Dauphine UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES & LETTRES

Département MIDO
Algèbre linéaire 3
Année 2026/2027

Partiel du 26 octobre 2026

Les documents, calculatrices, téléphones et autres appareils connectés sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2h

Exercice 1 (2 points). Soit n un entier naturel non nul et M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 = 7M^3 - 12M^2$. Montrer que

$$\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{tr}(M) \leq 4n.$$

Exercice 2 (4 points). On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 et M^3.
2. En déduire un polynôme annulateur de M.
3. Déterminer le polynôme minimal de M.
4. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, donner une matrice diagonale qui lui est semblable.

Exercice 3 (diagonalisabilité d'une matrice compagnon, 7 points). Soit n un entier naturel non nul, M la matrice d'ordre n définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ étant des nombres complexes, et P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

1. Donner le polynôme caractéristique de M.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice M et $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

2. Montrer que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ e_i = u^{i-1}(e_1).$$
3. En déduire qu'un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ non nul est annulateur de u si et seulement si $Q(u)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$. *Indication : on pourra calculer $Q(u)(e_i)$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$.*
4. Montrer que P est annulateur de u.
5. Montrer qu'aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à n n'annule u.
6. En déduire le polynôme minimal de la matrice M et donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette matrice soit diagonalisable.

Exercice 4 (3 points). Déterminer une réduction de Jordan de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (8 points). Soit n un entier naturel non nul, A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{smallmatrix}\right)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

1. Calculer le produit de matrices définies par blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ XI_n & I_n \end{pmatrix}(XI_{2n} - B)\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

où X est un nombre complexe.

2. En déduire que

$$\chi_B(X) = \chi_A\left(X^2\right).$$

3. Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.
Indication : on pourra distinguer le cas d'une valeur propre de A nulle de celui d'une valeur propre non nulle.

4. Dans toute cette question, on suppose que A est diagonalisable et inversible.
   (a) Montrer qu'il existe une base de $M_{2n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de B.
   (b) En déduire que B est diagonalisable.

5. Dans toute cette question, on suppose que B est diagonalisable.
   (a) Montrer que si 0 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité algébrique m_0, alors 0 est une valeur propre de B d'ordre de multiplicité algébrique $2m_0$ et que $\dim(E_0(A)) = \dim(E_0(B))$, où $E_0(A)$ et $E_0(B)$ sont respectivement les sous-espaces propres de A et de B associés à 0.
   (b) En conclure que la matrice A est inversible et que les valeurs propres de B sont non nulles.

   On considère le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{q}(X - \eta_i)$, où $\eta_1, \ldots, \eta_q$ sont les valeurs distinctes des carrés des valeurs propres de B.
   (c) Montrer que P est un polynôme annulateur de B^2.
   (d) Calculer B^2 et en déduire que P est annulateur de A.
   (e) En conclure que A est diagonalisable.