Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Corrigé (succinct) du partiel du 31 octobre 2024

Exercice 1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle égale à n. On suppose que u possède une unique valeur propre λ.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

L'endorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres associés à l'unique valeur propre λ, ce qui équivaut à dire que u est une homothétie de rapport λ ou encore que sa matrice représentative dans toute base de E est λI_n.

2. Calculer le polynôme caractéristique de u.

Le polynôme caractéristique de u est unitaire, de degré égal à n et possède pour unique racine λ. On a donc $\chi_u(X) = (X - \lambda)^n$.

3. Justifier que l'endomorphisme $u - \lambda\, id_E$ est nilpotent.

Le polynôme caractéristique de u est annulateur de u en vertu du théorème de Cayley–Hamilton. On a ainsi $\chi_u(u) = (u - \lambda\, id_E)^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et l'endomorphisme $u - \lambda\, id_E$ est donc nilpotent.

Exercice 2 (produit de Kronecker). Soit n un entier naturel non nul. Pour toutes matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$, on définit le produit de Kronecker de A et B comme la matrice $A \otimes B$ de $M_{n^2}(\mathbb{C})$ telle que

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que, si P, P', Q et Q' sont des matrices de $M_n(\mathbb{C})$, on a

$$(P \otimes Q)(P' \otimes Q') = (PP') \otimes (QQ').$$

On a d'une part

$$(P \otimes Q) = \begin{pmatrix} p_{11}Q & \dots & p_{1n}Q \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}Q & \dots & p_{nn}Q \end{pmatrix} \text{ et } (P' \otimes Q') = \begin{pmatrix} p'_{11}Q' & \dots & p'_{1n}Q' \\ \vdots & & \vdots \\ p'_{n1}Q' & \dots & p'_{nn}Q' \end{pmatrix},$$

et un produit matriciel par blocs donne alors

$$(P \otimes Q)(P' \otimes Q') = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n (p_{1k}Q)(p'_{k1}Q') & \dots & \sum_{k=1}^n (p_{1k}Q)(p'_{kn}Q') \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n (p_{nk}Q)(p'_{k1}Q') & \dots & \sum_{k=1}^n (p_{nk}Q)(p'_{kn}Q') \end{pmatrix}.$$

On a d'autre part que

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ (PP')_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ik}p'_{kj},$$

d'où

$$(PP') \otimes (QQ') = \begin{pmatrix} (\sum_{k=1}^n p_{1k}p'_{k1})(QQ') & \dots & (\sum_{k=1}^n p_{1k}p'_{kn})(QQ') \\ \vdots & & \vdots \\ (\sum_{k=1}^n p_{nk}p'_{k1})(QQ') & \dots & (\sum_{k=1}^n p_{nk}p'_{kn})(QQ') \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que la matrice $P \otimes Q$ est inversible si et seulement si les matrices P et Q sont inversibles. Exprimer l'inverse de cette matrice en fonction des inverses des matrices P et Q.

Si P et Q sont inversibles, on a, en utilisant l'identité de la question précédente avec $P' = P^{-1}$ et $Q' = Q^{-1}$,

$$(P \otimes Q)(P^{-1} \otimes Q^{-1}) = (PP^{-1}) \otimes (QQ^{-1}) = I_n \otimes I_n = I_{n^2},$$

d'où $P \otimes Q$ est inversible, d'inverse $P^{-1} \otimes Q^{-1}$. Si l'une des deux matrice n'est pas inversible, par exemple P (un raisonnement semblable s'applique si Q n'est pas inversible), alors il existe une matrice P' non nulle telle que $PP' = 0_n$. En utilisant alors l'identité de la question précédente avec $Q' = I_n$, on a

$$(P \otimes Q)(P' \otimes I_n) = (PP') \otimes (QI_n) = 0_n \otimes Q = 0_{n^2},$$

avec $P' \otimes I_n$ non nulle et $P \otimes Q$ n'est donc pas inversible.

Dans la suite de l'exercice, on considère deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$.

3. Justifier qu'il existe des matrices inversibles P et Q telles que les matrices $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ soient triangulaires supérieures. On note $\lambda_1, \dots \lambda_n$ et $\nu_1, \dots, \nu_n$ les coefficients diagonaux respectifs de ces dernières matrices.

Les matrices A et B sont des matrices carrées complexes, elles sont donc trigonalisables. Les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots \lambda_n$ et $\nu_1, \dots, \nu_n$ sont alors les valeurs propres respectives de A et de B.

4. Calculer le produit $(P^{-1} \otimes Q^{-1})(A \otimes B)(P \otimes Q)$ et déterminer le spectre de $A \otimes B$.

En utilisant l'identité de la première question, on trouve que

$$(P^{-1} \otimes Q^{-1})(A \otimes B)(P \otimes Q) = (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ).$$

On observe que la matrice résultante est triangulaire supérieure et ses valeurs propres sont par conséquent ses coefficients diagonaux, qui sont égaux aux produits

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ \lambda_i \nu_j.$$

La matrice $(P^{-1} \otimes Q^{-1}$ étant l'inverse de la matrice $P \otimes Q$, cette matrice triangulaire supérieure est semblable à $A \otimes B$ et son spectre est donc aussi celui de $A \otimes B$.

5. En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \otimes B$.

On déduit de la question précédente que

$$\chi_{A\otimes B}(X) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(X - \lambda_i \nu_j),\ \operatorname{tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i \nu_j = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \text{ et } \det(A \otimes B) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i \nu_j = (\det(A)\det(B))^n.$$

Exercice 3. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 4. On cherche à déterminer l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \text{ et } \operatorname{tr}(A) = 8.$$

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ? Montrer que 2 est une valeur propre de A et déterminer son ordre de multiplicité algébrique.

Si le polynôme $X^3 - 4X^2 + 4X = X(X-2)^2$ est annulateur de A, les racines de ce polynôme, 0 et 2, sont des valeurs possibles pour A. Puisque A est une matrice carrée complexe, elle est trigonalisable et sa trace est par conséquent égale à la somme de ses valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité algébrique. On en déduit que 2 est valeur propre de A avec un ordre de multiplicité égal à $\frac{8}{2} = 4$.

2. Justifier que les sous-espaces vectoriels $\ker(A)$ et $\ker((A - 2I_n)^2)$ sont supplémentaires. Quelles sont leurs dimensions respectives ?

Par le lemme de décomposition des noyaux, il vient, en utilisant que le polynôme $X(X-2)^2$ est annulateur de A,

$$\ker(A) \oplus \ker((A - 2I_n)^2) = \ker(A(A - 2I_n)^2) = M_{n,1}(\mathbb{C}).$$

C'est une décomposition de l'espace en sous-espaces caractéristiques de A. Compte-tenu de l'ordre de multiplicité algébrique de la valeur propre 2 précédemment déterminé, on a $\dim(\ker((A - 2I_n)^2)) = 4$ et on en déduit que $\dim(\ker(A)) = n - 4$.

3. En déduire que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 2I_4 + M & 0_{4,n-4} \\ 0_{n-4,4} & 0_{n-4} \end{pmatrix}$$

où M est une matrice de $M_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = 0_4$.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. D'après la question précédente, on sait qu'on a la décomposition en somme directe $E = \ker((u - 2id_E)^2) \oplus \ker(u)$, et, dans une base de E adaptée à cette décomposition, la matrice représentative de u est bien de la forme annoncée, la matrice M étant la matrice représentative de la restriction de $u - 2id_E$ à $\ker((u - 2id_E)^2)$, qui est bien nilpotente puisque $((u - 2id_E)_{|_{\ker((u-2id_E)^2)}})^2 = 0_{\mathscr{L}(\ker((u-2id_E)^2))}$

4. Montrer enfin que la matrice M introduite ci-dessus est est de rang au plus égal à 2 (on pourra faire appel au théorème du rang) et en déduire qu'elle est semblable à l'une des trois matrices suivantes :

$$0_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $M^2 = 0_4$, on a $\text{Im}(M) \subset \ker(M)$ et donc $\text{rang}(M) \leq \dim(\ker(M))$. Par le théorème du rang, il vient alors $\text{rang}(M) \leq 4 - \text{rang}(M)$, d'où $\text{rang}(M) \leq 2$. Si $\text{rang}(M) = 0$, alors $M = 0_4$. Si $\text{rang}(M) = 1$, alors une forme normale de Jordan associée à M n'aura qu'une colonne non nulle (c'est-à-dire qu'elle contiendra un bloc de Jordan de taille 2 et deux blocs de taille 1), et M est donc semblable à la seconde matrice. Enfin, si $\text{rang}(M) = 2$, alors une forme normale de Jordan associée à M n'aura que deux colonnes non nulles, chacune nécessairement associée à un bloc de Jordan de taille 2 (puisque $M^2 = 0$) et M est donc semblable à la troisième matrice.

Exercice 4 (suite récurrente). Déterminer le terme général de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0.$$

L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 = 0$. Le terme général de la suite est donc de la forme

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \alpha + \beta k,$$

où le couple de réels α et β est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \alpha = u_0, \\ \alpha + \beta = u_1, \end{cases}$$

d'où $\alpha = 1$ et $\beta = -2$.

Exercice 5 (applications bilinéaires). Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que l'application, appelée *produit vectoriel*, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$(x,y) \mapsto x \wedge y = \left(\det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right),$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, est une application bilinéaire antisymétrique.

La bilinéarité de l'application découle de la linéarité du déterminant par rapport à chacune des colonnes. Le caractère antisymétrique de l'application découle du fait que la permutation des deux colonnes dans les déterminants entraînent la multiplication de ces derniers par -1.

2. Une forme bilinéaire b définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite *alternée* si

$$\forall x \in E,\ b(x,x) = 0.$$

Montrer qu'une forme bilinéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

On suppose que b est antisymétrique, ce qui signifie que, pour tous vecteurs x et y de E, $b(y,x) = -b(x,y)$. Pour tout vecteur x de E, on a alors $b(x,x) = -b(x,x)$ et donc $b(x,x) = 0$. Réciproquement, on suppose que b est alternée. Pour tous vecteurs x et y de E, on alors

$$0 = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) = b(x,y) + b(y,x)$$

et donc $b(y,x) = -b(x,y)$.

3. On considère la forme bilinéaire b de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ x = (x_1, x_2),\ \forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ b(x,P) = 3x_1 P(0) + x_2 \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer les noyaux à gauche et à droite de b, ainsi que la matrice de b relativement à la base $\{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Le noyau à gauche de b est

$$\begin{aligned} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ b(x,P) = 0\right\} &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid b(x,1) = 0,\ b(x,X) = 0,\ b(x,X^2) = 0\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \mid 3x_1 + x_2 = 0,\ \frac{1}{2}x_2 = 0,\ \frac{1}{3}x_2 = 0\right\} \\ &= \{(0,0)\}, \end{aligned}$$

et le noyau à droite de b est

$$\begin{aligned}\left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, \forall x \in \mathbb{R}^2,\ b(x,P)=0\right\} &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, b((1,0),P)=0,\ b((0,1),P)=0\} \\ &= \left\{a_0 + a_1 X + a_2 X^2,\ (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3a_0 = 0,\ a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = 0\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\left\{X^2 - \frac{2}{3}X\right\}\right).\end{aligned}$$

La matrice de b relativement à la base $\{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$