Corrigé (succinct) du partiel du 30 octobre 2025

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et u l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme Q, défini par

$$Q(X) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X).$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

L'application associe un polynôme à tout polynôme, on a donc juste à montrer qu'elle est linéaire. Soit P et R deux polynômes et α un nombre réel. On a, en utilisant la linéarité de la dérivation et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition,

$$\begin{aligned}
u(\alpha P+R)(X) &= (2X+1)(\alpha P+R)(X) - (X^2-1)(\alpha P+R)'(X) \\
&= (2X+1)(\alpha P(X)+R(X)) - (X^2-1)(\alpha P'(X)+R'(X)) \\
&= \alpha((2X+1)P(X)-(X^2-1)P'(X)) + (2X+1)R(X) - (X^2-1)R'(X) \\
&= \alpha u(P)(X) + u(R)(X).
\end{aligned}$$

2. Soit P un vecteur propre de u associé à une valeur propre réelle λ.

   (a) Montrer que P est nécessairement de degré 2.

   Soit $P(X) = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots$ un polynôme non nul de degré k (on a donc $a_k \neq 0$). On a alors

   $$u(P)(X) = (2-k)a_k X^{k+1} + (a_k + (k+1)a_{k-1})X^k + \dots$$

   et, si $k \neq 2$, le polynôme $u(P)$ est de degré $k+1$, ce qui ne permet pas qu'il soit colinéaire à P. Ainsi, les vecteurs propres de u, s'il en existe, sont exactement de degré 2.

   (b) On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que le réel -1 est une racine de P, puis que l'ordre de multiplicité de cette racine est 2.

   Si $u(P) = 3P$, on a

   $$(2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X) = 3P(X) \iff (X-1)(2P(X) - (X+1)P'(X)) = 0.$$

   Par intégrité de l'anneau des polynôme, il vient alors $2P(X) - (X+1)P'(X) = 0$, d'où, en substituant à X la valeur -1, $2P(-1) = 0$. On peut alors écrire que $P(X) = (X+1)^m R(X)$, avec $R(-1) \neq 0$, et donc

   $$2(X+1)^m R(X) - (X+1)(m(X+1)^{m-1}R(X) + (X+1)^m R'(X)) = 0,$$

   soit encore

   $$(X+1)^m((2-m)R(X) - (X+1)R'(X)) = 0.$$

   En utilisant l'intégrité de l'anneau des polynômes pour simplifier et en substituant à X la valeur -1, on obtient que $(2-m)R(-1) = 0$, d'où $m = 2$.

   (c) En déduire que le réel 3 est une valeur propre de u et déterminer les vecteurs propres associés.

   Puisqu'un vecteur propre de u associé à la valeur propre 3 est nécessairement de degré 2, on en déduit que le polynôme quotient R trouvé ci-dessus est constant. Le vecteur propre est donc de la forme $P(X) = a(X+1)^2$, avec a un nombre réel non nul, et une simple vérification montre que l'on a effectivement $u(P) = 3P$ dans ce cas. On a

   $$3 \in \mathrm{Sp}(u) \text{ et } E_3(u) = \mathrm{Vect}(\{(X+1)^2\}).$$

   (d) En supposant que $\lambda = -1$, étudier de même l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de P. En déduire que le réel -1 est une valeur propre de u et déterminer les vecteurs propres associés.

En procédant comme précédemment, si $u(P) = -P$, alors $(X+1)(2P(X)-(X-1)P'(X)) = 0$, d'où $2P(1) = 0$. En posant alors $P(X) = (X-1)^m R(X)$, avec $R(1) \neq 0$, il vient $(2-m)R(X)-(X-1)R'(X) = 0$, d'où $m = 2$ et $R' = 0$. On en déduit, et on vérifie, qu'un vecteur propre P associé à -1 est de la forme $P(X) = a(X-1)^2$, avec a un nombre réel non nul. On a

$$-1 \in \mathrm{Sp}(u) \text{ et } E_{-1}(u) = \mathrm{Vect}(\{(X-1)^2\}).$$

(e) On suppose enfin que $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 3$. Montrer que les réels -1 et 1 sont des racines de P. En déduire une factorisation des vecteurs propres obtenus, ainsi que la valeur propre associée.

Pour toute valeur propre λ de u, distincte de -1 ou 3, on a, de la même manière,

$$u(P) = \lambda P \implies (2X+1-\lambda)P(X)-(X^2-1)P'(x) = 0,$$

d'où $(3-\lambda)P(1) = 0$ et $-(1+\lambda)P(-1) = 0$. Les nombres réels -1 et 1 sont donc racines de P, et on en conclut que $P(X) = a(X^2-1)$, avec a un nombre réel non nul. On vérifie que pour un tel polynôme $u(P) = P$ d'où

$$1 \in \mathrm{Sp}(u) \text{ et } E_1(u) = \mathrm{Vect}(\{(X^2-1)\}).$$

3. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

(a) Montrer que F est stable par u.

On a $u(1)(X) = 1+2X$, $u(X)(X) = 1+X+X^2$ et $u(X^2)(X) = 2X+X^2$. Par linéarité de u, on en déduit que l'image de tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et donc F est stable par u.

(b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme induit par u sur F dans la base canonique de F.

En utilisant les calculs effectués dans la question précédente, on trouve

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}.$$

Indication : on pourra se servir des résultats de la question 2.

Tout le travail a été fait dans la question 2. En écrivant les polynômes trouvés comme vecteurs propres dans la base canonique, on trouve

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

telles que $M = PDP^{-1}$, dont on déduit le résultat en raisonnant par récurrence sur l'entier n.

(d) Expliciter alors M^n en fonction de l'entier n.

Le calcul de l'inverse de P donne $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ M^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^n+2+(-1)^n & 3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n-2 \\ 2\times 3^n-2(-1)^n & 2\times 3^n+2(-1)^n & 2\times 3^n-2(-1)^n \\ 3^n-2+(-1)^n & 3^n-(-1)^n & 3^n+(-1)^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Soit u un endomorphisme bijectif d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $u^{-1} = Q(u)$.

L'espace E état de dimension finie, on peut faire appel au théorème de Cayley–Hamilton. On sait alors que $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, où χ_u est le polynôme caractéristique de u, de coefficient de terme de degré nul égal à $(-1)^{\dim(E)} \det(u)$. En écrivant alors

$$\chi_u(X) = XR(X) + (-1)^{\dim(E)} \det(u),$$

on voit que le polynôme $Q = -\frac{(-1)^{\dim(E)}}{\det(u)} R$ convient.

2. Soit à présent u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ associant à tout polynôme $P(X)$ le polynôme $P(2X)$. Montrer que u est un automorphisme, puis déterminer ses éléments propres. Existe-t-il un polynôme Q tel que $u^{-1} = Q(u)$?

Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ associant à tout polynôme $P(X)$ le polynôme $P\left(\frac{X}{2}\right)$. On vérifie facilement que $u \circ v = v \circ u = id_E$, d'où u est inversible d'inverse v. Si $u(P) = \lambda P$ pour un polynôme $P(x) = a_k X^k + \cdots + a_0$ non nul de degré k, on trouve, par identification des coefficients de même degré, que $\lambda = 2^k$ et $P(X) = a_k X^k$. La réciproque étant vraie, on en déduit que $\mathrm{Sp}(u) = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. On peut maintenant répondre à la dernière question en raisonnant par l'absurde. On suppose qu'il existe un polynôme Q tel que $u^{-1} = Q(u)$. Ceci implique que le polynôme $XQ(X) - 1$ est annulateur de u. On sait alors que les valeurs propres de u font partie des racines de ce polynôme annulateur, qui sont en nombre fini. Ceci contredit le fait que l'endomorphisme possède une infinité de valeurs propres.

Exercice 3. Soit m un nombre réel. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les valeurs propres de M sont -1 et 1.

On a

$$\begin{aligned}
\chi_M(X) &= \begin{vmatrix} X-(1+m) & -(1+m) & -1 \\ m & X+m & 1 \\ -m & 1-m & X \end{vmatrix} \\
&= (X-(1+m)) \begin{vmatrix} X+m & 1 \\ 1-m & X \end{vmatrix} + (1+m) \begin{vmatrix} m & 1 \\ -m & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m & X+m \\ -m & 1-m \end{vmatrix} \\
&= (X-(1+m))((X+m)X - 1 + m) + m(1+m)(X+1) - m(X+1) \\
&= (X+1)(X^2 - 2X + 1) \\
&= (X+1)(X-1)^2.
\end{aligned}$$

Les racines de χ_M sont les valeurs propres de M, c'est-à-dire -1 et 1.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice M est-elle diagonalisable ?

La matrice M est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension égale à 2, ce dernier étant défini par le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} mx_1 + (1+m)x_2 + x_3 = 0, \\ -mx_1 - (1+m)x_2 - x_3 = 0, \\ mx_1 + (m-1)x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Si $m = 0$, ce système se réduit à $x_2 + x_3 = 0$, soit encore $x_2 = -x_3$, et la matrice est diagonalisable. En revanche, si m est non nul, le système se réduit à $x_1 + x_2 = 0$ et $x_2 + x_3 = 0$, d'où $x_1 = -x_2 = x_3$, et la matrice n'est alors pas diagonalisable.

3. Donner le polynôme minimal de M en fonction de la valeur de m.

On déduit de la question précédente et d'un résultat de cours que

$$\mu_M(X) = \begin{cases} (X+1)(X-1) & \text{si } m = 0, \\ (X+1)(X-1)^2 & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

Exercice 4. Calculer une réduction de Jordan de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi_M(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2 = (X+1)^3(X-2)$.
Les valeurs propres de M sont -1 et 2, d'ordres de multiplicité algébrique respectifs 3 et 1. On détermine tout d'abord le sous-espace propre associé à -1. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff \begin{cases} -6x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 12x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff x_4 = 2x_1 \text{ et } x_2 = x_3 = 0.$$

Les sous-espace propre associé à -1 est donc de dimension 1 et la matrice M n'est pas diagonalisable. On en déduit qu'une forme normale de Jordan associée à M contient un bloc de Jordan de taille 3 associé à -1 et un bloc de taille 1 associé à 2. On détermine à présent une famille libre de vecteurs propres généralisés associés au bloc de taille 3. Puisqu'il n'y a qu'un bloc de Jordan associé à -1, on commence par déterminer un vecteur propre associé à -1, par exemple $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^\top$, et on obtient deux autres vecteurs propres généralisés en résolvant successivement les systèmes linéaires $(M + I_4)V_2 = V_1$ et $(M + I_4)V_3 = V_2$. Des solutions possibles sont $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\top$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Il reste à compléter cette famille libre par un vecteur propre associé à 2. On a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{cases} -9x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 12x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_4,\ x_2 = 0 \text{ et } x_3 = -2x_1,$$

et on peut donc choisir $V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^\top$. On a finalement

$$M = PJP^{-1}, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On considère la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ b(x, y) = 4x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_1) + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 5x_2y_3 + 6x_3y_2 + 9x_3y_3.$$

1. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de b relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les noyaux à gauche et à droite de b, ainsi que son rang.

Le noyau à gauche de b est caractérisé par le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 0, \end{aligned}$$

soit encore $x_2 = 5x_1$ et $x_3 = -3x_1$. Ce noyau est engendré par le vecteur $(1, 5, -3)$. Le noyau à droite de b est lui caractérisé par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 &= 0 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &= 0 \\ 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 &= 0, \end{aligned}$$

soit encore $y_2 = -2y_1$ et $y_3 = y_1$. Ce noyau est engendré par le vecteur $(1, -2, 1)$. On en déduit que le rang de b est égal à 2.

3. Donner enfin la matrice de b relativement à la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(3, 0, 1)$.

En utilisant la forule de changement de base pour la matrice d'une forme bilinéaire, on obtient que la matrice de b relativement à la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(3, 0, 1)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 45 & 48 \\ 48 & 36 & 40 \\ 60 & 45 & 60 \end{pmatrix}.$$