Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Algèbre linéaire 3
Année 2025/2026

Feuilles de travaux dirigés

Version du 21 juillet 2025.
Le symbole ⋄ indique un exercice difficile.
Dans ces feuilles, on désignera par $\mathbb{K}$ un corps qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

0 Révisions

Les exercices de cette section portent sur des notions et résultats de base introduits durant la première année de licence. Ils ne seront pas traités en séance, sauf ceux relatifs à la notion de *base duale*, qui intervient dans l'étude des formes quadratiques. Il est néanmoins essentiel de parfaitement maîtriser l'ensemble des concepts sous-jacents.

Exercice 1. (sous-espaces vectoriels) Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants, indiquer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et, le cas échéant, en donner la dimension et une base, préciser s'il s'agit de l'espace entier ou en donner un supplémentaire.

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.
2. $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\}$.
3. $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 1\}$.
4. $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = {x_1}^2\}$.
5. $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 0\}$.
6. $E_6 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.
7. $E_7 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
8. $E_8 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

Exercice 2. (sous-espaces vectoriels) Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(2)\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 2\}$.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables.
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées.
5. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont majorées.
6. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont paires.
7. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont paires ou impaires.
8. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x)+a(x)y(x) = 0$, où a est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue.

Exercice 3. (sous-espaces vectoriels engendrés) Dans chacun des cas suivants, donner la dimension et un système d'équations du sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs.

1. $\{(9,2),(8,-3),(\frac{3}{2},\frac{7}{3})\}$.
2. $\{(6,0,-5),(-1,2,1),(0,1,-1)\}$.
3. $\{(5,-4,7,8),(-\frac{5}{2},3,1,-2)\}$.
4. $\{(-1,2,1,4),(0,3,-1,2),(-2,1,3,6)\}$.

Exercice 4. (intersection de sous-espaces vectoriels) Déterminer l'intersection des plans P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$ dans chacun des cas suivants.

1. P_1 a pour équation cartésienne $x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0$ et P_2 a pour base $\{(1,0,2),(0,1,3)\}$.
2. P_1 et P_2 ont pour équation cartésienne $x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0$ et $a\,x_1 + b\,x_2 + x_3 = 0$ respectivement.
3. P_1 et P_2 ont pour base $\{(1,1,1),(1,2,0)\}$ et $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ respectivement.

Exercice 5. (intersection et union de sous-espaces vectoriels) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E_1,\dots,E_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $\cap_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $\cup_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'un des sous-espaces contient les autres.

Exercice 6. (sous-espaces supplémentaires) On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que le plan P d'équation cartésienne $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et la droite D de vecteur directeur u, de coordonnées $(a, 1, 1)$ dans la base canonique, soient deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. On suppose à présent que $a = 1$. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$. Déterminer une base $\{e_1, e_2\}$ de P. Pourquoi la famille $\{e_1, e_2, u\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Déterminer les coordonnées dans cette nouvelle base du vecteur ayant pour coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base canonique.

Exercice 7. (sous-espaces supplémentaires) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel des fonctions périodiques de période 1 et G le sous-espace vectoriel des fonctions tendant vers 0 en $+\infty$. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 8. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois. On considère les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$H = \{P \in E \,|\, P(2) = 0\} \text{ et } D = \left\{P \in E \,|\, P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1)\right\}.$$

1. Rappeler quelle est la dimension de E et donner sa base canonique.
2. Donner une équation et trouver une famille génératrice de H. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?
3. Écrire la formule de Taylor pour un polynôme P appartenant à D et en déduire la forme générale des éléments de D. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?

Exercice 9. (base des polynômes de Lagrange) On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois.

1. Déterminer les quatre polynômes L_k, $k = 0, 1, 2, 3$, de E tels que

$$\forall k \in \{0, 1, 2, 3\},\ L_k(k) = 1 \text{ et },\ \forall i \in \{0, 1, 2, 3\} \setminus \{k\},\ L_k(i) = 0.$$

2. Montrer que la famille $\{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ est une base de E et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque de E dans cette base.

Exercice 10. Soient f_1 et f_2 les deux éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définis par

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \text{ et } f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2.$$

1. Montrer que (f_1, f_2) forme une base de $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$.
2. Exprimer les formes linéaires suivantes dans cette base :

$$g(x_1, x_2) = x_1,\ h(x_1, x_2) = 2x_1 - 6x_2.$$

Exercice 11. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour noyau le plan P défini dans l'exercice 6 et telle que $f((1, 1, 1)) = (1, 2, 3)$. Écrire la matrice de f dans la base $\{e_1, e_2, u\}$ déterminée dans l'exercice 6, puis dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux.

1. Montrer que $\{1, X, X^2\}$ et $\{1, X - 1, X^2\}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage de $\{1, X, X^2\}$ vers $\{1, X - 1, X^2\}$.
3. Déterminer la matrice de l'endomorphisme de E défini par $P \mapsto P'$ dans ces deux bases.

Exercice 13. (forme linéaire) Soit f la forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ f(x) = 2\,x_2 - x_3 + x_4.$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de son noyau.

Exercice 14. (forme linéaire) Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1, 1, 1) = 0,\ f(2, 0, 1) = 1 \text{ et } f(1, 2, 3) = 4,$$

et donner une base de son noyau.

Exercice 15. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 16. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f n'est pas bijectif.
2. Montrer que $\{f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ est une base de l'image de f.
3. Calculer $f((1,-2,1,0))$
4. Déduire des questions précédentes la dimension du noyau de f et la forme générale de ses éléments.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \mathrm{rg}(g)$ avec égalité si et seulement si $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leq \mathrm{rg}(f)$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$.

Exercice 18. (caractérisations des homothéties) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On dit qu'un endomorphisme u de E est une homothétie s'il existe un scalaire λ tel que, pour tout vecteur x de E, on a $u(x) = \lambda^x$.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que, pour tout vecteur x de E,la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. En déduire que, si un endomorphisme v de E n'est pas une homothétie, alors il existe deux vecteurs e_1 et e_2 de E qui sont linéairement indépendants et tels que $e_2 = v(e_1)$.
3. Soit u un endomorphisme de E qui commute avec tout endomorphisme v de E. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 19. (produits matriciels possibles) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles entre ces matrices ?

Exercice 20. (calcul d'inverses de matrices) Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21. (rang d'une matrice à paramètre) Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. (trace et produit de matrices) Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrics de $M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{tr}(AA^\top) = 0$. Que dire de la matrice A ?
2. On suppose que, pour tout X de $M_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 23. (changement de bases) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives de ces espaces est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose alors

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e3 + e1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, puis que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de f dans ces nouvelles bases ?

Exercice 24. (base duale) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, de base duale notée $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. On définit des formes linéaires f_1^*, f_2^* et f_3^* sur E par

$$f_1^* = 2\,e_1^* + e_2^* + e_3^*,\ f_2^* = -e_1^* + 2\,e_3^*,\ f_3^* = e_1^* + 3\,e_2^*.$$

Montrer que $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ est une base de E^* et déterminer la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de E dont elle est la base duale.

Exercice 25. (polynômes et base duale) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère la famille $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ d'éléments de E^* définis par

$$\forall i \in \{0, \ldots, 3\},\ \forall P \in E,\ \ell_i(P) = P(i).$$

Montrer que $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est une base de E^* et déterminer la base de E dont elle est la base duale.

Exercice 26. (changement de base et base duale) Soit n un entier naturel non nul et E un espace vectoriel de dimension finie égale à n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E distincte de $\mathscr{B}$. Exprimer la base duale de $\mathscr{B}'$ en fonction de celle de $\mathscr{B}$.

1 Réduction des endomorphismes

1.1 Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme

Exercice 27. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et x un vecteur non nul de E. Montrer que $\text{Vect}(\{x\})$ est stable par u si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda\, x$.

Exercice 28. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme injectif de E et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par u. Montrer que l'endomorphisme induit par u sur F est bijectif.

Exercice 29. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et p une projection de E. Montrer que

$$p \circ u = u \circ p \iff \text{Im}(p) \text{ et } \text{Ker}(p) \text{ sont stables par } u.$$

Exercice 30. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, u un endomorphisme de E et x un vecteur non nul de E.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre alors que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), u^p(x))$ est liée.
2. Observer qu'alors le sous-espace vectoriel $E_u(x) = \text{Vect}\big(\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}\big)$ est stable par u.

Exercice 31. (suites des noyaux et images itérés) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $\text{Ker}(u^p) = \text{Ker}(u^{p+1})$. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à p, on a $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$.
   (c) On suppose dans cette question que E est de dimension finie n non nulle. Pour tout entier naturel k, on pose $d_k = \dim(\text{Ker}(u^k))$.
      i. Montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      ii. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier naturel r inférieur ou égal à n tel que $d_r = d_{r+1}$.
      iii. En déduire que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $\text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k)$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier naturel q tel que $\text{Im}(u^{q+1}) = \text{Im}(u^q)$. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à q, on a $\text{Im}(u^{k+1}) = \text{Im}(u^k)$.
   (c) On suppose dans cette question que E est de dimension finie n non nulle. Pour tout entier naturel k, on pose $d'_k = \dim(\text{Im}(u^k))$.
      i. Montrer que la suite $(d'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      ii. Montrer que $d'_r = d'_{r+1}$, où r est l'entier défini dans la question 1(c)ii.
      iii. En déduire que la suite $(d'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
3. On suppose dans cette question que E est de dimension finie n non nulle. On pose

$$N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{Ker}(u^k) \text{ et } I = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \text{Im}(u^k).$$

(a) Montrer que $N = \mathrm{Ker}(u^r)$ et $I = \mathrm{Im}(u^r)$, où r est l'entier défini dans la question 1(c)ii.
(b) Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u, tels que les restrictions de u à N et I sont respectivement nilpotente et bijective.
(c) Réciproquement, on suppose $E = F \oplus G$ avec F et G des sous-espaces vectoriels stables par u tels que les restrictions de u à F et G sont respectivement nilpotente et bijective. Établir que $F = N$ et $G = I$.

1.2 Éléments propres

Exercice 32. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices à coefficients réels suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Que dire si l'on considère que ces matrices sont à coefficients complexes ? Dans ce dernier cas, vérifier que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

Exercice 33. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$, λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ. Montrer que $\lambda \neq 0$, puis que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} ayant X pour vecteur propre associé.

Exercice 34. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que $A+I_n$ ou $A-I_n$ est inversible.

Exercice 35. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et $A^\top$ ont-elles les mêmes vecteurs propres ?

Exercice 36. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Exercice 37. Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables et u l'endomorphisme de E qui à toute fonction f de E associe sa dérivée f'. Déterminer le spectre de u et les sous-espaces propres associés.

Exercice 38. Déterminer le spectre et les vecteurs propres de l'endomorphisme u lorsque :
— u est une projection de l'espace sur un plan parallèlement à une droite,
— u est la rotation vectorielle du plan d'angle de mesure π,
— u est la rotation vectorielle du plan d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 39. (matrice stochastique) Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1. Soit M une telle matrice.
1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de M, alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Montrer que 1 est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.
3. Montrer que si tous les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs et que λ est une valeur propre complexe de M, alors $|\lambda| = 1$ implique que $\lambda = 1$.

Exercice 40. ⋄ Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{K}_{2n}[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = X(X-1)P' - 2nXP$. Chercher le spectre et les vecteurs propres de u.

Exercice 41. Soit $E = \mathbb{C}^\mathbb{N}$ l'espace des suites à coefficients complexes et u l'endomorphisme de E qui à une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par
$$w_0 = v_0 \text{ et, } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ w_k = \frac{v_k + v_{k-1}}{2}.$$
Déterminer le spectre et les vecteurs propres de u.

Exercice 42. Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
1. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $A^kB - BA^k = kA^k$.
2. On considère l'application u_B de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $u_B(M) = MB - BM$. Vérifier que u_B est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier qu'un entier naturel k est une valeur propre de u_B si $A^k \neq 0$.
4. En déduire l'existence d'un entier naturel m tel que $A^m = 0$.

Exercice 43. Soit m et n deux entiers naturels non nuls, u une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et v une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
1. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

2. Lorsque $m=n$, montrer que $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 44. Soit θ un nombre réel. Déterminer le spectre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 45. $\diamond$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1,\dots,a_n$ des réels. Chercher le spectre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

en distinguant les cas $(a_1,\dots,a_{n-1})\neq(0,\dots,0)$ et $(a_1,\dots,a_{n-1})=(0,\dots,0)$. En déduire le spectre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 46. $\diamond$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F=u(f)$ définie par

$$F(0)=f(0) \text{ et}, \forall x\in]0,+\infty[,\ F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $u(f)=\lambda f$.

Exercice 47. Pour tout réel α, on pose

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_\alpha(x)=e^{\alpha x}.$$

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables.

1.3 Polynôme caractéristique

Exercice 48. Soit n un entier naturel non nul, A et B des matrices d'ordre n et λ un scalaire.

1. On considère les matrices par blocs

$$U=\begin{pmatrix} \lambda I_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix} \text{ et } V=\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

   Calculer UV et VU.
2. En déduire que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Exercice 49. Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$. Vérifier que

$$\chi_A(X)=X^3-\mathrm{tr}(A)X^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)X-\det(A).$$

Exercice 50. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice d'ordre n inversible. Établir que

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \chi_{A^{-1}}(x)=\frac{x^n}{\chi_A(0)}\chi_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 51. Trouver le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Exercice 52. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A(X) = X^n - 1$. Déterminer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 53. Soit n un entier naturel strictement plus grand que 2. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

de $M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 54. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Établir que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u.

Exercice 55. Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
2. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset.$$

Exercice 56. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la matrice A^k est triangulaire supérieure. Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas que A est inversible ?

1.4 Diagonalisation

Exercice 57. Diagonaliser les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 58. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 59. (matrices élémentaires) Parmi les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{R})$, lesquelles sont diagonalisables ?

Exercice 60. Soit a, b et c trois nombres réels. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 61. (diagonalisation d'une matrice de rang 1**)** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 62. (diagonalisation d'une matrice circulante) Soit a, b et c des nombres complexes. On pose

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et $J = M(0,1,0)$.

1. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. Montrer que J est diagonalisable et donner son spectre.
3. En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et donner son spectre.

Exercice 63. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que f est diagonalisable et donner son spectre.

Exercice 64. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 65. (transposition) Soit n un entier naturel non nul, $E = M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(M) = M^\top$. Déterminer le spectre de f et montrer que cet endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 66. Les matrices de l'exercice 32 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

Exercice 67. ⋄ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Diagonaliser la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 68. À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b et c la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 69. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et u un endomorphisme de E tel que $u^4 = u^2$ et dont -1 et 1 sont valeurs propres. Montrer que u est diagonalisable.

1.5 Trigonalisation

Exercice 70. Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable et proposer une matrice de passage réalisant cette trigonalisation.

Exercice 71. (trigonalisation et puissances de matrice) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est trigonalisable.
2. Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension égale à 1. Montrer que $e'_1 = (1,1,0)$ est un vecteur non nul de ce sous-espace.
3. Montrer que $e'_2 = (0,0,1)$ est tel que $(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e'_2) = e'_1$.
4. Chercher un vecteur propre e'_3 associé à la valeur propre 2. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de u dans cette base.
5. Calculer $u^k(e'_2)$ pour tout entier naturel k. En déduire T^k.
6. Calculer A^k pour tout entier naturel k.

Exercice 72. Trigonaliser les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 73. Soit m et n deux entiers naturels non nuls, A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, B une matrice de $M_m(\mathbb{K})$ et C une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$. On considère la matrice triangulaire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Si $A = P_1 T_1 {P_1}^{-1}$ et $B = P_2 T_2 {P_2}^{-1}$, avec T_1 et T_2 des matrices triangulaires supérieures, trouver une matrice inversible P de $M_{n+m}(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = PTP^{-1}$.
2. Si $A = \lambda I_n$ et que le scalaire λ n'appartient pas à $\mathrm{Sp}(B)$, trouver une matrice inversible P telle que $M = P \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} P^{-1}$.

1.6 Polynômes annulateurs

Exercice 74. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire une relation simple liant A^2, A et I_4.
2. En déduire que A est diagonalisable et donner son spectre.
3. Diagonaliser A.

Exercice 75. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ et α un réel non nul. On suppose que $A(A - \alpha I_n) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 76. Soit n un entier naturel non nul. On suppose que le polynôme $P(X) = X(X+2)$ est un polynôme annulateur d'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que -2 est valeur propre de A et que A est diagonalisable.

Exercice 77. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un polynôme P annulateur de u tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$ et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 78. Soit p et q deux entiers naturels non nuls et M la matrice triangulaire par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A appartient à $M_p(\mathbb{K})$ et B appartient à $M_q(\mathbb{K})$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A et que Q est un polynôme annulateur de B. Déterminer un polynôme annulateur de M.

Exercice 79. $\diamond$ Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.
2. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Montrer que n est pair.
3. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 80. $\diamond$ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de u autre que le polynôme nul ?

Exercice 81. Trouver le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle en utilisant la notion de polynôme minimal.

Exercice 82. Soit A une matrice diagonale. Déterminer le polynôme minimal de A.

Exercice 83. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E dont polynôme minimal est $\mu_u(X) = (X-2)^2(X-1)$. Déterminer le polynôme minimal de $u + id_E$.

Exercice 84. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de A.
2. En déduire A^{-1} et A^3.

Exercice 85. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe deux sous-espaces F et G, supplémentaires et stables par u. Montrer que $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_{u_{|F}}, \mu_{u_{|G}})$.

Exercice 86. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice d'ordre n. On définit la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^k pour tout entier naturel k.
2. Soit P un polynôme. Montrer que P annule B si et seulement si P et P' annulent A.
3. En déduire le polynôme minimal μ_B de B.
4. Le polynôme μ_B peut-il être scindé à racines simples ?

Exercice 87. Soit n un entier naturel non nul et J la matrice d'ordre n ne comportant que des 1.

1. Déterminer le polynôme minimal de J.
2. Calculer J^k pour tout entier naturel k.

Exercice 88. Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes vérifiant : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p = 0$.
On souhaite prouver que tous ces nombres sont nuls. Pour cela, on note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, \dots, a_n$.

1. Déterminer la trace de D^p pour tout entier naturel non nul p.
2. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, prouver que l'un des nombres $a_1, \dots, a_n$ est nul.
3. Conclure.

Exercice 89. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $P_1, \dots P_k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, deux à deux premiers entre eux, tels que $\prod_{i=1}^{k} P_i$ annule u. Pour tout entier j appartenant à $\{1, \dots, k\}$, on définit le polynôme $Q_j = \prod_{i \neq j} P_i$ et on introduit les polynômes $R_1, \dots, R_k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} R_i Q_i = 1$. Enfin, on note, pour tout entier j appartenant à $\{1, \dots, k\}$, p_j la projection sur $\mathrm{Ker}(P_j(u))$ parallèlement à $\oplus_{i \neq j} \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

1. Montrer que, pour tout entier j appartenant à $\{1, \dots, k\}$, $p_j = R_j(u) \circ Q_j(u)$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que

$$F = \bigoplus_{i=1}^{k} (F \cap \mathrm{Ker}(P_i(u))) .$$

Exercice 90. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q premiers entre eux tels que PQ annule u.

1. Montrer que, si E est de dimension finie, alors $E = \mathrm{Ker}(Q(u)) \oplus \mathrm{Im}(Q(u))$.
2. Montrer que l'égalité est vraie si E est de dimension infinie (on pourra utiliser la relation de Bézout).

1.7 Réduction de Jordan

Exercice 91. Calculer une réduction de Jordan de chacune des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.8 Décomposition de Jordan–Chevalley

Exercice 92. Calculer la décomposition de Jordan–Chevalley de chacune des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.9 Applications de la réduction

Exercice 93. (matrices semblables ?) Les matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&0&4\\1&0&-8\\0&1&5\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 94. (puissance d'une matrice diagonalisable) Diagonaliser la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&2\\-1&0&3\end{pmatrix}$$

et en déduire la matrice A^k pour tout entier naturel k.

Exercice 95. (puissance d'une matrice par la décomposition de Jordan–Chevalley) Déterminer la matrice A^k pour tout entier naturel k pour

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&3&-4\\3&1&-2\end{pmatrix}$$

en utilisant la décomposition de Jordan–Chevalley calculée dans l'exercice 92.

Exercice 96. (suites récurrentes) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de leur premiers termes respectifs u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}u_{n+1}=-4u_n-6v_n\\ v_{n+1}=3u_n+5v_n\\ w_{n+1}=3u_n+6v_n+5w_n\end{cases}.$$

Déterminer les termes u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 97. (commutant d'une matrice) Diagonaliser la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}.$$

et en déduire toutes les matrices qui commutent avec elle.

Exercice 98. Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E diagonalisable et à valeurs propres positives. Montrer qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $u=v^2$.

Exercice 99. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non nulle et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
2. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?

Exercice 100. Soit A une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Établir que, pour tout entier naturel k,

$$\mathrm{Sp}(A^k)=\left\{\lambda^k\,|\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\right\}.$$

Exercice 101. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique s'écrit

$$\chi_A(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i).$$

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, déterminer le polynôme caractéristique de $P(A)$.

Exercice 102. Soit n un entier naturel non nul, A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)=B$.

2 Formes bilinéaires

Exercice 103. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels d'ordre 2. On considère l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (A,B) \in E \times E,\ b(A,B) = \operatorname{tr}(A^\top B).$$

1. Vérifier que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Montrer que pour tout A de E, $b(A,A) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $A = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.
3. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique de E.

Exercice 104. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^3,\ b_1(x,y) = b_2(y,x) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3.$$

1. Montrer que b_1 est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ et b_2 une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices respectives B_1 et B_2 de b_1 et b_2 relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. Quelle relation a-t-on entre ces matrices ?
2. Écrire b_1 et b_2 dans les bases canoniques de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.
3. Déterminer les matrices de b_1 et b_2 en considérant la base $\{(1,0),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base $\{(1,0,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 105. Donner l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices suivantes relativement à la base canonique.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 106. On définit l'application b de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$b(A,B) = \det(A+B) - \det(A-B).$$

Montrer que b est une forme bilinéaire et déterminer sa matrice relativement à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 107. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et E^* son dual, $\mathscr{B}$ une base quelconque de E et $\mathscr{B}^*$ la base duale associée à $\mathscr{B}$. Montrer que la matrice de la forme bilinéaire canonique de $E \times E^*$ dans $\mathbb{K}$, définie par

$$\forall x \in E,\ \forall f \in E^*,\ \langle x, f\rangle_{E,E^*} = f(x),$$

relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$ est la matrice identité.

Exercice 108. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ de E.
3. Quel est le rang de b ?
4. La forme b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Déterminer sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.
5. A-t-on $b(P,P) \geq 0$ pour tout polynôme P de E ? À quelle condition sur P a-t-on $b(P,P) = 0$?

Répondre aux mêmes questions avec $b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(1-t)\,\mathrm{d}t$ et $b_k(P,Q) = \sum_{i=1}^k P(i)Q(i)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 109. (forme bilinéaire réflexive) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et b une forme bilinéaire sur $E \times E$ telle que

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ b(x,y) = 0 \Leftrightarrow b(y,x) = 0.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la forme b est symétrique ou antisymétrique.

1. Montrer tout d'abord que
$$\forall (x,y) \in E \times E,\ b(x,x)(b(x,y) - b(y,x)) = 0.$$
2. On suppose à présent qu'il existe un vecteur z de E tel que $b(z,z) \neq 0$.

(a) En déduire que
$$\forall y \in E,\ b(z,y) = b(y,z).$$
(b) Si x est un vecteur de E tel $b(x,z) = 0$, calculer $b(x+z, x+z)$ et montrer que
$$\forall y \in E,\ b(x,y) = b(y,x).$$
(c) Sinon, calculer $b(x+tz, x+tz)$, où l'on a posé $t = -\frac{b(x,z)}{b(z,z)}$, et montrer que
$$\forall y \in E,\ b(x,y) = b(y,x).$$

3. On suppose enfin que
$$\forall x \in E, b(x,x) = 0.$$
Montrer que la forme b est antisymétrique.
4. Conclure.

Exercice 110. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, supposé de dimension finie strictement plus grande que 1. On considère l'application f de $\mathscr{L}(E,E;\mathbb{R})$ dans $\mathscr{L}(E,E;\mathbb{R})$ telle que
$$\forall b \in \mathscr{L}(E,E;\mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in E^2,\ f(b)(x,y) = b(y,x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E,E;\mathbb{R})$.
2. Déterminer le spectre de f, ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 111. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ de la forme
$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \forall y \in \mathbb{R}^3,\ b(x,y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_3 y_3 + \lambda_4 x_1 y_2 + \lambda_5 x_2 y_1,$$
où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F} \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ et $\mathscr{F}_2 = \mathscr{F} \cap \mathscr{A}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, où $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$) désigne l'ensemble des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) sur $\mathbb{R}^3$. Quelles sont leurs dimensions respectives ?
3. Montrer que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 112. Soit n un entier naturel non nul et E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, muni de la base $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. On note $\mathscr{B}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale associée à $\mathscr{B}$. Pour tout couple (i,j) de $\{1, \ldots, n\}^2$, on pose
$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \gamma_{ij}(x,y) = e_i^*(x) e_j^*(y).$$

1. Montrer que γ_{ij} est une forme bilinéaire sur $E \times E$.
2. Déterminer la matrice de γ_{ij} relativement à la base $\mathscr{B}$.
3. Montrer que la famille $(\gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ forme une base de $\mathscr{L}(E,E;\mathbb{K})$.

Exercice 113. (une forme sesquilinéaire) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E et b une forme sesquilinéaire à gauche sur E dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $b(x,y)$, $b(x,x)$ et $b(y,y)$ dans les deux cas suivants :
   (a) $x = e_1 + \mathrm{i}\, e_2$ et $y = e_1 - \mathrm{i}\, e_2$,
   (b) $x = e_1 + 2\, e_2$ et $y = \mathrm{i}\, e_2$.
2. En déduire qu'il existe une base de E relativement à laquelle la forme b a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $\overline{P}^\top M P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

3 Formes quadratiques

Exercice 114. Déterminer lesquelles des applications suivantes définissent une forme quadratique et, le cas échéant, donner leur forme polaire.

1. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = P(0)P(1)P(2)$. 2. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = 2P(1)P'(1)$. 3. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = |P(0)P(1)|$.

Exercice 115. Soit q l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ q(A) = \det(A).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et écrire la matrice qui lui est associée relativement à la base canonique.
2. Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.
3. Soit F l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer son orthogonal par rapport à q.

Exercice 116. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et b une forme bilinéaire sur E. On note q la forme quadratique associée à b. Établir que

1. $\forall (x, y, z) \in E^3$, $q(x + y) + q(y + z) + q(x + z) - q(x + y + z) = q(x) + q(y) + q(z)$.
2. $\forall (x, y) \in E^2$, $q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y)$ et $q(x + y) - q(x - y) = 2(b(x, y) + b(y, x))$.

Exercice 117. (cône isotrope) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. On rappelle qu'un vecteur x de E est dit isotrope pour q si $q(x) = 0$ et qu'un couple de vecteurs (x, y) de E sont orthogonaux pour q si $b(x, y) = 0$, où b est la forme polaire de q.

1. Soit x un vecteur de E. Montrer que
$$x \text{ est isotrope pour } q \implies \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x \text{ est isotrope pour } q.$$
2. Soit x et y deux vecteurs de E qu'on suppose isotropes pour q. Montrer que
$$x + y \text{ est isotrope pour } q \implies x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux pour } q.$$

Exercice 118. On considère la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = {x_1}^2 + 4{x_2}^2 - 3x_1x_2.$$

1. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la forme polaire de q.
3. Réduire q sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 119. Effectuer une réduction de Gauss, puis déterminer la signature, le rang et le noyau des formes quadratiques suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = 2{x_1}^2 - 2{x_2}^2 - 6{x_3}^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + (1 + a){x_2}^2 + (1 + a + a^2){x_3}^2 + 2x_1x_2 - 2a\,x_2x_3$ (on discutera suivant la valeur du paramètre réel a).
4. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - a\,{x_3}^2 + 3x_1x_2 - b\,x_1x_3 + x_2x_3$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels a et b).
5. $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $q(x) = {x_1}^2 + (1 + 2\alpha - \beta){x_2}^2 + (1 + \alpha){x_3}^2 + (1 + 2\alpha + \beta){x_4}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2(1 - \alpha)x_2x_3 - 2(1 + \alpha)x_2x_4 + 2(\alpha - 1)x_3x_4$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels α et β).
7. $\forall x \in \mathbb{R}^5$, $q(x) = x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 - x_3x_5 + 2x_4x_5$.

Exercice 120. Soit q la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = 4{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 10{x_3}^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

1. Écrire la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la forme q est définie positive en utilisant le critère de Sylvester.
3. De la même façon, étudier la forme $q(x) = 4{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 9{x_3}^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Exercice 121. Soit λ et μ deux nombres réels. On définit sur $E = M_2(\mathbb{R})$ la forme q suivante

$$\forall A \in E,\ q(A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A^2) + \mu\,\det(A).$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique.
2. Déterminer en fonction de λ et de μ le rang et la signature de q, en séparant les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

Exercice 122. Soit q la forme définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in E,\ q(P) = P(0)P(1).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de E.
3. Donner la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?
4. Déterminer une base (P_1, P_2, P_3) de E pour laquelle $q\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i\right) = {\alpha_1}^2 - {\alpha_2}^2$.

Exercice 123. Soit n un entier naturel non nul. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$b(P,Q) = \int_0^1 t\,P(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } q(P) = b(P,P).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.
3. Calculer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit orthogonale par rapport à q.

Exercice 124. Soit n un entier naturel non nul. On considère la forme q définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ q(P) = \int_{-1}^1 P(t)P(-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire comme la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair.
2. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa signature.

Exercice 125. Soit n un entier naturel non nul, q_1 et q_2 deux applications respectivement définies par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q_1(A) = (\mathrm{tr}(A))^2 \text{ et } q_2(A) = \mathrm{tr}(A^\top A).$$

Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques. Sont-elles positives ? Définies positives ?

Exercice 126. Déterminer la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ suivantes.

1. $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j$.
2. $q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2 x_i x_j$.

Exercice 127. ⋄ Soit n un entier naturel non nul. La matrice d'ordre n $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? Si oui, est-elle définie ?

Exercice 128. Soit une forme quadratique sur un espace vectoriel réel, que l'on suppose définie. Montrer qu'elle garde un signe constant.

Exercice 129. Soit

$$E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a_{11} - a_{22} = 0\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour toutes matrices A et B de E, on pose

$$b(A,B) = \mathrm{tr}(AJB).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de la forme quadratique q associée à b relativement à la base $\mathscr{B}$.
4. Déterminer la signature de q, son rang et son noyau.
5. Déterminer $F^{\perp}$, l'orthogonal par rapport à q de l'ensemble

$$F = \{A \in E \,|\, a_{12} = a_{21} = 0\}.$$

Exercice 130. Soit n un entier naturel non nul et q l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q(A) = \operatorname{tr}\left(A^2\right).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner son noyau.
2. Montrer que la restriction de q au sous-espace des matrices symétriques est définie positive.
3. Donner une base de $M_n(\mathbb{R})$ relativement à laquelle la matrice associée à q est diagonale. Expliciter cette matrice et donner la signature de q.

Exercice 131. (produit de Schur de deux matrices) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On définit le *produit de Schur de A et de B* comme étant la matrice $A \cdot B = (a_{ij}b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Si A est symétrique, positive et de rang 1, montrer en effectuant une réduction de Gauss de la forme quadratique associée à A qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $a_{ij} = \lambda_i \lambda_j$.
2. Si A et B sont symétriques, positives et de rang 1, montrer que la matrice $A \cdot B$ est positive.
3. De manière plus générale, si A et B sont symétriques positives, montrer que la matrice $A \cdot B$ est symétrique positive.
4. Si A est symétrique positive, montrer que la matrice $E = (e^{a_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique positive.

4 Espaces euclidiens

4.1 Produits scalaires

Exercice 132. Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, en la deuxième, bilinéaires, symétriques, positives, non dégénérées et si elles définissent un produit scalaire sur l'espace vectoriel considéré. Dans le dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy–Schwarz associée.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ b(x,y) = 2\,x_1y_1 - 3\,x_2y_2 - x_3y_3$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ b(x,y) = 2\,{x_1}^2 + {y_3}^2 + 3\,x_1y_2 + 5\,x_2y_3$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$.
4. $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, $b(P,Q) = (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\alpha_0 + 3\,\alpha_1)\beta_1 + 3\,\alpha_2\beta_2$, avec $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$ et $Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$.

Exercice 133. Soit α et β deux nombres réels et la forme b définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ b(x,y) = x_1y_1 + \beta\,x_1y_2 + \beta\,x_2y_1 + \alpha\,x_2y_2.$$

Donner, lorsqu'il y en a, les valeurs de α et β pour lesquelles b est

1. linéaire en la première variable,
2. linéaire en la deuxième variable,
3. symétrique,
4. positive,
5. non dégénérée,
6. un produit scalaire.

Exercice 134. (produit scalaire pour des matrices) Soit n un entier strictement positif. On pose

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ \langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B).$$

1. Montrer que la forme ainsi définie est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. En déduire que, pour toutes matrices réelles symétriques A et B, on a

$$\big(\operatorname{tr}(AB)\big)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

Exercice 135. Montrer que chacune des formes suivantes définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E considéré.

1. $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.
2. $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$, où w est une fonction continue telle que $w > 0$ sur $]a,b[$.

Exercice 136. (condition nécessaire et suffisante pour avoir un produit scalaire) Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, a un vecteur unitaire de E et k un réel. On définit l'application b par

$$\forall (x,y) \in E\times E,\ b(x,y) = \langle x,y\rangle + k\,\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que b soit un produit scalaire sur E.

Exercice 137. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère deux vecteurs non nuls u et v d'un espace euclidien E de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$, et la forme quadratique q définie par

$$\forall x \in E,\ q(x) = \langle u,v\rangle\langle x,x\rangle - \langle u,x\rangle\langle v,x\rangle.$$

1. Vérifier que la forme polaire b de q est donnée par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(x,y) = \langle u,v\rangle\langle x,y\rangle - \frac{1}{2}\left(\langle u,x\rangle\langle v,y\rangle + \langle u,y\rangle\langle v,x\rangle\right).$$

2. On suppose dans cette question que les vecteurs u et v sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $v = \lambda u$. Exprimer la forme q en fonction du vecteur u et du réel λ. En déduire le rang et la signature de q en fonction de la valeur de λ.

On suppose dans suite de l'exercice que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires et l'on pose $v = \lambda u + w$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in (\operatorname{Vect}\{u\})^{\perp}$, $w \neq 0_E$.

3. Écrire la forme polaire de q en fonction de u, w et λ.
4. Soit $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ une base orthonormée de E telle que $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et $e_2 = \frac{w}{\|w\|}$. Exprimer la matrice de q relativement à la base $\mathscr{B}$, en fonction de λ, $\|u\|$ et $\|w\|$.
5. Quels sont le rang et la signature de q lorsque $\lambda = 0$? Lorsque $\lambda \neq 0$?

Exercice 138. ⋄ (théorème de Fréchet–Jordan–von Neumann) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'*identité du parallélogramme* [1],

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. Pour cela, on définit la forme b suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a $b(x+z,y) + b(x-z,y) = 2\,b(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a $b(2x,y) = 2\,b(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a $b(r\,x,y) = r\,b(x,y)$.
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $b(u,w) + b(v,w) = b(u+v,w)$.
5. Montrer que b est symétrique et définie positive.
6. Déduire des questions précédentes que b est bilinéaire et conclure.

Exercice 139. ⋄ On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe-t-il un polynôme R tel que $\langle P,R\rangle = P(0)$ pour tout polynôme P ?

Exercice 140. ⋄ (famille obtusangle) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n. On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1,\dots,e_{n+1}$ tels que

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2,\ i \neq j \Rightarrow \left\langle e_i, e_j\right\rangle < 0.$$

1. Montrer, en utilisant la norme de x, que, si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$, alors $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i = 0_E$.
2. Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

1. En géométrie, la règle du parallélogramme dit que la somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales.

Exercice supplémentaire

Exercice 141. (le cas complexe) Dire si les formes à valeurs dans $\mathbb{C}$ suivantes sont semi-linéaires en la première variable, linéaires en la deuxième variable, sesquilinéaires, à symétrie hermitienne, positives, définies et si elles sont des produits scalaires hermitiens. Le dernier cas échéant, écrire l'inégalité de Cauchy–Schwarz associée.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$, $s(x,y) = \overline{x_1}y_1 - 2\mathrm{i}\,\overline{x_2}y_2 + (1+\mathrm{i})x_2\overline{y_1} + \overline{x_3}y_2$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$, $s(x,y) = \overline{x_1}y_1 - 2\,\overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$, $s(A,B) = \mathrm{tr}(A^*B)$, où $A^* = \overline{A}^\top$.
4. $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, $\forall (f,g) \in E \times E$, $s(f,g) = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$.

4.2 Inégalité de Cauchy–Schwarz et applications

Exercice 142. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ des réels.

1. Montrer que l'on a
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n {a_i}^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose maintenant que les réels $a_1, \dots, a_n$ sont strictement positifs et tels que $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2,$$
en étudiant les cas d'égalité.

Exercice 143. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour toute matrice colonne X, on suppose que $\|AX\|_2 \leq \|X\|_2$. Pour toute matrice colonne X, montrer que $\|A^\top X\|_2 \leq \|X\|_2$.

Exercice 144. Soit x, y et z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Exercice 145. Soit f une fonction continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour tout entier naturel k, on pose $I_k = \int_0^1 (f(t))^k\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $\left(\frac{I_{k+1}}{I_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie et croissante.

Exercice 146. (nature d'une série) Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{k^2(\sqrt{2})^k} \sum_{j=0}^k \sqrt{\binom{k}{j}}$.

Exercice 147. (calcul de borne inférieure) Soit $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}^*)$. Déterminer $\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice 148. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) \geq 4.$$
Montrer que
$$36 \leq \left(\int_{-2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-2}^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

4.3 Orthogonalité dans un espace euclidien

Exercice 149. (condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité) Soit E un espace vectoriel euclidien et x et y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 150. Soit E un espace préhilbertien et A et B deux parties de E. Prouver les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.
4. $\mathrm{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp$.
5. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Vect}(A) = (A^\perp)^\perp$.

Exercice 151. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

1. $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$,
2. $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$. Que peut-on dire quand E est de dimension finie ?

4.4 Bases orthonormales

Exercice 152. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, orthonormaliser la base $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,0)\}$ selon le procédé de Gram–Schmidt.

Exercice 153. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ par rapport au produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 154. (une caractérisation des bases orthonormales) Soit E un espace préhilbertien et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une famille de n vecteurs de E de norme unitaire, tels que l'on a

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Montrer que E est de dimension n et que la famille $\{e_1,\dots,e_n\}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 155. (caractérisation des similitudes) Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme de E et λ un réel strictement positif. On dit que u est une *similitude* de rapport λ si

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \lambda\,\|x\|.$$

1. Question préliminaire : soit x et y des vecteurs de E tels que $x+y \perp x-y$. Montrer que $\|x\| = \|y\|$.
2. Montrer que u est une similitude de rapport λ si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \lambda^2\,\langle x,y\rangle.$$

3. On souhaite prouver que u est une similitude si et seulement u est non nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple (x,y) de E^2, si $x \perp y$, alors $u(x) \perp u(y)$.
   (a) Prouver le sens direct.

   On va à présent démontrer le sens réciproque.

   (b) Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base orthonormale de E. Montrer que, pour tout couple (i,j) de $\{1,\dots,n\}$, $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.
   (c) Conclure.

Exercice 156. (généralités sur les polynômes orthogonaux) Soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t,$$

dont on admet qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient de plus haut degré égal à 1.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'existence de a_n et b_n tels que

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}.$$

Exercice 157. $\diamond$ **(inégalité de Hadamard)** Soit n un entier naturel non nul, E un espace euclidien de dimension n, et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que

$$\forall (e_1,\dots,e_n) \in E^n,\ |\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)| \leq \|e_1\|\dots\|e_n\|,$$

en précisant les cas d'égalité.

Exercices supplémentaires

Exercice 158. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, appliquer le procédé de Gram–Schmidt à la famille de vecteurs $\{(1,1,0),(0,\sqrt{2}/2,1),(\sqrt{2}/2,0,1)\}$.

Exercice 159. On munit $\mathbb{R}^4$ de la structure euclidienne canonique et on considère les vecteurs $e_1 = (0,0,0,1)$, $e_2 = (1,0,1,0)$, $e_3 = (1,-3,0,2)$ et $e_4 = (3,-3,-2,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser $\mathscr{B}$ selon le procédé de Gram–Schmidt.

Exercice 160. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $(1,2,-1,1)$ et $(0,3,1,-1)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 161. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
2. On suppose de plus que
$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0.$$
Montrer que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle\,.$$
Que peut-on dire de u ?

4.5 Projections orthogonales

Exercice 162. Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 163. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique. Soit D la droite de vecteur directeur $(1,2,0)$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur D.

Exercice 164. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace vectoriel F défini par
$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

1. Quelles sont les dimensions de F et $F^\perp$? Donner un système d'équations cartésiennes de $F^\perp$.
2. Déterminer les matrices dans la base canonique de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F.
3. Déterminer la distance d'un élément x quelconque de $\mathbb{R}^4$ à F.

Exercice 165. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de :

— la projection orthogonale sur la droite d'équations $3\,x_1 = 6\,x_2 = 2\,x_3$,

— la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur unitaire (a,b,c),

— la projection orthogonale sur le plan d'équation $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$, où les réels a, b et c sont les coordonnées du vecteur u ci-dessus.

Exercice 166. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est
$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
Démontrer que u est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance du point de coordonnées $(1,1,1)$ à ce plan.

Exercice 167. (polynômes et projection) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de la structure euclidienne canonique, et l'hyperplan $H = \{P \in E \,|\, P(1) = 0\}$ de E.

1. Déterminer une base orthonormale de H.
2. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 168. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que le sous-ensemble F de E formé des polynômes P tels que $P(1) = 0$ est un plan vectoriel de E.
2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Déterminer la projection orthogonale du polynôme constant égal à 1 sur F.

Exercice 169. Soit un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = M_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

1. Soit D_0 le sous-espace vectoriel des matrices scalaires :

$$D_0 = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   Déterminer ${D_0}^\perp$ et les projections orthogonales sur D_0 et ${D_0}^\perp$.
2. Faire de même pour le sous-espace D_1 des matrices diagonales.

Exercice 170. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles, muni du produit scalaire défini par

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos(t)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Soit c un réel. On pose

$$I(a,b) = \int_0^\pi (a\ \sin(t) + b\ \cos(t) - c)^2\,\mathrm{d}t.$$

   Déterminer les réels a_0 et b_0 réalisant

$$I(a_0,b_0) = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b)$$

   et calculer $I(a_0,b_0)$.

Exercice 171. (problème aux moindres carrés) Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On considère une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dont le rang vaut p et une matrice B de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\| \mid X \in M_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de l'équation matricielle

$$A^\top AX = A^\top B.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\left\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 172. $\diamond$ **(déterminant de Gram)** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p, avec $p > 2$, sur $\mathbb{R}$, de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pour toute famille de vecteurs $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E donnée, on pose $G(e_1,\ldots,e_n) = \left(\left\langle e_i, e_j\right\rangle\right)_{1\leq i,j\leq n}$ (*matrice de Gram*) et $\gamma(e_1,\ldots,e_n) = \det(G(e_1,\ldots,e_n))$ (*déterminant de Gram*).

1. Montrer que $\mathrm{rang}(G(e_1,\ldots,e_n)) = \mathrm{rang}(\{e_1,\ldots,e_n\})$.
2. Montrer que la famille $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est liée si et seulement si $\gamma(e_1,\ldots,e_n) = 0$ et qu'elle est libre si et seulement si $\gamma(e_1,\ldots,e_n) > 0$.
3. On suppose maintenant que $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est libre dans E (et donc que $n \leq p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(\{e_1,\ldots,e_n\})$. Pour x dans E, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$ la distance de x à F. Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x,e_1,\ldots,e_n)}{\gamma(e_1,\ldots,e_n)}}$.

Exercice 173. Soit E un espace vectoriel euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux définis sur E. Montrer que

$$\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Im}(q) \iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|q(x)\|.$$

Exercice 174. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, E un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille de vecteurs unitaires de E. On suppose que

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ i \neq j \implies \|e_i - e_j\| = 1.$$

Montrer que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E.

Exercice 175. Soit n un entier naturel, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k).$$

1. Vérifier que la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E.
3. Déterminer la distance d'un polynôme Q de E au sous-espace $H = \left\{P \in E \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.

Exercice 176. On considère l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer l'orthogonal de $A_3(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $A_3(\mathbb{R})$.

Exercice 177. Prouver l'existence et l'unicité des réels a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$ soit minimum. Les calculer.

Exercice 178. (régression linéaire par la méthode des moindres carrés) Un médecin imagine que la taille des enfants doit, grossièrement, croître proportionnellement à leur masse. Il pense donc qu'il doit exister une relation mathématique du type

$$\text{taille en cm} \simeq a + b \times \text{masse en kg}.$$

Afin de calculer a et b, le médecin mesure 10 enfants volontaires agés de 6 ans et obtient le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille (en cm)	121	123	108	118	111	109	114	103	110	115
Masse (en kg)	25	22	19	24	19	18	20	15	20	21

Le médecin, bien que peut-être reconnu en pédiatrie, est malheureusement un piètre mathématicien. Il a donc calculé, en désespoir de cause et sans trop comprendre pourquoi, les différentes moyennes suivantes :

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{10} M_i / 10 = 20,3 \text{ kg}, \quad \overline{T} = \sum_{i=1}^{10} T_i / 10 = 113,2 \text{ cm},$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{10} \left(M_i - \overline{M}\right)^2 / 10 = 7,61 \text{ kg}^2, \quad R = \sum_{i=1}^{10} T_i M_i / 10 = 2312,6 \text{ kg.cm}.$$

Aider le médecin en donnant (et en la justifiant) une expression de a et b en fonction des différentes moyennes $\overline{M}$, $\overline{T}$, R et σ. Calculer (de manière approchée) a et b et commenter, si possible, les résultats en utilisant les ratios (approchés) suivants :

$$\frac{R}{\sigma} = 304, \quad \frac{R\overline{M}}{\sigma} = 6169, \quad \frac{\overline{T}\,\overline{M}}{\sigma} = 302, \quad \frac{\overline{T}\,\overline{M}^2}{\sigma} = 6130.$$

4.6 Endomorphismes des espaces euclidiens

4.6.1 Adjoint d'un endomorphisme

Exercice 179. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que $\det(u^*) = \det(u)$.

Exercice 180. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$.
2. Montrer que $\operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(u^* \circ u) = \operatorname{rang}(u \circ u^*)$.
3. En déduire que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u \circ u^*)$.

4. Exprimer le sous-espace $\mathrm{Im}(u^* \circ u)$ en fonction de $\ker(u)$.

Exercice 181. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $\ker(u+u^*) = \ker(u) \cap \ker(u^*)$.
2. Établir $u+u^*$ est inversible si et seulement si $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 182. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Montrer que si $u(x) = x$ alors $u^*(x) = x$.
2. Montrer que $E = \ker(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E)$.

Exercice 183. Soit n un entier naturel non nul. On munit l'espace $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit A une matrice d'ordre n et u l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ u(M) = AM$$

Déterminer l'adjoint de u.

Exercice 184. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2, muni du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer la matrice M du produit scalaire relativement à la base $\{1, X, X^2\}$ de E.
2. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P'$ pour tout P de E. Déterminer la matrice de son adjoint dans la base $\{1, X, X^2\}$ de E.

4.6.2 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 185. Soit n un entier naturel non nul. On munit l'espace $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit A une matrice d'ordre n et u l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ u(M) = AM$$

À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle ?

Exercice 186. Soit E un espace euclidien, u et v deux isométries vectorielles de E.

1. Montrer que si le vecteur x de E est tel que $u(x) \neq v(x)$, alors $\langle u(x), v(x)\rangle < \|u(x)\|\|v(x)\|$.
2. On suppose qu'il existe un réel λ appartenant à $]0,1[$ tel que $\lambda u + (1-\lambda)v$ est une isométrie vectorielle. Montrer que $u = v$.

Exercice 187. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère l'endomorphisme u de E défini par $u(P)(X) = P(-X)$ pour tout P de E. Montrer que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 188. (sur les coefficients d'une matrice orthogonale) Soit n un entier naturel non nul et M une matrice orthogonale d'ordre n.

1. Montrer que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}| \leq n$. Cette inégalité est-elle optimale ?
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \leq n^{3/2}$.
3. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \geq n$.

Exercice 189. (valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale) Soit n un entier naturel non nul. On munit l'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de la structure euclidienne canonique. Soit M une matrice orthogonale d'ordre n.

1. On suppose que M admet une valeur propre réelle λ et on considère un vecteur propre X associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons différentes $\|MX\|^2$, montrer que $\lambda^2\|X\|^2 = \|X\|^2$.

2. En déduire que $\mathrm{Sp}(M) \cap \mathbb{R} \subset \{-1, 1\}$.
3. Donner un exemple de matrice orthogonale d'ordre 2 qui ne possède pas de valeur propre réelle.

Exercice 190. (matrices orthogonales triangulaires supérieures) Caractériser les matrices orthogonales qui sont triangulaires supérieures.

Exercice 191. Soit n un entier naturel non nul et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i{}^2 = 1$. On considère la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ a_{ij} = \alpha_i \alpha_j,$$

et $B = 2A - I_n$. Montrer que B est orthogonale. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Exercice 192. (matrice de Householder) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout vecteur u non nul de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H(u)$ la matrice

$$H(u) = I_n - 2\frac{UU^\top}{U^\top U}$$

où la matrice colonne U représente le vecteur u dans la base canonique.

1. Montrer que la matrice $H(u)$ est symétrique et orthogonale.
2. Soit Q une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que si $V = QU$ alors $H(v) = QH(u)Q^\top$, où v est l'élément de $\mathbb{R}^n$ représenté par V dans la base canonique.
3. On désigne par $\mathscr{D}$ la droite vectorielle engendrée par u et par $\mathscr{D}^\perp$ l'hyperplan orthogonal de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par $H(u)$ et que $H(u)W = W$ pour toute matrice colonne W représentant un élément w de $\mathscr{D}^\perp$.

Exercice 193. (matrices circulantes de $O(3,\mathbb{R})$) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $S = a+b+c$ et $\sigma = ab+bc+ca$, et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que M appartient à $O(3,\mathbb{R})$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que M appartient à $SO(3,\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

Exercice 194. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales et décrire géométriquement les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qu'elles représentent dans la base canonique.

1. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. 2. $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 195. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 196. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par le vecteur $u = e_1 - 2e_2$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 197. Préciser la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés aux matrices suivantes dans la base canonique.

1. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 198.

1. Trouver une matrice M de $O(2,\mathbb{R})$ qui vérifie $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = 1$. Une telle matrice M est-elle unique ?
2. Trouver une matrice M de $O(2,\mathbb{R})$ qui vérifie $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = -1$. Une telle matrice M est-elle unique ?

3. Soit X une matrice de $M_{2,1}(\mathbb{R})$, $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et M une matrice de $O(2,\mathbb{R})$ telles que $MX = X$. Montrer que soit $M = I_2$, soit $\det(M) = -1$.

Exercice 199. Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 200. ⋄ **(exponentielle de matrice réelle antisymétrique et groupe spécial orthogonal)** Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que, pour toute matrice réelle antisymétrique A d'ordre n, la matrice e^A est un élément de $SO(n,\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, montrer que toute matrice de $SO(n,\mathbb{R})$ est de la forme e^A, où A est une matrice réelle antisymétrique.

Exercice 201. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \vdots & \vdots & & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

4.6.3 Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Exercice 202. (symétrique entraîne linéaire) Soit E un espace euclidien et u une application de E dans E telle que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

Montrer que u est un endomorphisme.

Exercice 203. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout vecteur x de E, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Que dire de u ?

Exercice 204. Soit E un espace vectoriel euclidien, u et v deux endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u) = E$.
2. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 205. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E de dimension n non nulle. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f, comptées avec leur multiplicité. Montrer que

$$\forall x \in E,\ \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 206. Caractériser les endomorphismes auto-adjoints orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

Exercice 207. Soit n un entier naturel non nul. On munit l'espace $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit A une matrice d'ordre n et u l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ u(M) = AM$$

À quelle condition u est-il auto-adjoint ?

Exercice 208. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, E un espace euclidien de dimension n, a un vecteur unitaire de E et λ un réel.

1. Montrer que l'application u définie par
$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \lambda \langle x, a\rangle a$$
définit un endomorphisme auto-adjoint de E.
2. Déterminer le spectre de u et les sous-espaces propres associés.

Exercice 209. Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle, u un endomorphisme auto-adjoint de E, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ deux bases orthonormales de E.

1. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u(f_i)\|^2.$$
2. Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec leur ordre de multiplicité. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} {a_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2.$$

Exercice 210. Soit A une matrice réelle.

1. Montrer que $A^\top A$ est réelle symétrique et positive.
2. Montrer que $\ker(A) = \ker(A^\top A)$, puis que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A)$.

Exercice 211. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace euclidien E qui commutent entre eux. On suppose que les matrices S et T, représentant respectivement u et v dans une même base orthonormale de E, sont respectivement symétrique et antisymétrique. Montrer qu'on a
$$\forall x \in E,\ u(x) \perp v(x) \text{ et } \|u(x) + v(x)\| = \|u(x) - v(x)\|.$$

Exercice 212. Soit n un entier naturel non nul, E un espace euclidien de dimension n et u et v deux endomorphismes de E auto-adjoints, ayant tous deux des valeurs propres positives.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme φ auto-adjoint de E, ayant des valeurs propres positives et tel que $u = \varphi \circ \varphi$.
2. Montrer que $\ker(u + v) = \ker(u) \cap \ker(v)$.

Exercice 213. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme auto-adjoint de E. On suppose qu'il existe une constante réelle α positive ou nulle telle que
$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \alpha\,\|x\|.$$
Montrer que $u^2 = \alpha^2\, id_E$.

Exercice 214. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ a_{ii} > 1 \text{ et } i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 1.$$
Montrer que A est symétrique définie positive.

Exercice 215. Déterminer les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ symétriques, orthogonales et dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 216. (matrice symétrique à puissance nulle) Soit A une matrice réelle symétrique. On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. Que dire de A?

Exercice 217. (limite de suite) Soit
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la suite de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Soit $N = \lim_{k\to+\infty} A^k$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme associé à N.
3. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $X_{k+1} = AX_k$ pour tout entier naturel k. Prouver que cette suite converge et déterminer sa limite en fonction de u_0, v_0 et w_0.

4.6.4 Diagonalisation des matrices symétriques et applications

Exercice 218. Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^\top$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 219. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A.
2. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la signature de q.

Exercice 220. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui est représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 221. Soit n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2 et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $M_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a $a_{ij} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et 0 sinon).

1. Soit λ un réel. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?
2. Montrer que A admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

Exercice 222. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AA^\top AA^\top A = I_n$.

Exercice 223. Soit n un entier naturel non nul, A une matrice réelle d'ordre n et p un entier naturel non nul. Montrer que $(A + A^\top)^p$ est nulle si et seulement si A est antisymétrique.

Exercice 224. Pour n un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2, on considère $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de la structure euclidienne canonique et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de $B = A^\top A$ sont strictement positives.
2. Montrer que si la famille $\{X_1, \dots, X_n\}$ de vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est orthonormale et que la famille $\{AX_1, \dots, AX_n\}$ est orthogonale, alors les vecteurs $X_1, \dots, X_n$ sont des vecteurs propres de la matrice B.

Exercice 225. (forme quadratique de trace nulle) Soit n un entier naturel non nul et E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Si q est une forme quadratique sur E, on appelle *trace* de q la trace de toute matrice de q relativement à une base orthonormée.

1. Montrer que cette définition a bien un sens.

On souhaite démontrer que la trace de q est nulle si et seulement s'il existe une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que $q(e_i) = 0$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.

2. Montrer l'implication réciproque.
3. On suppose maintenant que la trace de q est nulle.
   (a) Trouver un vecteur e_1 de norme unitaire tel que $q(e_1) = 0$.
   (b) En déduire la propriété voulue.

Exercice 226. (« réduction » simultanée) Soit n un entier naturel non nul et M et N deux matrices réelles symétriques d'ordre n, avec M définie positive. Montrer qu'il existe une matrice réelle inversible C telle que

$$C^\top MC = I_n \text{ et } C^\top NC = D,$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Exercice 227. (racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit M une matrice réelle symétrique positive. Montrer qu'il existe une matrice réelle symétrique positive R telle que $M = R^2$. Que dire de l'unicité d'une telle matrice ?

Exercice 228. (décomposition polaire) Soit A une matrice réelle inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U,H), U étant orthogonale et H réelle symétrique définie positive, tel que $A = UH$.

Exercice 229. (factorisation de Cholesky et factorisation QR) Soit n un entier strictement positif et A une matrice réelle d'ordre n.

1. On suppose dans cette question que la matrice A est symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = R^\top R$.
2. On suppose dans cette question que la matrice A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (Q,R), avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, tel que $A = QR$.

4.6.5 Décomposition en valeurs singulières

Exercice 230. Trouver une décomposition en valeurs singulières de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 231. calcul de pseudo-inverse Déterminer le pseudo-inverse de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4.6.6 Endomorphismes normaux et matrices commutant avec leur transposée

Exercice 232. Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que les endomorphismes u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 233. Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E, supposé diagonalisable. Montrer que u est auto-adjoint.

Exercice 234. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que u est normal si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|.$$

Exercice 235. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice d'ordre n inversible commutant avec sa transposée. Montrer que la matrice $\left(A^{-1}\right)^\top A$ est orthogonale.

Exercice 236. Soit n un entier naturel non nul et A une matrice d'ordre n commutant avec sa transposée. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^\top A$ est nulle.
2. En déduire que A est nulle.