. Soit (x, y) un couple de vecteurs de $E \setminus \{0_E\}$. Si la famille $\{x, y\}$ est liée, il existe un réel β tel que $y = \beta x$. On a alors

$$\lambda(y)y = u^* \circ u(y) = \beta u^* \circ u(x) = \alpha \lambda(x)x = \lambda(x)(\alpha x) = \lambda(x)y.$$

Puisque le vecteur y est non nul, on en déduit que $\lambda(y) = \lambda(x)$. Si la famille est libre, on a d'une part

$$u^* \circ u(x + y) = \lambda(x + y)(x + y) = \lambda(x + y)x + \lambda(x + y)y,$$

et d'autre part

$$u^* \circ u(x + y) = u^* \circ u(x) + u^* \circ u(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y.$$

Il en résulte que $(\lambda(x + y) - \lambda(x))x + (\lambda(x + y) - \lambda(y))y = 0_E$ et, la famille étant libre, on a alors $\lambda(x + y) - \lambda(x) = 0$ et $\lambda(x + y) - \lambda(y) = 0$, d'où $\lambda(y) = \lambda(x)$.

On a établi qu'il existe un unique réel λ tel que, pour tout vecteur x non nul de E , $u^* \circ u(x) = \lambda x$ et cette égalité est trivialement vraie pour $x = 0_E$. On a prouvé l'assertion i..

(d) Conclure.

On a montré la chaîne d'implications « i. $\implies$ ii. $\implies$ iii. $\implies$ i. », ce qui permet de déduire, par transitivité, que les trois assertions sont deux à deux équivalentes.