

Examen du 2 juillet 2026

Les documents, calculatrices, téléphones ou autres appareils connectés sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 3 heures

Exercice 1 (forme quadratique, 5 points). Soit n un entier naturel. On considère l'application définie sur l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], q(P) = \int_0^1 (P'(x))^2 w(x) dx,$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P et w est une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles, continue et strictement positive.

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Déterminer la forme polaire de q , son cône isotrope et son noyau.
3. En déduire un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_n[X]$ sur lequel la restriction de la forme polaire de q est un produit scalaire.
4. On suppose dans cette question que la fonction w est constante et égale à 1. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est le rang de cette matrice ?

Exercice 2 (inégalité arithmético-géométrique, 4 points). Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que la fonction logarithme népérien $\ln$ est strictement croissante et concave sur son domaine de définition.
2. En déduire l'inégalité

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels strictement positifs. On pourra pour cela admettre le résultat suivant : soit I un intervalle réel et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f vérifie la condition suivante pour $p = 2$, alors elle la vérifie pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in I^p, f\left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}{p}\right) \leq \frac{f(\lambda_1) + \dots + f(\lambda_p)}{p}.$$

3. En déduire l'inégalité

$$(\det(S))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\text{tr}(S)}{n},$$

pour toute matrice S une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$.

4. En déduire l'inégalité

$$|\det(M)| \leq \left(\frac{\text{tr}(M^\top M)}{n} \right)^{\frac{n}{2}},$$

pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (théorème de Courant–Fisher, 7 points). Soit n un entier naturel non nul, E un espace euclidien de dimension n , de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée notée $\|\cdot\|$, et u un endomorphisme auto-adjoint de E . Le but de cet exercice est de donner une caractérisation variationnelle des valeurs propres de u .

- Justifier que u possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, telles que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ orthonormée de E formée de vecteurs propres associés.

On souhaite montrer que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = \inf_{F \in G_k} \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2},$$

où G_k désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k .

- Montrer que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}), \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_k \|x\|^2.$$

- En déduire que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = \sup_{x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

- Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$ et F un élément de G_k .

- Montrer que l'intersection de F et de $\text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})$ ne peut être réduite au vecteur nul.

Indication : on pourra utiliser la formule de Grassman.

- Montrer que

$$\forall x \in (F \cap \text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})) \setminus \{0_E\}, \lambda_k \leq \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

- Montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}, x \in F \setminus \{0_E\} \right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

- Déduire alors des questions précédentes que

$$\lambda_k = \sup_{x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

- Montrer alors que

$$\lambda_k = \min_{F \in G_k} \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2},$$

et conclure.

Exercice 4 (norme de Frobenius et valeurs singulières, 4 points). Soit m et n deux entiers naturels non nuls et M une matrice non nulle de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

- Rappeler ce qu'est une décomposition en valeurs singulières de la matrice M .

On considère la norme de Frobenius de M , donnée par $\|M\|_F = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$.

- Montrer que pour toute matrice orthogonale P d'ordre m et toute matrice orthogonale Q d'ordre n , on a

$$\|PM\|_F = \|MQ\|_F = \|M\|_F.$$

- Montrer alors que

$$\|M\|_F^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sont les valeurs singulières de M . En déduire l'encadrement

$$\sigma_1 \leq \|M\|_F \leq \sqrt{r} \sigma_1.$$

- On suppose dans cette question que la matrice M est de rang un, c'est-à-dire qu'il existe X de $M_{m,1}(\mathbb{R})$ et Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $M = XY^T$. Montrer que

$$\|M\|_F = \|X\|_F \|Y\|_F.$$

En déduire l'unique valeur singulière de M .