Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2025/2026

Examen du 7 janvier 2026

Les documents, calculatrices, téléphones ou autres appareils connectés sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 3 heures

Exercice 1 (réduction d'une forme quadratique, 4 points). Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ relativement à laquelle la matrice de la forme quadratique

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ q(x) = 2{x_1}^2 + 4{x_2}^2 + 2{x_3}^2 + 4{x_4}^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 6x_2x_3 - 8x_2x_4 + 6x_3x_4$$

est diagonale. En déduire la signature et le rang de q.

Exercice 2 (problème aux moindres carrés, 4 points). Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\ln(t) - at - b)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 (représentation d'une forme linéaire, 4 points). Soit n un entier naturel et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de dégré inférieur ou égal à n.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme Q de E tel que

$$\forall P \in E,\ P(0) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que le polynôme Q est de degré n.
   Indication : on pourra se servir du fait que l'inverse de la matrice H d'ordre m, avec m un entier naturel non nul, ayant pour coefficients $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, a des coefficients entiers, s'exprimant en fonction de coefficients binomiaux, donnés par

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,m\}^2,\ (H^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j-1)\binom{m+i-1}{m-j}\binom{m+j-1}{m-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2.$$

Exercice 4 (propriétés des endomorphismes antisymétriques, 15 points). Soit n un entier naturel, E un espace euclidien de dimension n, de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et u un endomorphisme de E. On rappelle que u est dit *antisymétrique* si et seulement si $u^* = -u$, où l'endomorphisme u^* désigne l'adjoint de u.

1. Pour tout couple de vecteurs x et y de E, développer $\langle u(x+y), x+y\rangle$, puis montrer que u est antisymétrique si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension de E est non nulle. Soit $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ une base orthonormée de E.
   (a) Donner une expression des coefficients de la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Que dire de la matrice M si u est un endomorphisme antisymétrique ?

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u antisymétrique et non nul.

3. Montrer que si le nombre réel λ est une valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

4. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires orthogonaux. En déduire que $\ker(u) = \ker(u^2)$, où $u^2 = u \circ u$.
5. Montrer que l'endomorphisme u^2 est auto-adjoint et que ses valeurs propres sont négatives ou nulles.
6. (a) Montrer que l'endomorphisme u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.

   Soit x un vecteur propre de u^2 associé à une telle valeur propre. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\{x, u(x)\}$.

   (b) Montrer que F est stable par u et de dimension égale à 2.

   (c) Montrer que le supplémentaire orthogonal $F^\perp$ est stable par u.

   (d) Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$, noté $u_{|_{F^\perp}}$, est antisymétrique et qu'on a $\mathrm{Im}\,(u) = F \oplus \mathrm{Im}\,(u_{|_{F^\perp}})$.
7. En déduire que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair.
   Indication : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.

On considère une application des précédents résultats. L'espace euclidien E est ici de dimension 4 et u est un endomorphisme de E de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ orthonormée de E.

8. (a) Montrer que l'endomorphisme u est antisymétrique.

   (b) Vérifier que le vecteur $x = e_1 + e_2 - e_3$ est un vecteur propre de u^2.

   (c) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\{x, u(x)\}$. Déterminer une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$.

   (d) En déduire une base orthonormée de E et deux nombres réels α et β tels que la matrice de u dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$