Corrigé (succinct) du partiel du 26 octobre 2026

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul et M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 = 7M^3 - 12M^2$. Montrer que

$$\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{tr}(M) \leq 4n.$$

Le polynôme $X^4 - 7X^3 + 12X^2 = X^2(X-3)(X-4)$ est annulateur de M et le spectre de cette matrice est donc inclus dans l'ensemble $\{0,3,4\}$ des racines du polynôme, qui ne contient que des entiers naturels. La matrice étant à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$, on sait qu'elle est trigonalisable et que sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres, répétées avec leurs ordres de multiplicité algébrique respectifs. Les valeurs propres étant nécessairement des entiers naturels d'après la précédente observation, on en déduit que la trace de M est un entier naturel. Enfin, la majoration découle du fait que la plus grande valeur propre possible est 4 et que la somme des ordres de multiplicité algébrique des valeurs propres est égale à n.

Exercice 2. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 et M^3.

On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 4M.$$

2. En déduire un polynôme annulateur de M.

Il découle des calculs précédents que le polynôme $X^3 - 4X = X(X+2)(X-2)$ est annulateur de M.

3. Déterminer le polynôme minimal de M.

Le polynôme minimal de M divise le polynôme annulateur $X(X+2)(X-2)$. Puisque la matrice M n'est pas nulle ou égale à $\pm 2I_4$, il est clair que ce polynôme n'est pas du premier degré. Par ailleurs, on peut vérifier que $M^2 \neq 4I_4$, $M^2 + 2M \neq 0_4$ et $M^2 - 2M \neq 0_4$, ce qui élimine tous les diviseurs quadratiques du polynôme annulateur. Le polynôme minimal de M est donc $X(X+2)(X-2)$.

4. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, donner une matrice diagonale qui lui est semblable.

Son polynôme minimal étant scindé à racines simples, la matrice M est diagonalisable. Les deux colonnes non nulles distinctes de M étant linéairement indépendantes, on a $\mathrm{rang}(M) = 2$. Le théorème du rang donne alors $\dim(\ker(M)) = 2$ et la valeur propre 0 a donc un ordre de multiplicité géométrique égal à 2, qui est aussi son ordre de multiplicité algébrique puisque M est diagonalisable. Une matrice diagonale semblable à M est donc

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (diagonalisabilité d'une matrice compagnon). Soit n un entier naturel non nul, M la matrice d'ordre n définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ étant des nombres complexes, et P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

1. Donner le polynôme caractéristique de M.

La matrice M est la matrice compagnon du polynôme P, ce dernier est donc son polynôme caractéristique.
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice M et $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

2. Montrer que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ e_i = u^{i-1}(e_1).$$

Compte tenu de la structure de la matrice M, on a $u(e_1) = e_2, u(e_2) = e_3, \dots, u(e_{n-1}) = e_n$. Ceci permet d'établir, au moyen d'un raisonnement par récurrence que $u^{i-1}(e_1) = e_i$ pour i appartenant à $\{2, \dots, n\}$, ce que l'on étend à $i = 1$ en utilisant que $u^0 = id_{\mathbb{C}^n}$.

3. En déduire qu'un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ non nul est annulateur de u si et seulement si $Q(u)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Indication : on pourra calculer $Q(u)(e_i)$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$.

La condition est nécessaire car, si le polynôme Q est annulateur de u, $Q(u)(x)$ est le vecteur nul pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$, donc en particulier pour e_1. Réciproquement, si $Q(u)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$, on a $u^{i-1}(Q(u)(e_1)) = 0_{\mathbb{C}^n}$ pour tout entier i dans $\{1, \dots, n\}$, et, comme $Q(u)$ commute avec toute puissance de u, il vient $Q(u)(u^{i-1}(e_1)) = Q(u)(e_i) = 0_{\mathbb{C}^n}$ en utilisant le résultat de la question précédente. L'endomorphisme $Q(u)$ est donc nul.

4. Montrer que P est annulateur de u.

En utilisant la caractérisation précédente, on trouve

$$P(u)(e_1) = u^n(e_1) + a_{n-1}u^{n-1}(e_1) + \cdots + a_1 u(e_1) + a_0 e_1 = u(e_n) + a_{n-1}e_n + \cdots + a_1 e_2 + a_0 e_1,$$

qui est nul puisque $u(e_n) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$.
Une preuve alternative consiste à utiliser que $\chi_M = P$ et à faire appel au théorème de Cayley–Hamilton.

5. Montrer qu'aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à n n'annule u.

Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul de degré d strictement inférieur à n. On a

$$Q(u)(e_1) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k u^k(e_1) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k e_{k+1}.$$

La liberté de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ implique alors que ce vecteur est nul si et seulement si les coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ sont tous nuls, ce qui contredit le fait que Q est non nul. Il n'existe donc pas de polynôme annulateur de u non nul de degré strictement inférieur à n.

6. En déduire le polynôme minimal de la matrice M et donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette matrice soit diagonalisable.

Le polynôme P est annulateur et unitaire, et il n'existe pas de polynôme annulateur de u de degré moindre. C'est donc le polynôme minimal de u, et aussi de M. Pour une matrice compagnon, le polynôme minimal coïncide avec le polynôme caractéristique. On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

Exercice 4. Déterminer une réduction de Jordan de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note M la matrice de l'énoncé. On a $\chi_M(X) = (X-2)^3$. Le polynôme caractéristique de M étant scindé, la matrice peut être réduite sous forme normale de Jordan. On détermine ensuite le nombre et les tailles des blocs de Jordan associés à l'unique valeur propre 2. Il vient

$$M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (M-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (M-2I_3)^3 = 0_3,$$

d'où $\operatorname{rang}(M-2I_3) = 2$, $\operatorname{rang}\left((M-2I_3)^2\right) = 1$ et $\operatorname{rang}\left((M-2I_3)^3\right) = 0$.
On calcule l'entier $r_3 = \operatorname{rang}\left((M-2I_3)^2\right) - \operatorname{rang}\left((M-2I_3)^3\right) = 1-0 = 1$, qui indique que la matrice réduite ne contient qu'un seul bloc de Jordan de taille 3. La forme normale de Jordan de M est donc

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut choisir la chaîne de vecteurs propres généralisés

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui vérifie $(M-2I_3)V_1 = 0_{3,1}$, $(M-2I_3)V_2 = V_1$ et $(M-2I_3)V_3 = V_2$. Ainsi, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$M = PJP^{-1}.$$

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul, A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{smallmatrix}\right)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

1. Calculer le produit de matrices définies par blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ XI_n & I_n \end{pmatrix} (XI_{2n} - B) \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

où X est un nombre complexe.

On a

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ XI_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n & -I_n \\ -A & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n & -I_n \\ X^2I_n - A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & XI_n \\ 0_n & X^2I_n - A \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que

$$\chi_B(X) = \chi_A\left(X^2\right).$$

En passant au déterminant dans l'égalité de la question précédente, il vient

$$\begin{vmatrix} I_n & 0_n \\ XI_n & I_n \end{vmatrix} \det(XI_{2n} - B) \begin{vmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -I_n & XI_n \\ 0_n & X^2I_n - A \end{vmatrix},$$

soit encore, en utilisant que certaines matrices sont triangulaires par blocs,

$$\chi_B(X) \begin{vmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{vmatrix} = (\det(I_n))^2 \det(XI_{2n} - B) \begin{vmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{vmatrix} = \det(-I_n) \det\left(X^2I_n - A\right) = (-1)^n \chi_A\left(X^2\right).$$

Le déterminant $\left|\begin{smallmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{smallmatrix}\right|$ est égal à la signature d'une permutation qui est le produit des n transpositions disjointes $(1\ n+1), (2\ n+2), \ldots, (n\ 2n)$, et vaut $(-1)^n$, d'où le résultat.

3. Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.
Indication : on pourra distinguer le cas d'une valeur propre de A nulle de celui d'une valeur propre non nulle.

Compte tenu du résultat de la question précédente, les valeurs propres de B sont les racines carrées (complexes) des valeurs propres de A.
Soit η une valeur propre de A. Si $\eta \neq 0$, il lui correspond deux valeurs propres distinctes de B, λ et $-\lambda$, où λ est un nombre complexe tel que $\lambda^2 = \eta$. Soit X un vecteur propre de B associé à λ, que l'on décompose par blocs en $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ de manière compatible avec l'écriture par blocs de B. On a

$$BX = \lambda X \iff X_2 = \lambda X_1 \text{ et } AX_1 = \lambda X_2,$$

d'où $AX_1 = \lambda^2 X_1 = \eta X_1$. Le vecteur X est donc donné par $\begin{pmatrix} V \\ \lambda V \end{pmatrix}$, où V est un vecteur propre de A associé à η. De la même manière, les vecteurs propres de B associés à $-\lambda$ sont de la forme $\begin{pmatrix} V \\ -\lambda V \end{pmatrix}$, où V est un vecteur propre de A associé à η. Si $\eta = 0$, alors 0 est la seule valeur propre de B associée à η et les vecteurs propres associés sont de la forme $\begin{pmatrix} V \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$, où V est un vecteur propre de A associé à 0.

4. Dans toute cette question, on suppose que A est diagonalisable et inversible.

   (a) Montrer qu'il existe une base de $M_{2n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de B.

   Si la matrice A est diagonalisable et inversible, alors il existe une base $\{V_1, \dots, V_n\}$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A, chacun de ces vecteurs propres étant associé à une des valeurs propres non nulles $\eta_1, \dots, \eta_n$. Pour tout entier j de $\{1, \dots, n\}$, soit un nombre complexe λ_j tel que ${\lambda_j}^2 = \eta_j$. On pose

$$X_j^+ = \begin{pmatrix} V_j \\ \lambda_j V_j \end{pmatrix} \text{ et } X_j^- = \begin{pmatrix} V_j \\ -\lambda_j V_j \end{pmatrix}.$$

   Pour montrer que les $2n$ vecteurs propres de B ainsi construits sont libre, on suppose qu'il existe des nombres complexes $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_j X_j^+ + b_j X_j^- \right) = 0_{M_{2n,1}(\mathbb{C})}.$$

   En réalisant une identification par blocs, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) V_j = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ et } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (a_j - b_j) V_j = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

   La famille $\{V_1, \dots, V_n\}$ étant une base, il vient alors

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ a_j + b_j = 0 \text{ et } \lambda_j (a_j - b_j) = 0.$$

   Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant non nuls, on obtient $a_j = b_j = 0$ pour tout j. La famille considérée est donc libre et, comme elle contient $2n$ vecteurs de $M_{2n,1}(\mathbb{C})$, elle constitue une base.

   (b) En déduire que B est diagonalisable.

   Par définition, la matrice B est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $M_{2n,1}(\mathbb{C})$ formée de ses vecteurs propres, ce qui a été établi dans la question précédente.

5. Dans toute cette question, on suppose que B est diagonalisable.

   (a) Montrer que si 0 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité algébrique m_0, alors 0 est une valeur propre de B d'ordre de multiplicité algébrique $2m_0$ et que $\dim(E_0(A)) = \dim(E_0(B))$, où $E_0(A)$ et $E_0(B)$ sont respectivement les sous-espaces propres de A et de B associés à 0.

   Puisque $\chi_B(X) = \chi_A\left(X^2\right)$ et $0^2 = 0$, l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de χ_B est double de son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A.
   On a précédemment établi que les vecteurs propres de B associés à 0 étaient de la forme $\begin{pmatrix} V \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$, où V est un vecteur propre de A associé à 0. Il en résulte que la dimension de $E_0(B)$ est égale à la dimension de $E_0(A)$.

   (b) En conclure que la matrice A est inversible et que les valeurs propres de B sont non nulles.

On raisonne par l'absurde en supposant que 0 soit valeur propre de A, d'ordre de multiplicité algébrique égal à m_0. On a d'une part que $\dim(E_0(A)) \leq m_0$ et d'autre part que $\dim(E_0(B)) = 2m_0$ par la précédente question, puisque B est diagonalisable. On doit donc avoir $2m_0 \leq m_0$, ce qui implique que $m_0 \leq 0$. Ceci est impossible puisqu'on a supposé que $m_0 \geq 1$.
Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de A, d'où A est inversible, et les valeurs propres de B sont donc non nulles, puisque ce sont les racines carrées de valeurs propres de A.
On considère le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{q}(X - \eta_i)$, où $\eta_1, \ldots, \eta_q$ sont les valeurs distinctes des carrés des valeurs propres de B.

(c) Montrer que P est un polynôme annulateur de B^2.

La matrice B étant diagonalisable, il existe une base de $M_{2n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de B. Soit X un des vecteurs de cette base, associé à une valeur propre λ. On a $BX = \lambda X$, d'où $B^2X = \lambda^2 X$. Il en résulte que $P(B^2)X = P(\lambda^2)X = 0_{M_{2n,1}(\mathbb{C})}$, car λ^2 est égal à l'une des racines de P. Le produit $P(B^2)X$ étant nul pour tout vecteur X d'une base de $M_{2n,1}(\mathbb{C})$, on en déduit que la matrice $P(B^2)$ est nulle et que le polynôme P est annulateur de B^2.

(d) Calculer B^2 et en déduire que P est annulateur de A.

On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix},$$

d'où

$$P(B^2) = \begin{pmatrix} P(A) & 0_n \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = 0_{2n}.$$

La matrice $P(A)$ est donc nulle et le polynôme P est annulateur de A.

(e) En conclure que A est diagonalisable.

Par définition, les nombres $\eta_1, \ldots, \eta_q$ sont deux à deux distincts. Le polynôme P est donc scindé à racines simples. Il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, ce qui équivaut à ce que A soit diagonalisable.