Partiel du 30 octobre 2025

Les documents, calculatrices, téléphones ou autres appareils connectés sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2h

Exercice 1 (8 points). Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et u l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme Q, défini par

$$Q(X) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X).$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Soit P un vecteur propre de u associé à une valeur propre réelle λ.
   (a) Montrer que P est nécessairement de degré 2.
   (b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que le réel -1 est une racine de P, puis que l'ordre de multiplicité de cette racine est 2.
   (c) En déduire que le réel 3 est une valeur propre de u et déterminer les vecteurs propres associés.
   (d) En supposant que $\lambda = -1$, étudier de même l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de P. En déduire que le réel -1 est une valeur propre de u et déterminer les vecteurs propres associés.
   (e) On suppose enfin que $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 3$. Montrer que les réels -1 et 1 sont des racines de P. En déduire une factorisation des vecteurs propres obtenus, ainsi que la valeur propre associée.
3. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que F est stable par u.
   (b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme induit par u sur F dans la base canonique de F.
   (c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ telle que

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}.$$

   Indication : on pourra se servir des résultats de la question 2.
   (d) Expliciter alors M^n en fonction de l'entier n.

Exercice 2 (3 points).

1. Soit u un endomorphisme bijectif d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $u^{-1} = Q(u)$.
2. Soit à présent u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ associant à tout polynôme $P(X)$ le polynôme $P(2X)$. Montrer que u est un automorphisme, puis déterminer ses éléments propres. Existe-t-il un polynôme Q tel que $u^{-1} = Q(u)$?

Exercice 3 (3 points). Soit m un nombre réel. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les valeurs propres de M sont -1 et 1.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Donner le polynôme minimal de M en fonction de la valeur de m.

Exercice 4 (3 points). Calculer une réduction de Jordan de la matrice

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi_M(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2 = (X+1)^3(X-2)$.

Exercice 5 (3 points). On considère la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ b(x, y) = 4x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_1) + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 5x_2y_3 + 6x_3y_2 + 9x_3y_3.$$

1. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les noyaux à gauche et à droite de b, ainsi que son rang.
3. Donner enfin la matrice de b relativement à la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(3, 0, 1)$.