

Corrigé (succinct) de l'examen du 2 juillet 2026

Exercice 1 (forme quadratique). Soit n un entier naturel. On considère l'application définie sur l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], q(P) = \int_0^1 (P'(x))^2 w(x) dx,$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P et w est une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles, continue et strictement positive.

1. Montrer que q est une forme quadratique.

On introduit l'application

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, b(P, Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)w(x) dx.$$

Celle-ci est clairement une forme bilinéaire symétrique (ceci résulte de la linéarité de la dérivation et de l'intégrale et de la commutativité du produit de nombres réels) et on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], b(P, P) = q(P).$$

On en déduit que la forme q est quadratique.

2. Déterminer la forme polaire de q , son cône isotrope et son noyau.

La forme bilinéaire b associée à q introduite dans la question précédente est symétrique ; c'est donc la forme polaire de q . La fonction w étant strictement positive, on peut par ailleurs observer que q est une forme quadratique positive (ceci résulte de la positivité de l'intégrale), d'où son cône isotrope coïncide avec son noyau. Le cône isotrope est constitué des polynômes dont les polynômes dérivés sont nuls en tout point de l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire des polynômes constants.

3. En déduire un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_n[X]$ sur lequel la restriction de la forme polaire de q est un produit scalaire.

D'après ce que l'on vient de voir, la forme polaire de q est positive. Elle est donc un produit scalaire sur tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lequel son noyau est réduit au polynôme nul, c'est-à-dire le seul polynôme constant est le polynôme nul. On peut donc poser

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}.$$

4. On suppose dans cette question que la fonction w est constante et égale à 1. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est le rang de cette matrice ?

Soit M la matrice de q relativement à la base canonique $\{1, X, \dots, X^n\}$. On a

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1, \\ \int_0^1 (i-1)(j-1)x^{i+j-4} dx = \frac{(i-1)(j-1)}{i+j-3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau de la forme quadratique étant le sous-espace des polynômes constants, le rang de cette matrice est égal à n .

Exercice 2 (inégalité arithmético-géométrique). Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que la fonction logarithme népérien $\ln$ est strictement croissante et concave sur son domaine de définition.

La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ est positive, et ne s'annule qu'en $x = 1$, sur ce domaine, ce qui fait de $\ln$ une fonction strictement croissante, et sa dérivée seconde $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ est négative, ce qui en fait une fonction concave.

2. En déduire l'inégalité

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels strictement positifs. On pourra pour cela admettre le résultat suivant : soit I un intervalle réel et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f vérifie la condition suivante pour $p = 2$, alors elle la vérifie pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in I^p, f\left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}{p}\right) \leq \frac{f(\lambda_1) + \dots + f(\lambda_p)}{p}.$$

Par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, démontrer l'inégalité équivaut à montrer

$$\ln\left((\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}\right),$$

soit encore, par propriété du logarithme,

$$\frac{\ln(\lambda_1) + \dots + \ln(\lambda_n)}{n} \leq \ln\left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}\right).$$

La fonction $\ln$ étant par ailleurs concave, son opposée est une fonction convexe, qui vérifie par conséquent la condition du résultat de l'énoncé pour $p = 2$. Il en résulte que l'inégalité ci-dessus est vraie.

3. En déduire l'inégalité

$$(\det(S))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\text{tr}(S)}{n},$$

pour toute matrice S une matrice symétrique positive de $M_n(\mathbb{R})$.

La matrice S étant réelle symétrique, elle est diagonalisable, ce qui implique, par invariance du déterminant et de la trace par similitude, que $\det(S) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ et $\text{tr}(S) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de S . La positivité de S entraîne par ailleurs la positivité de ses valeurs propres. Si l'une des valeurs propres est nulle, l'inégalité est alors trivialement satisfaite. Sinon, il suffit d'utiliser l'inégalité arithmético-géométrique précédemment démontrée, en considérant que les nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S .

4. En déduire l'inégalité

$$|\det(M)| \leq \left(\frac{\text{tr}(M^\top M)}{n}\right)^{\frac{n}{2}},$$

pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$.

La matrice $M^\top M$ est réelle symétrique, puisque $(M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M$, et positive, car

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top M^\top M X = (MX)^\top M X = \|MX\|^2 \geq 0.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$(\det(M^\top M))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\text{tr}(M^\top M)}{n}.$$

Par propriété du déterminant, on a $\det(M^\top M) = \det(M^\top) \det(M) = \det(M)^2 = |\det(M)|^2$, ce qui permet de conclure par croissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{n}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 (théorème de Courant–Fisher). Soit n un entier naturel non nul, E un espace euclidien de dimension n , de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée notée $\|\cdot\|$, et u un endomorphisme auto-adjoint de E . Le but de cet exercice est de donner une caractérisation variationnelle des valeurs propres de u .

- Justifier que u possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, telles que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ orthonormée de E formée de vecteurs propres associés.

L'endomorphisme u étant auto-adjoint, on sait qu'il est diagonalisable dans une base orthonormée de E et que ses valeurs propres sont réelles.

On souhaite montrer que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = \inf_{F \in G_k} \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2},$$

où G_k désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k .

- Montrer que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}), \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_k \|x\|^2.$$

Pour tout vecteur x de $\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\})$, on a

$$x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \text{ et } \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = \lambda_k \|x\|^2.$$

- En déduire que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = \sup_{x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Le vecteur e_k étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k , on a

$$\langle u(e_k), e_k \rangle = \langle \lambda_k e_k, e_k \rangle = \lambda_k \|e_k\|^2.$$

On déduit alors de la précédente inégalité que

$$\lambda_k = \frac{\langle u(e_k), e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = \max_{x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2},$$

l'existence du maximum assurant celle de la borne supérieure (puisque c'est la borne supérieure).

- Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$ et F un élément de G_k .

- Montrer que l'intersection de F et de $\text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})$ ne peut être réduite au vecteur nul.

Indication : on pourra utiliser la formule de Grassman pour minorer la dimension de cette intersection.

Il découle de la formule de Grassmann et du fait que la famille $\{e_k, \dots, e_n\}$ est orthogonale que

$$\begin{aligned} n &\geq \dim(F + \text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})) = \dim(F) + \dim(\text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})) - \dim(F \cap \text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})) \\ &= k + (n - k + 1) - \dim(F \cap \text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})), \end{aligned}$$

d'où

$$\dim(F \cap \text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})) \geq k + (n - k + 1) - n = 1.$$

Il n'est donc pas possible que l'intersection soit réduite au vecteur nul.

- Montrer que

$$\forall x \in (F \cap \text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})) \setminus \{0_E\}, \lambda_k \leq \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Tout vecteur x non nul de $F \cap \text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})$ peut s'écrire $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i$, d'où

$$\lambda_k \leq \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=k}^n x_i^2} = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

- Montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}, x \in F \setminus \{0_E\} \right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

L'ensemble est non vide, puisque F contient un vecteur non nul appartenant à $\text{Vect}(\{e_k, \dots, e_n\})$ d'après la question précédente. Par ailleurs, l'application de l'inégalité établie à la première question dans le cas $k = n$ conduit, en utilisant que $\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_n\}) = E$, à

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \lambda_n,$$

ce qui fait que l'ensemble est majoré.

(d) Déduire alors des questions précédentes que

$$\lambda_k = \sup_{x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

La question précédente assure que l'ensemble $\left\{ \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}, x \in F \setminus \{0_E\} \right\}$ admet une borne supérieure, qui est nécessairement telle que

$$\lambda_k \leq \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2},$$

compte tenu de l'inégalité obtenue plus haut. On se sert alors de la caractérisation de λ_k trouvée dans la question 3.

5. Montrer alors que

$$\lambda_k = \min_{F \in G_k} \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2},$$

et conclure.

Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\})$ est de dimension k et appartient donc à G_k . Il résulte de la précédente question que

$$\lambda_k = \sup_{x \in \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} = \min_{F \in G_k} \sup_{x \in F \setminus \{0_E\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2},$$

l'existence du minimum assurant celle de la borne inférieure (puisque c'est la borne inférieure).

Exercice 4 (norme de Frobenius et valeurs singulières). Soit m et n deux entiers naturels non nuls et M une matrice non nulle de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Rappeler ce qu'est une décomposition en valeurs singulières de la matrice M .

Une décomposition en valeurs singulières de M consiste en l'écriture

$$M = U \Sigma V^\top,$$

où U est une matrice orthogonale d'ordre m , V est une matrice orthogonale d'ordre n et Σ est la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, écrite par blocs,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix},$$

avec Σ_r une matrice diagonale d'ordre r égal au rang de M ,

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r \end{pmatrix},$$

dont les coefficients diagonaux sont réels et tels que $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

On considère la norme de Frobenius de M , donnée par $\|M\|_F = \sqrt{\text{tr}(M^\top M)}$.

2. Montrer que pour toute matrice orthogonale P d'ordre m et toute matrice orthogonale Q d'ordre n , on a

$$\|PM\|_F = \|MQ\|_F = \|M\|_F.$$

On a d'une part

$$\|PM\|_F = \sqrt{\text{tr}((PM)^\top PM)} = \sqrt{\text{tr}(M^\top P^\top PM)} = \sqrt{\text{tr}(M^\top I_m M)} = \|M\|_F,$$

et d'autre part, en utilisant une propriété de la trace,

$$\|MQ\|_F = \sqrt{\text{tr}((MQ)^\top MQ)} = \sqrt{\text{tr}(Q^\top M^\top MQ)} = \sqrt{\text{tr}(M^\top M Q Q^\top)} = \sqrt{\text{tr}(M^\top M I_n)} = \|M\|_F.$$

3. Montrer alors que

$$\|M\|_F^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sont les valeurs singulières de M . En déduire l'encadrement

$$\sigma_1 \leq \|M\|_F \leq \sqrt{r} \sigma_1.$$

En utilisant l'invariance de la norme de Frobenius par transformation isométrique démontrée dans la question précédente et en reprenant les notations utilisées plus haut pour une décomposition en valeurs singulières de M , il vient

$$\|M\|_F^2 = \|U^\top M V\|_F^2 = \|\Sigma\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\Sigma)_{ij}^2 = \sum_{k=1}^r \sigma_k^2.$$

La plus grande valeur singulière étant σ_1 , on peut minorer cette dernière somme par σ_1^2 et la majorer par $r\sigma_1^2$, dont on déduit l'encadrement voulu.

4. On suppose dans cette question que la matrice M est de rang un, c'est-à-dire qu'il existe X de $M_{m,1}(\mathbb{R})$ et Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $M = XY^\top$. Montrer que

$$\|M\|_F = \|X\|_F \|Y\|_F.$$

En déduire l'unique valeur singulière de M .

La matrice M étant de rang un, on sait qu'elle possède une unique valeur singulière, qui vaut donc $\|M\|_F$ d'après la question précédente. On a

$$\|M\|_F = \sqrt{\text{tr}(M^\top M)} = \sqrt{\text{tr}((XY^\top)^\top XY^\top)} = \sqrt{\text{tr}(YX^\top XY^\top)}.$$

La matrice $X^\top X$ est carrée d'ordre 1, d'unique coefficient valant $\sum_{i=1}^n x_i^2$. On en déduit que

$$\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\text{tr}(Y Y^\top)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \|Y\|_F = \|X\|_F \|Y\|_F.$$

L'unique valeur singulière de M est donc $\|X\|_F \|Y\|_F$.