Feuille de travaux dirigés

Rappels sur la méthode d'élimination de Gauss

Version du 14 juin 2024.

Exercice 1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss, en donnant l'expression de toutes les matrices et de tous les seconds membres intermédiaires, le système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Répondre à la même question avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère le système linéaire s'écrivant matriciellement $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Est-il possible d'utiliser la méthode d'élimination de Gauss sans échange pour la résolution de ce système ?
2. Trouver des matrices de permutation P et Q telles que l'on puisse réaliser l'élimination sur la matrice PAQ. Comment est transformé le système linéaire initial ?

Exercice 3. Soit la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer son inverse en résolvant le système matriciel $UX = I_4$, dans lequel X désigne une matrice carrée d'ordre 4, par la méthode d'élimination de Gauss–Jordan.

Exercice 4. Donner une formulation matricielle (c'est-à-dire en termes d'un produit de matrices de transformations élémentaires) de la réduction à la forme échelonnée de la matrice rectangulaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

Exercice 5. On considère le système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss–Jordan, mettre le système sous une forme échelonnée réduite équivalente.
2. Préciser le rang et la dimension du noyau de la matrice obtenue et en déduire ceux de A.
3. Déterminer des bases de l'image et du noyau de la matrice A.
4. Quelle(s) condition(s) doit vérifier le vecteur colonne $\boldsymbol{b}$ pour que le système possède une solution ?

Feuille de travaux dirigés

Méthodes de factorisation pour la résolution de systèmes linéaires

Version du 14 juin 2024.
Le symbole ⋄ indique un exercice technique et/ou difficile.

Exercice 1. On considére le système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
2. Résoudre le système linéaire en utilisant la factorisation trouvée à la question précédente.
3. Calculer le déterminant de la matrice A.

Exercice 2. Calculer la factorisation LU de la matrice A dans les cas suivants

$$1.\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2.\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3.\ A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

en précisant à chaque étape de la factorisation les matrices intervenant dans le procédé.

Exercice 3 ⋄ (factorisation LU d'une matrice bande). On dit qu'une matrice est une matrice bande si elle n'admet que des éléments non nuls sur un « certain nombre » de diagonales autour de la diagonale principale. Plus précisément, une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de largeur de bande valant $2p+1$ est telle qu'il existe un entier naturel p tel que $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| > p$. Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bandes au sens suivant : *soit A une matrice carrée d'ordre n admettant une factorisation LU, alors*

$$a_{ij} = 0 \textit{ pour } |i-j| > p \Rightarrow l_{ij} = 0 \textit{ pour } i-j > p \textit{ et } u_{ij} = 0 \textit{ pour } j-i > p.$$

Exercice 4 (factorisation LU d'une matrice tridiagonale – algorithme de Thomas). Soit n un entier naturel strictement plus grand que 2 et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & d_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & d_n & a_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale d'ordre n.

1. Vérifier que si A admet une factorisation LU alors les matrices L et U sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que les coefficients u_i, $1 \leq i \leq n$, et l_j, $2 \leq j \leq n$, satisfont les relations

$$u_1 = a_1,\ l_i = \frac{d_i}{u_{i-1}},\ u_i = a_i - l_i c_{i-1},\ 2 \leq i \leq n.$$

3. Obtenir les formules découlant de l'utilisation de cette factorisation pour la résolution du système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, la matrice colonne $\boldsymbol{b}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ étant donnée.
4. Déterminer le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de ce système.

Exercice 5 (factorisation LU d'une matrice à diagonale strictement dominante). Soit n un entier naturel supérieur à 2 et A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant les conditions

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'une telle matrice est inversible et qu'elle admet une factorisation LU.

1. Montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes est inversible.
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer que A admet une factorisation LU si et seulement si $A^\top$ admet une factorisation LU.
3. Soit A une matrice carrée d'ordre n, que l'on suppose pouvoir partitionner en blocs de la manière suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & W^\top \\ \hline V & A_1 \end{array}\right),$$

où $a = a_{11}$ est un réel non nul, V et W sont des matrice colonnes de $M_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et A_1 est une matrice d'ordre $n-1$. En effectuant des produits par blocs, vérifier que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \hline \frac{1}{a}V & I_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & W^\top \\ \hline \mathbf{0} & I_{n-1} \end{array}\right),\ \text{avec } B = A_1 - \frac{1}{a}VW^\top,$$

où $\mathbf{0}$ désigne la matrice colonne nulle de $M_{n-1,1}(\mathbb{R})$.
4. Montrer alors que la matrice A admet une factorisation LU si c'est le cas pour le bloc B.
5. Dans cette question, on suppose que la matrice A est à diagonale strictement dominante par *colonnes*.
   a. En utilisant la décomposition et les notations précédemment introduites, montrer que

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i| < |a| - \left|v_j\right|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   puis que

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \left|(A_1)_{ij}\right| < \left|(A_1)_{jj}\right| - \left|w_j\right|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   et enfin que

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \left|b_{ij}\right| \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} \left|(A_1)_{ij}\right| + \frac{\left|w_j\right|}{|a|} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1} |v_i|,\ 1 \leq j \leq n-1.$$

   En déduire que la matrice B est à diagonale strictement dominante par colonnes.
   b. En raisonnant par récurrence, montrer que A admet alors une factorisation LU.
6. En supposant à présent que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes, déduire des questions précédentes qu'elle admet une factorisation LU.
7. On considère la matrice A dans les trois cas suivants :

$$\text{(a)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad \text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{(c)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer, en justifiant très simplement la réponse, dans quel(s) cas A admet une factorisation LU et, le cas échéant, calculer sa factorisation en précisant à chaque étape les opérations effectuées sur les lignes de la matrice.

Exercice 6 (existence et unicité de la factorisation de Cholesky). Soit n un entier naturel non nul. On rappelle qu'une matrice réelle A symétrique d'ordre n est dite *définie positive* si elle est telle que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geq 0,\ \text{et}\ X^\top AX = 0 \Rightarrow X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Par ailleurs, on dit qu'une matrice A réelle symétrique d'ordre n admet une factorisation de Cholesky s'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B à diagonale strictement positive telle que

$$A = BB^\top.$$

1. Montrer que si la matrice réelle A est symétrique définie positive alors A est inversible.
2. Montrer que si la matrice réelle A admet une factorisation de Cholesky alors A est une matrice symétrique définie positive.
3. Montrer que si la matrice réelle A admet une factorisation de Cholesky alors A admet une factorisation $LDL^\top$. En déduire que si A admet une factorisation de Cholesky, cette factorisation est unique dès lors que les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs.

Dans toute la suite, on suppose que A est une matrice symétrique d'ordre n définie positive.

4. Dans cette question, on veut prouver que A admet une factorisation de Cholesky par un raisonnement par récurrence.
   a. Pour n strictement plus grand que 1, écrire la matrice A sous la forme

   $$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ V^\top & a_{nn} \end{pmatrix},$$

   où V est une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, a_{nn} est un réel et A_{n-1} est une matrice symétrique d'ordre $n-1$. Montrer que la matrice A_{n-1} est définie positive.

   b. On suppose que A_{n-1} admet une décomposition de Cholesky, c'est-à-dire qu'il existe une matrice triangulaire inférieure à diagonale strictement positive B_{n-1} telle que $A_{n-1} = B_{n-1}B_{n-1}{}^\top$. Montrer que l'on peut déterminer de manière unique M de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et b de $\mathbb{R}$, $b > 0$, tels que

   $$B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ M^\top & b \end{pmatrix}$$

   et $A = BB^\top$.

   c. En déduire que A admet une factorisation de Cholesky.
5. Écrire l'algorithme permettant de calculer les coefficients de la matrice B.
6. Comparer le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un système linéaire à matrice symétrique définie positive par la méthode de Cholesky avec celui de la méthode d'élimination de Gauss.
7. **Application :** déterminer la factorisation de Cholesky des matrices suivantes :

$$\text{(a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix},\quad \text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix},\quad \text{(c)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & -4 \\ 3 & -7 & 14 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d'un système linéaire, avec ε un réel.

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre ε la matrice A est symétrique définie positive.
2. On suppose tout d'abord que $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par une méthode directe. Quelle factorisation de la matrice A peut-on envisager dans ce cas ?
3. On suppose maintenant que $\varepsilon = 2$.
   a. Vérifier que la matrice A est définie positive et en calculer la factorisation de Cholesky.
   b. En supposant que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, résoudre le système linéaire en utilisant la factorisation calculée à la question précédente.

Exercice 8 (factorisation QR). Soit n un entier naturel non nul et A une matrice réelle d'ordre n inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que

$$A^\top A = R^\top R.$$

2. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Q, c'est-à-dire vérifiant $Q^\top Q = QQ^\top = I_n$, telle que

$$A = QR.$$

3. Montrer que cette décomposition est unique.
4. On note $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ les colonnes de la matrice A, $(Q_j)_{1\leq j\leq n}$ celles de Q et on pose $R = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
   a. Montrer que $A_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} Q_i$, $j = 1, \ldots, n$.
   b. En déduire qu'obtenir la factorisation QR de A équivaut à construire une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à partir de la famille $\{A_j\}_{1\leq j\leq n}$.

Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Feuille de travaux dirigés

Méthodes de résolution des équations non linéaires

Version du 14 juin 2024.

Exercice 1 (analyse asymptotique de la méthode Illinois). Le but de cet exercice est d'analyser la convergence d'une variante de la méthode de la fausse position, qui aurait été introduite au début des années 1950 au centre de calcul de l'université de l'Illinois.

Pour une fonction strictement monotone, on observe que l'une des bornes d'encadrement construite par la méthode de la fausse position n'est jamais jamais modifiée. Ce phénomène ralentit particulièrement la convergence de la méthode, qui n'est pour cette raison que linéaire. Une modification mineure de l'algorithme, qui vise à empêcher la rétention systématique de l'une des bornes d'encadrement, permet cependant d'obtenir un ordre de convergence *effectif* strictement supérieur à 1.

Pour décrire de manière explicite cette modification, on adopte les notations suivantes, qui diffèrent quelque peu de celles utilisées en cours. On suppose disposer initialement d'un intervalle $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ non vide de $\mathbb{R}$ et d'une application continue f de $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$, ce qui assure l'existence d'un zéro ξ de f. On pose alors $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ et $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. À l'étape k de la méthode, k étant un entier naturel non nul, on pose

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(k-1)}y^{(k)} - x^{(k)}y^{(k-1)}}{y^{(k)} - y^{(k-1)}} \text{ et } y^{(k+1)} = f(x^{(k+1)}).$$

Si $y^{(k+1)}y^{(k)} < 0$, on passe à l'étape suivante (comme dans la méthode de la fausse position). En revanche, si $y^{(k+1)}y^{(k)} > 0$, on fait la mise à jour suivante

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} \text{ et } y^{(k)} = \frac{y^{(k-1)}}{2},$$

avant de passer à l'étape suivante [1] (ce qui constitue une modification par rapport à la méthode de la fausse position).

Cette méthode étant une méthode d'encadrement, elle converge globalement (on remarquera néanmoins qu'on n'a plus nécessairement $x^{(k-1)} < x^{(k)}$ à chaque étape, bien que ξ soit compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$).

Pour étudier la vitesse de convergence de cette variante, on fait les hypothèses additionnelles que f est deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ et que ses dérivées f' et f'' ne s'annulent pas, de sorte que ξ est un zéro simple de f.

1. On s'interesse tout d'abord à l'étude asymptotique de l'erreur après une étape *non modifiée*.
   a. Montrer que l'approximation de ξ issue d'une étape non modifiée est donnée par
   $$x^{(k+1)} = x^{(k-1)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k-1)}).$$
   b. Montrer que, pour tout x compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, il existe un réel θ_x, strictement compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, tel que
   $$f(x) = f(x^{(k-1)}) - \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}(x^{(k-1)} - x) + \frac{1}{2} f''(\theta_x)(x^{(k)} - x)(x^{(k-1)} - x).$$
   Indication : on pourra introduire, pour tout réel x strictement compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, la fonction auxiliaire ϕ, définie pour tout réel t compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$ par
   $$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{(x^{(k)} - x)(x^{(k-1)} - x)}(x^{(k)} - t)(x^{(k-1)} - t),$$
   où
   $$p(t) = f(x^{(k-1)}) + \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}(t - x^{(k-1)}),$$
   et utiliser le théorème de Rolle.

1. Si jamais la modification de la valeur de $y^{(k)}$ n'a pas le résultat escompté, elle est réitérée à l'étape suivante.

c. En déduire alors qu'il existe un réel $\theta^{(k)}$, strictement compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, vérifiant

$$\frac{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}{x^{(k)}-x^{(k-1)}}\,(x^{(k+1)}-\xi)=\frac{1}{2}f''(\theta^{(k)})(x^{(k)}-\xi)(x^{(k-1)}-\xi).$$

d. Montrer ensuite qu'il existe un réel $\eta^{(k)}$, strictement compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, tel que

$$x^{(k+1)}-\xi=\frac{1}{2}\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}\,(x^{(k)}-\xi)(x^{(k-1)}-\xi). \tag{1}$$

e. En déduire qu'on a asymptotiquement

$$x^{(k+1)}-\xi\approx\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\,(x^{(k)}-\xi)(x^{(k-1)}-\xi).$$

2. On considère à présent le comportement asymptotique de l'erreur après une étape *modifiée*. On suppose[2] pour cela que l'approximation $x^{(k+2)}$ est obtenue par une étape modifiée, alors que l'approximation précédente, $x^{(k+1)}$, est issue d'une étape non modifiée.

a. Montrer que l'on a dans ce cas

$$x^{(k+2)}-\xi=\left(\frac{f(x^{(k+1)})-f(\xi)}{x^{(k+1)}-\xi}\,\frac{x^{(k-1)}-\xi}{f(x^{(k+1)})-\frac{1}{2}f(x^{(k-1)})}-\frac{f(x^{(k-1)})}{2f(x^{(k+1)})-f(x^{(k-1)})}\right)(x^{(k+1)}-\xi).$$

b. En utilisant (1), établir que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f(x^{(k+1)})}{x^{(k-1)}-\xi}=0,$$

puis que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f(x^{(k-1)})}{2f(x^{(k+1)})-f(x^{(k-1)})}=-1.$$

c. En déduire que l'on a asymptotiquement

$$x^{(k+2)}-\xi\approx-(x^{(k+1)}-\xi).$$

3. En utilisant les deux résultats asymptotiques sur le comportement de l'erreur, montrer que les étapes modifiées, notées M, et non modifiées, notées U, de la méthode Illinois se succèdent asymptotiquement de la manière suivante

$$UU,\,MUU,\,MUU,\,MUU,\,\dots$$

si $\dfrac{f''(\xi)}{f'(\xi)}>0$, ou

$$U,\,MUU,\,MUU,\,MUU,\,\dots$$

si $\dfrac{f''(\xi)}{f'(\xi)}<0$, de sorte que le motif MUU se trouve indéfiniment répété.

4. Montrer alors que l'erreur se comporte asymptotiquement sur un motif comme

$$x^{(k+2)}-\xi\approx\left(\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right)^2(x^{(k-1)}-\xi)^3.$$

L'*indice d'efficacité computationelle de Traub* est une mesure de l'ordre de convergence effectif d'une méthode itérative, défini par $p^{\frac{1}{d}}$, où p est l'ordre de la méthode sur un motif et d est le nombre d'évaluations de la fonction f sur un motif.

5. Conclure que l'indice d'efficacité computationelle de la méthode Illinois vaut approximativement $1,44$.

Exercice 2 (étude de convergence de la méthode de point fixe). Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application continue de $[a,b]$ dans lui-même.

1. Montrer que g possède au moins un point fixe ξ dans l'intervalle $[a,b]$.
2. On suppose à présent que la fonction g est continûment dérivable dans un voisinage $I=[\xi-h,\xi+h]$ de ξ et que, **uniquement dans cette question**, $|g'(\xi)|<1$. On va montrer que la suite définie par

$$\forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)}=g(x^{(k)})$$

converge vers ξ dès que l'initialisation $x^{(0)}$ est suffisamment proche de ξ. On dit alors que ξ est un point fixe *attractif* de g.

2. On verra que cette hypothèse est justifiée.

a. Montrer qu'il existe $0 < \delta \leq h$ tel que

$$\forall x \in I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta],\ \left|g'(x) - g'(\xi)\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 - \left|g'(\xi)\right|\right).$$

b. En déduire qu'il existe une constante $0 < L < 1$ telle que, pour tout réel x dans I_δ, $|g'(x)| \leq L$.

c. En déduire que si $x^{(k)}$ appartient à I_δ, alors

$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq L\,|x^{(k)} - \xi|,$$

et que, si $x^{(0)}$ appartient à I_δ, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k)} \in I_\delta \text{ et } |x^{(k)} - \xi| \leq L^k\,|x^{(0)} - \xi|.$$

d. En conclure que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ.

3. On suppose dans cette question que $|g'(\xi)| > 1$. Montrer que, dans ce cas, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge généralement pas vers ξ. On pourra pour cela prouver, en s'inspirant des étapes de la question précédente, qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si l'initialisation $x^{(0)}$ appartient à $I_\delta \setminus \{\xi\}$, il existe un rang k pour lequel $x^{(k)}$ n'appartient pas à I_δ. On dit alors que ξ est un point fixe [3] *répulsif* de g.

4. **Application.** Étudier les méthodes de point fixe associées aux fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \ln(1+x) + 0{,}2,\ g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + c),\ \text{avec } 0 \leq c < 1,\ \text{ et } g_3(x) = -\ln(x).$$

Exercice 3. On souhaite calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ par une méthode de point fixe utilisant la fonction

$$g(x) = \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + (1-\omega)\,x^3 + \frac{2\omega}{3\,x^2} + 2(\omega - 1),$$

ω étant un paramètre réel.

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω la convergence de la méthode est-elle d'ordre supérieur à un ?
3. Existe-t-il une valeur du paramètre ω telle que l'ordre de la méthode soit supérieur à deux ?

Exercice 4 (exemple de divergence de la méthode de Newton–Raphson). On considère la fonction $f(x) = \arctan(x)$, qui a pour zéro $\xi = 0$.

1. Écrire l'équation de récurrence de la méthode de Newton–Raphson utilisée pour approcher le zéro de f. On notera g la fonction dont ξ est le point fixe ainsi définie.
2. Montrer que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1+x^2}$$

alors $|g(x)| > |x|$.

3. Étudier l'application $x \mapsto (1+x^2)\arctan(x) - 2\,x$ sur $[0, +\infty[$. En déduire que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1+x^2}$$

alors

$$\arctan(|g(x)|) > \frac{2\,|g(x)|}{1+g(x)^2}.$$

4. En conclure que si

$$\arctan(|x^{(0)}|) > \frac{2\,|x^{(0)}|}{1+(x^{(0)})^2},$$

alors

$$\lim_{k\to+\infty} |x^{(k)}| = +\infty.$$

Exercice 5 (convergence globale de la méthode de Newton–Raphson). Soit $[a, b]$ un intervalle non vide borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, qui change de signe sur $[a, b]$ et est telle que

$$\forall x \in [a, b],\ f'(x) \neq 0 \text{ et } f''(x) \neq 0.$$

On considère la méthode de Newton–Raphson pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$, en faisant l'hypothèse que l'initialisation $x^{(0)}$ choisie dans $[a, b]$ satisfait l'inégalité $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) \geq 0$.

3. En effet, si $x^{(0)} = \xi$, alors la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut ξ.

1. Montrer que f possède un unique zéro ξ dans $[a,b]$.
2. Dans cette question, on suppose que l'initialisation $x^{(0)}$, choisie dans l'intervalle $[a,b]$, est telle que $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) = 0$. Montrer que la méthode converge vers ξ.
3. On suppose maintenant que $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$.
   a. Considérer tout d'abord le cas pour lequel la dérivée f'' est strictement positive sur $[a,b]$ et montrer par un argument de monotonie que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode converge vers ξ.
   b. Faire de même dans le cas pour lequel cette dérivée est strictement négative sur $[a,b]$.
4. Conclure.

Exercice 6 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro multiple). Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, m un entier naturel supérieur ou égal à 2, f une fonction réelle $m+1$ fois continûment dérivable sur $[a,b]$ et ξ un zéro multiple de f d'ordre m, c'est-à-dire tel que

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(m-1)}(\xi) = 0 \text{ et } f^{(m)}(\xi) \neq 0,$$

contenu dans $[a,b]$. On cherche à appliquer la méthode de Newton–Raphson pour approcher ξ, en définissant la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}),$$

l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. On note que la fonction g n'est pas définie au point ξ.

1. Montrer que l'on peut prolonger g par continuité et que la fonction ainsi obtenue est dérivable en ξ, telle que
$$g'(\xi) = 1 - \frac{1}{m}.$$
2. En déduire qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $\left|x^{(0)} - \xi\right| \leq \delta$, la méthode de Newton–Raphson converge et que cette convergence est linéaire.
3. On suppose la valeur de l'entier m connue *a priori*. On a alors recours à une méthode modifiée, définie par
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},$$
avec $x^{(0)}$ donné. Quel est l'ordre de convergence de cette nouvelle méthode ?

Exercice 7 (étude de la méthode de Héron pour le calcul de $\sqrt{2}$). Pour calculer $\sqrt{2}$, on propose de construire une suite récurrente définie par

$$x^{(0)} = 1 \text{ et},\ \forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{2}{x^{(k)}}\right).$$

1. Étudier la fonction $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer son graphe.
2. Construire graphiquement les premiers termes de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Vérifier que g est une application contractante de $[1,2]$ dans lui-même. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Pour quelles valeurs de l'initialisation $x^{(0)}$ la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
5. Montrer que la convergence de cette méthode est quadratique. Que dire d'autre ?

Exercice 8 (méthode de Steffensen). Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ possède un zéro simple ξ. On cherche à approcher ξ par la méthode de Steffensen, une méthode de point fixe de la forme

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(f(x^{(k)})\right)^2}{f(x^{(k)} + f(x^{(k)})) - f(x^{(k)})},$$

l'initialisation $x_{(0)}$ étant donnée.

L'objectif de cet exercice est de prouver que, si la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers ξ, alors cette convergence est au moins quadratique.

1. En effectuant un développement de Taylor–Lagrange de $f(x^{(k)} + f(x^{(k)}))$ à l'ordre deux autour du point $x^{(k)}$, montrer qu'il existe un réel $\theta^{(k)}$ strictement compris entre $x^{(k)}$ et $x^{(k)} + f(x^{(k)})$ tel que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} - \xi = x^{(k)} - \xi - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2}f''(\theta^{(k)})f(x^{(k)})}.$$

2. En effectuant un développement de Taylor–Lagrange approprié, montrer ensuite qu'il existe un réel $\eta^{(k)}$ strictement compris entre $x^{(k)}$ et ξ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x^{(k)}) = f'(x^{(k)})(x^{(k)} - \xi) - \frac{1}{2} f''(\eta^{(k)})(x^{(k)} - \xi)^2$$

et en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} - \xi = \frac{1}{2} \frac{f(x^{(k)}) f''(\theta^{(k)})(x^{(k)} - \xi) + f''(\eta^{(k)})(x^{(k)} - \xi)^2}{f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(\theta^{(k)}) f(x^{(k)})}.$$

3. Par un développement de Taylor–Lagrange approprié, montrer enfin qu'il existe un réel $\zeta^{(k)}$ compris entre $x^{(k)}$ et ξ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x^{(k)}) = f'(\zeta^{(k)})(x^{(k)} - \xi),$$

et en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} - \xi = \frac{1}{2}(x^{(k)} - \xi)^2 \frac{f''(\theta^{(k)}) f'(\zeta^{(k)}) + f''(\eta^{(k)})}{f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(\theta^{(k)}) f(x^{(k)})}.$$

4. En déduire que, si la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ξ, alors on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\left|x^{(k+1)} - \xi\right|}{\left|x^{(k)} - \xi\right|^2} = \mu,$$

avec μ un réel que l'on explicitera.

5. Expliquer pourquoi la méthode de Steffensen peut être considérée comme une variante de la méthode de Newton–Raphson. Quel est son avantage par rapport à cette dernière méthode ?

Feuille de travaux dirigés

Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Version du 14 juin 2024.
Le symbole ⋄ indique un exercice technique et/ou difficile.

Exercice 1 ⋄ (normes matricielles subordonnées). Soit n un entier naturel strictement positif. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients complexes et on rappelle qu'une norme dite *matricielle* sur $M_n(\mathbb{C})$ est une application vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$,
- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

On rappelle également que, pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \dots, \infty$, sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$, on définit la *norme matricielle subordonnée* associée à $\|\cdot\|_p$ par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A\|_p = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}.$$

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, montrer les propriétés suivantes :

1. $\|A\|_p \geq \rho(A)$, où $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ est le rayon spectral de A,
2. $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$,
3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$,
4. $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2$ pour toute matrice unitaire U (c'est-à-dire telle que $UU^* = I_n$),
5. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Exercice 2 (rayon spectral et série de Neumann). Soit n un entier naturel strictement positif, A une matrice d'ordre n et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Montrer les assertions suivantes.

1. On a $\rho(A) < 1$ si et seulement si A^k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.
2. Si $\rho(A) < 1$, alors les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.
3. La série de terme général A^k converge (vers $(I_n - A)^{-1}$) si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 3 (convergence de méthodes itératives pour les matrices à diagonale strictement dominante). Soit n un entier naturel strictement positif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Montrer alors que la matrice A est inversible et que les méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel, utilisées pour la résolution du système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\boldsymbol{b}$ un vecteur donné, convergent toutes deux.

Exercice 4. On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel pour cette matrice.

2. Vérifier que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, où B_{GS} et B_J désignent respectivement les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi. Laquelle de ces deux méthodes converge le plus rapidement ?

Exercice 5. On considère les méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Étudier la convergence de ces deux méthodes en fonction de la valeur du paramètre réel α.

Exercice 6. Soit α et β deux réels. On considère les matrices

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de α (resp. β) la matrice A_α (resp. C_β) est-elle définie positive ?
2. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi associée à A_α (resp. C_β). Pour quelles valeurs de α (resp. β) cette méthode converge-t-elle ?
3. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel associée à A_α et calculer son rayon spectral. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence de cette méthode ?

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer (par l'exemple) qu'on ne peut établir de résultat général de comparaison de convergence entre les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi.

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_J) < 1 < \rho(B_{GS})$, où B_{GS} et B_J désignent les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi respectivement.
2. Soit maintenant
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_{GS}) < 1 < \rho(B_J)$.

Exercice 8 (une méthode de relaxation). On considère pour la résolution d'un système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec A une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont tous non nuls, la méthode itérative définie par la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (D-E)\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = F\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \omega\,\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} + (1-\omega)\,\boldsymbol{x}^{(k)},$$

où ω est un paramètre réel, D est la partie diagonale de A, E est la partie triangulaire inférieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$ et F est la partie triangulaire supérieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$.

1. Réécrire cette méthode itérative sous la forme
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B(\omega)\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}(\omega),$$
en explicitant la matrice d'itération $B(\omega)$ et le vecteur $\boldsymbol{c}(\omega)$. Vérifier que l'on retrouve la méthode de Gauss–Seidel lorsque $\omega = 1$.
2. Soit maintenant
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Donner les valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode itérative est convergente dans ce cas.

Exercice 9. Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = I_3 - E - F$ avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.

2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{\omega} I_3 - E$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Pour $\omega \in]0,2[\setminus \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, on considère, pour la résolution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, la méthode itérative définie par

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et, } \forall k \in \mathbb{N},\ \left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right)\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3\right)\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b},$$

   et on pose $B(\omega) = \left(\dfrac{1}{\omega} I_3 - E\right)^{-1}\left(F + \dfrac{1-\omega}{\omega} I_3\right)$. Calculer, en fonction de ω, les valeurs propres de $B(\omega)$ et son rayon spectral.
4. Pour quelles valeurs de ω cette méthode converge-t-elle ?
5. Déterminer $\omega_0 \in]0,2[$ vérifiant $\rho(B(\omega_0)) = \min\left\{\rho(B(\omega)) \,|\, \omega \in]0,2[\setminus\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right\}$.

Exercice 10 (méthode de Richardson). Pour résoudre le système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, on considère la suite construite par la méthode de Richardson stationnaire, encore connue sous le nom de méthode du gradient à pas fixe, définie par la relation de récurrence

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \text{ donné et, } \forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\,(b - A\boldsymbol{x}^{(k)}),$$

avec α un réel non nul.

1. Montrer que, si la méthode converge, la limite $\boldsymbol{x}^*$ de la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $A\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$.
2. Montrer que, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

   il n'existe pas de α non nul tel que la méthode converge.
3. Discuter de la convergence de la méthode lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

Exercice 11 (convergence de la méthode de Richardson pour une matrice symétrique définie positive). Soit n un entier naturel non nul. On suppose l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire euclidien, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et de la norme associée $\|\cdot\|_2$. Soit A une matrice symétrique d'ordre n vérifiant

$$\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geq c\,{\|\boldsymbol{v}\|_2}^2.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) = \{\boldsymbol{0}\}$. En déduire que, pour tout vecteur $\boldsymbol{b}$, le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une unique solution.
2. On fixe $\alpha > 0$ et on construit la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \text{ donné et, } \forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}).$$

   On note $\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}$ le résidu à l'étape k.
   a. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{r}^{(k+1)} = (I_n - \alpha A)\boldsymbol{r}^{(k)}$, puis que $\boldsymbol{r}^{(k)} = (I_n - \alpha A)^k \boldsymbol{r}^{(0)}$.
   b. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$. Montrer que

$$\|(I_n - \alpha A)\boldsymbol{x}\|_2{}^2 \leq \alpha^2 {\|A\|_2}^2 - 2c\alpha + 1.$$

   c. En déduire que $\|I_n - \alpha A\|_2 < 1$ pour α appartenant à un intervalle correctement choisi.
3. Déduire de la question précédente une condition suffisante sur α pour que la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Feuille de travaux dirigés

Interpolation polynomiale

Version du 14 juin 2024.
Dans toute cette feuille, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée.

Exercice 1. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, d'une fonction réelle f définie et continue sur l'intervalle $[-1,1]$, interpolée aux nœuds -1 et 1. Montrer que, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1]$, on a alors

$$\forall x \in [-1,1],\ |f(x) - \Pi_1 f(x)| \leq \frac{M_2}{2}(1-x^2) \leq \frac{M_2}{2},$$

où $M_2 = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est une égalité.

Exercice 2. Soit a un réel strictement positif. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, de la fonction $f : x \mapsto x^3$, interpolée aux nœuds 0 et a. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0,a[$, il existe un réel c dans $[0,a]$ tel que

$$f(x) - \Pi_1 f(x) = \frac{f''(c)}{2}\, x(x-a),$$

et établir que $c = \frac{1}{3}(x+a)$.
Considérer ensuite la fonction $f : x \mapsto (2x-a)^4$ et montrer que, dans ce cas, il y a deux valeurs possibles pour c. Les déterminer.

Exercice 3. Soit n un entier naturel. Étant donnés $n+2$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n+1$, et $n+2$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n+1$, on note $\Pi_{0,\dots,n}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n}$ et $\Pi_{1,\dots,n+1}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\dots,n+1}$. On pose

$$p(x) = \frac{(x-x_0)\,\Pi_{1,\dots,n+1}(x) - (x-x_{n+1})\,\Pi_{0,\dots,n}(x)}{x_{n+1}-x_0}.$$

Montrer que p est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $n+1$ associé aux couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n+1}$.

Exercice 4 (forme de Newton du polynôme d'interpolation). Soit n un entier naturel non nul. Étant donné $n+1$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n$, et $n+1$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n$, on note, pour tout j dans $\{0,\dots,n\}$, Π_j le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré j associé aux couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,j}$.

1. On pose
$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ \Pi_j(x) = \Pi_{j-1}(x) + q_j(x).$$
Montrer que $q_j(x) = a_j\,\omega_j(x)$, où a_j est un coefficient à expliciter et $\omega_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i)$. La constante a_j est appelée la j^{e} *différence divisée de Newton* et sera notée $[x_0,\dots,x_j]\boldsymbol{y}$ dans la suite de l'exercice.
2. On pose $[x_0]\boldsymbol{y} = y_0$ et $\omega_0 \equiv 1$. Montrer que
$$\forall j \in \{0,\dots,n\},\ \Pi_j(x) = \sum_{k=0}^{j} [x_0,\dots,x_k]\boldsymbol{y}\ \omega_k(x),$$
où $[x_0,\dots,x_k]\boldsymbol{y}$ est la k^{e} différence divisée de Newton. Cette écriture est appelée la *forme de Newton* du polynôme d'interpolation de Lagrange.
3. Montrer que
$$\forall j \in \{0,\dots,n\},\ \Pi_j(x) = \sum_{i=0}^{j} \frac{\omega_{j+1}(x)}{(x-x_i)\,\omega'_{j+1}(x_i)}\, y_i,$$
et en déduire que
$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ [x_0,\dots,x_j]\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{j} \frac{y_i}{\omega'_{j+1}(x_i)}.$$

4. Obtenir enfin la formule de récurrence permettant le calcul des différences divisées :

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ [x_0,\dots,x_j]\mathbf{y} = \frac{[x_1,\dots,x_j]\mathbf{y} - [x_0,\dots,x_{j-1}]\mathbf{y}}{x_j - x_0}.$$

Peut-on en déduire un avantage de la forme de Newton du polynôme d'interpolation sur la forme de Lagrange ?

Exercice 5 (polynômes de Chebyshev et meilleurs points d'interpolation). Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de montrer que les points $x_0,\dots,x_n$ appartenant à un intervalle $[a,b]$ et minimisant [1]

$$\sup_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right|$$

sont reliés aux racines d'un polynôme particulier. Quitte à effectuer un changement de variable affine, on peut supposer que $[a,b]=[-1,1]$. Pour tout réel x dans l'intervalle $[-1,1]$, on pose alors $T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$.

1. Montrer que $T_n(\cos(x))=\cos(nx)$ et que l'on a la relation de récurrence

$$T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x).$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, en déduire que le polynôme T_n est de degré n, que son monôme de plus haut degré est $2^{n-1}x^n$ et que ses racines sont les nombres $x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k=0,\dots,n-1$ (T_n est appelé le n^{e} *polynôme de Chebyshev de première espèce*).
3. Montrer que la fonction T_n admet sur $[-1,1]$ des extrema locaux aux points $x'_k=\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$, $k=0,\dots,n$, et que $T_n(x'_k)=(-1)^k$.
4. Montrer alors que

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|,$$

pour tout polynôme Q unitaire de degré $n+1$, les points x_k, $k=0,\dots,n$, étant les racines du polynôme T_{n+1}.

Exercice 6 (interpolation de Hermite). L'interpolation polynomiale de Hermite est une méthode d'interpolation qui utilise non seulement les valeurs de la fonction à approcher, mais aussi celles de sa dérivée. Soit $n+1$ points distincts $x_0<\dots<x_n$ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Nous nous intéressons au polynôme p_n de degré $2n+1$ tel que

$$p_n(x_i)=f(x_i) \text{ et } p'_n(x_i)=f'(x_i),\ i=0,\dots,n.$$

Nous allons montrer dans un premier temps que p_n s'écrit sous la forme

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\widetilde{h}_i(x), \tag{2}$$

avec

$$h_i(x) = (1-2\ell'_i(x_i)(x-x_i))\ell_i^2(x) \text{ et } \widetilde{h}_i(x)=(x-x_i)\ell_i^2(x),\ i=0,\dots,n,$$

la fonction ℓ_i étant la i^{e} fonction polynomiale de Lagrange associée aux nœuds $x_0,\dots,x_n$.

1. Montrer que pour tout couple d'entiers (i,j) de $\{0,\dots,n\}^2$, on a

$$h_i(x_j)=\delta_{ij},\ h'_i(x_j)=0,\ \widetilde{h}_i(x_j)=0 \text{ et } \widetilde{h}'_i(x_j)=\delta_{ij}.$$

2. On veut montrer que le polynôme p_n défini en (2) est l'unique polynôme de degré $2n+1$ vérifiant les conditions requises. Il est appelé le polynôme d'interpolation de Hermite de f.
   a. Prouver que le polynôme p_n défini en (2) satisfait bien les conditions d'interpolation.
   b. Supposer l'existence d'un polynôme g de $\mathbb{P}_{2n+1}$ tel que $p_n(x_i)=g(x_i)$ et $p'_n(x_i)=g'(x_i)$ et montrer que $g=p_n$.

On fixe à présent $n=1$ et on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^4$. Nous allons prouver un résultat sur l'erreur d'interpolation. Pour x un réel fixé dans $]a,b[$, on introduit la fonction ϕ définie sur $[a,b]$ par

$$\phi(t) = f(t) - p_1(t) - \frac{(t-x_0)^2(t-x_1)^2}{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}\,(f(x)-p_1(x)).$$

3. Montrer que ϕ s'annule en x_0, x_1 et x et en déduire que ϕ' s'annule en deux points distincts de $[a,b]$ différents de x_0 et x_1.

1. Cette quantité apparaît dans l'erreur d'interpolation $E(x)=f(x)-\Pi_n f(x)$, mesurée en norme de la convergence uniforme, d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.

4. Montrer que $\phi'(x_0) = \phi'(x_1) = 0$.
5. En déduire qu'il existe un réel ξ dans $[a, b]$ tel que $\phi^{(4)}(\xi) = 0$.
6. Montrer qu'on a alors
$$f(x) - p_1(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{24} f^{(4)}(\xi).$$
7. En déduire que pour tout réel x dans $[a, b]$,
$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{(b-a)^4}{24} \max_{a \leq \xi \leq b} \left| f^{(4)}(\xi) \right|.$$
8. En s'inspirant de la démarche suivie pour $n = 1$, prouver que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, si f est de classe $\mathscr{C}^{(2n+2)}$, on a
$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|q_n(x)|^2}{(2n+2)!} \max_{a \leq \xi \leq b} \left| f^{(2n+2)}(\xi) \right|,$$
avec q_n est un polynôme que l'on explicitera.

Feuille de travaux dirigés

Formules de quadrature

Version du 14 juin 2024.
Dans cette feuille, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée. Pour tout entier naturel n et tout intervalle réel $[a,b]$, on désigne par $\mathscr{P}_n(a,b)$ l'ensemble des fonctions polynomiales de dégré inférieur ou égal à n définies sur $[a,b]$.

Exercice 1. On considère la formule de quadrature sur l'intervalle $[-1,1]$ donnée par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([-1,1]),\ I_{ap}(f) = \alpha_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{2}\right).$$

1. Déterminer les poids α_0, α_1 et α_2 de sorte que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
2. Quel est le degré d'exactitude de la formule ainsi obtenue ?

Exercice 2. Étant donnés deux points x_0 et x_1 dans l'intervalle $[-1,1]$ tels que $x_0 < x_1$ et deux réels α_0 et α_1, on considère la formule de quadrature suivante sur l'intervalle $[-1,1]$:

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([-1,1]),\ I_{ap}(f) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1).$$

Le but de cet exercice est de déterminer des valeurs pour les nœuds x_0 et x_1 et les poids α_0 et α_1 conduisant à une formule de quadrature de degré d'exactitude le plus élevé possible.

1. Construire les polynômes de Lagrange l_0 et l_1 associés aux points x_0 et x_1.
2. Déterminer les poids α_0 et α_1 tels que la formule soit exacte pour ces deux polynômes. En déduire qu'elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à un.
3. Déterminer une relation entre les nœuds x_0 et x_1 pour que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
4. Répondre à la même question pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
5. Montrer que le degré d'exactitude de la formule de quadrature est au plus égal à trois.
   Indication : on pourra utiliser le polynôme $\omega(x) = ((x-x_0)(x-x_1))^2$.
6. En déduire la formule de quadrature à deux nœuds sur l'intervalle $[-1,1]$ et de degré d'exactitude égal à trois.

Exercice 3 (erreur pour la formule de quadrature de Simpson). Soit $[a,b]$ un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La formule de Simpson est une formule de quadrature interpolatoire pour laquelle une approximation de l'intégrale de la fonction f entre a et b est obtenue en remplaçant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré deux aux nœuds $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, noté $\Pi_2 f$.

1. Définir et expliciter le polynôme d'interpolation $\Pi_2 f$, puis déterminer

$$I_2(f) = \int_a^b \Pi_2 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i f(x_i).$$

2. On suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^4$ et l'on introduit l'erreur de quadrature $E_2(f) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - \Pi_2 f(x))\,\mathrm{d}x$.
   On va montrer que

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c),\ \text{avec } c \text{ appartenant }]a,b[.$$

   Pour t appartenant à $[-1,1]$, on pose $F(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$ et

$$G(t) = \int_{-t}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u - \frac{t}{3}\left[F(-t) + 4F(0) + F(t)\right].$$

a. Montrer que $E_2(f) = \frac{1}{2}(b-a)G(1)$.
b. Soit $H(t) = G(t) - t^5\, G(1)$. Montrer qu'il existe un réel ζ dans $]-1,1[$ tel que $H'''(\zeta) = 0$.
c. En déduire qu'il existe un réel ξ dans $]-\zeta,\zeta[$ tel que

$$H'''(\zeta) = -\frac{2\zeta^2}{3}\left[F^{(4)}(\xi) + 90G(1)\right],$$

et, par suite, que

$$G(1) = -\frac{1}{90}F^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^4}{1440}f^{(4)}(c),$$

avec c dans $]a,b[$.

3. Quel est le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?

Exercice 4 (degré d'exactitude maximal d'une formule de quadrature interpolatoire). Soit n un entier naturel non nul. Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut construire des formules de interpolatoires à $n+1$ nœuds qui sont exactes pour toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n+1$. Ce résultat est à la base des formules de quadrature de Gauss.

Pour ce faire, on rappelle les résultats suivants sur les suites de polynômes orthogonaux. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction strictement positive sur $[a,b]$. On note

$$L^2_w(]a,b[) = \left\{ f\,:\,[a,b]\to\mathbb{R},\ \int_a^b |f(x)|^2\,w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

l'espace des fonctions de carré sommable par rapport au *poids* w (avec la convention que deux fonctions égales presque partout sont égales), qui, muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in (L^2_w(]a,b[))^2,\ \langle f,g\rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x,$$

est un espace de Hilbert.

On suppose que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \int_a^b |x|^k\,w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

ce qui permet de montrer qu'il existe une unique suite de fonctions polynomiales $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, orthogonales dans $L^2_w(]a,b[)$ et telles que P_k est de degré k, de coefficient devant le terme de plus haut degré égal à 1, possédant exactement k racines réelles simples contenues dans l'intervalle $]a,b[$, celles-ci se trouvant par ailleurs strictement entre les racines du polynôme de degré supérieur dans la suite.

Dans l'ensemble de l'exercice, on considère une telle suite de fonctions polynomiales et l'on note respectivement $x_0,\dots,x_n$ et $w_0,\dots,w_n$ les nœuds et poids de quadrature.

1. On veut montrer par double implication que les poids $w_0,\dots,w_n$, forment la solution du système linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} P_k(x_i)w_i = \begin{cases} \langle P_0,P_0\rangle_w & \text{si } k=0,\\ 0 & \text{si } k=1,\dots,n,\end{cases} \tag{3}$$

où les nœuds $x_0,\dots,x_n$ sont les racines de P_{n+1}, si et seulement s'ils sont strictement positifs et que

$$\forall P\in\mathscr{P}_{2n+1}(a,b),\ \int_a^b P(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_iP(x_i).$$

a. Preuve de l'implication directe.
i. Montrer l'unicité de la solution du système (3).
ii. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P de $\mathscr{P}_{2n+1}(a,b)$, il existe des fonctions polynomiales Q et R telles que

$$P = QP_{n+1} + R,\ Q = \sum_{i=0}^{n}\alpha_iP_i \text{ et } R = \sum_{i=0}^{n}\beta_iP_i,$$

avec $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ et $\beta_0,\dots,\beta_n$ des nombres réels.
iii. En déduire que, pour toute fonction polynomiale P de $\mathscr{P}_{2n+1}(a,b)$,

$$\int_a^b P(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \beta_0\,\langle P_0,P_0\rangle_w\,,$$

et que

$$\sum_{i=0}^{n} P(x_i)w_i = \sum_{j=0}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=0}^{n}P_j(x_i)wi\right).$$

iv. Conclure et montrer que les coefficients $w_0, \dots, w_n$ sont strictement positifs.

b. Preuve de l'implication réciproque.

i. Montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ \sum_{i=0}^{n} P_k(x_i) w_i = \langle P_0, P_0 \rangle_w \, \delta_{k0}.$$

ii. Pour tout entier k de $\{0, \dots, n\}$, considérer la fonction polynomiale $P = P_{n+1} P_k$ et montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} P_k(x_i) P_{n+1}(x_i) w_i = 0.$$

iii. Conclure.

2. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver des nœuds et des poids de quadrature tels que la formule étudiée précédemment soit exacte pour toute fonction de $\mathscr{P}_{2n+2}(a, b)$.

Exercice 5 (erreur de quadrature et noyau de Peano). Soit un entier naturel k. On note $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à k.

1. Soit une fonction réelle f continue sur $[-1, 1]$. On note $\Pi_2 f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1, 0 et 1. Donner l'expression des polynômes de Lagrange l_i, $i = 0, 1, 2$, tels que

$$\Pi_2 f(x) = f(-1)\, l_0(x) + f(0)\, l_1(x) + f(1)\, l_2(x).$$

En déduire les valeurs des poids α_i, $i = 0, 1, 2$, telles que la formule de quadrature

$$I_2(f) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1),$$

approchant l'intégrale de f entre -1 et 1, soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

2. On suppose dans cette question que la fonction f est polynomiale de degré inférieur ou égal à trois et on note s la fonction de $\mathbb{P}_k$ telle que

$$f(x) = \Pi_2 f(x) + s(x).$$

Montrer que s est de la forme

$$s(x) = a(x^2 - 1)x,\ a \in \mathbb{R},$$

et en déduire que la formule de quadrature précédente est en fait exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

3. On suppose dans toute la suite que f est de classe $\mathscr{C}^4$ et on rappelle que, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a, pour tout réel x dans $[-1, 1]$,

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} f^{(4)}(t)(x - t)_+^3 \,\mathrm{d}t,$$

avec p appartenant à $\mathbb{P}_3$ et où

$$(x - t)_+ = \begin{cases} x - t & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}.$$

En déduire que l'erreur $E_2(f)$ de la formule de quadrature s'écrit dans ce cas

$$E_2(f) = \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} K(t) f^{(4)}(t) \,\mathrm{d}t,$$

où K est une fonction définie sur $[-1, 1]$ dont on précisera l'expression générale [1].

4. On admet le fait que la fonction K est paire. Calculer explicitement $K(t)$ pour pour réel t dans $[0, 1]$ et montrer que l'on trouve

$$K(t) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(1 - t)^3(1 + 3t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ K(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}.$$

5. Vérifier que la fonction K ne change pas de signe sur l'intervalle $[-1, 1]$, puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe un réel ξ dans $[-1, 1]$ tel que

$$E_2(f) = \frac{1}{6} f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^{1} K(t) \,\mathrm{d}t.$$

En déduire enfin l'expression

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}.$$

1. La fonction K est le noyau de Peano associée à la formule de quadrature considérée.

6. On considère maintenant l'intervalle symétrique $[-h, h]$, avec $h > 0$. Déduire de ce qui précède une formule de quadrature

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x = b_1 f(-h) + b_2 f(0) + b_3 f(h) + E_{2,h}(f),$$

pour toute fonction f continue sur $[-h, h]$, exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois et dont on déterminera l'erreur de quadrature $E_{2,h}(f)$ lorsque f est de classe $\mathscr{C}^4$.
Indication : on pourra introduire la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $g(u) = f(hu)$.

Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Méthodes numériques
année 2023/2024

Feuille de travaux dirigés

Calcul de valeurs et de vecteurs propres

Version du 14 juin 2024.
Le symbole ⋄ indique un exercice technique et/ou difficile.

Exercice 1 (localisation des valeurs propres). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A une matrice d'ordre n à coefficients complexes.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion des disques fermés respectivement centrés en a_{ii} et de rayon $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$, $i=1,\dots,n$.
2. En déduire qu'une matrice à diagonale strictement dominante par lignes est inversible et qu'une matrice réelle symétrique, à diagonale strictement dominante par lignes et à coefficients diagonaux positifs est définie positive.
3. Proposer une possible amélioration du résultat de la première question utilisant la matrice $A^\top$.

Exercice 2 (déflation de Wielandt). Soit n un entier naturel non nul et A une matrice réelle symétrique inversible d'ordre n dont on note λ_i, $i=1,\dots,n$, les valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités algébriques respectives) et $\boldsymbol{v}_i$, $i=1,\dots,n$, des vecteurs propres associés, supposés former une base orthogonale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Étant donné un entier j de $\{1,\dots,n\}$, on considère la modification suivante de la matrice A :

$$\widetilde{A} = A - \boldsymbol{v}_j {\boldsymbol{u}_j}^\top,$$

où $\boldsymbol{u}_j$ un vecteur vérifiant ${\boldsymbol{u}_j}^\top \boldsymbol{v}_j = \lambda_j$.

1. Calculer le produit $\widetilde{A}\boldsymbol{v}_j$.
2. Pour tout i appartenant à $\{1,\dots,n\}\backslash\{j\}$, calculer le produit $\widetilde{A}(\boldsymbol{v}_i + \alpha_i\,\boldsymbol{v}_j)$, où α_i est un réel. Pour quelle valeur de α_i le vecteur $(\boldsymbol{v}_i + \alpha_i\,\boldsymbol{v}_j)$ est-il un vecteur propre de $\widetilde{A}$?
3. Déduire des questions précédentes les valeurs propres de la matrice $\widetilde{A}$ et des vecteurs propres associés.
4. Que se passe-t-il pour le choix $\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \dfrac{\boldsymbol{v}_j}{{\|\boldsymbol{v}_j\|_2}^2}$?

Exercice 3 (convergence de la méthode de la puissance pour une matrice réelle symétrique). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une matrice A réelle symétrique d'ordre n, dont les valeurs propres sont telles que

$$|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|.$$

On suppose que le vecteur unitaire initial $\boldsymbol{q}^{(0)}$ de la méthode de la puissance n'est pas orthogonal au sous-espace propre associé à la valeur propre dominante λ_n. Montrer alors qu'il existe une constante positive C telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|\nu^{(k)} - \lambda_n\right| \leq C \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{2k},$$

où la suite $(\nu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est celle des approximations de λ_n construites par la méthode.

Exercice 4 ⋄ (réduction d'une matrice symétrique à la forme tridiagonale par la méthode de Householder). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire euclidien usuel, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|_2$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, on appelle matrice de Householder associée à $\boldsymbol{u}$ la matrice

$$H(\boldsymbol{u}) = I_n - 2\,\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top}{{\|\boldsymbol{u}\|_2}^2}.$$

Pour tout réel x, on définit la fonction signe par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0,\\ 0 & \text{si } x = 0,\\ -1 & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul, la matrice $H(\boldsymbol{u})$ est symétrique, orthogonale et inversible. Calculer son inverse et le vecteur $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$.
2. Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n. On note $\boldsymbol{a}_1$ la première colonne de A et on pose

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 - a_{11}\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{b} = \operatorname{sgn}(a_{21})\|\boldsymbol{a}\|_2\,\boldsymbol{e}_2 \text{ et } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

   a. On suppose que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Montrer que $a_{i1} = 0$ pour tout entier i appartenant à $\{3, \dots, n\}$.
   b. On suppose $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. On pose $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|_2}$ et $B = H(\boldsymbol{u})AH(\boldsymbol{u})$. On veut montrer que $b_{i1} = 0$ pour tout entier i appartenant à $\{3, \dots, n\}$ (on rappelle que la première colonne de B n'est autre que $B\,\boldsymbol{e}_1$).
      i. Montrer que $\boldsymbol{e}_1$ est orthogonal à $\boldsymbol{u}$. En déduire que $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$.
      ii. Montrer que $B\boldsymbol{e}_1 = H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}_1$.
      iii. Calculer $H(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ et $H(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.
      iv. En déduire la valeur de $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}$, puis celle de $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}_1$.
   c. En déduire que, quel que soit le vecteur $\boldsymbol{c}$, il existe une matrice symétrique orthogonale P_1 telle que la matrice $B = P_1AP_1$ soit une matrice symétrique semblable à A et telle que $b_{i1} = 0$ pour tout entier i appartenant à $\{3, \dots, n\}$.
   d. En déduire par récurrence que, pour toute matrice A symétrique d'ordre n, il existe $n-2$ matrices symétriques orthogonales P_1, P_2,..., P_{n-2} telles que la matrice $P_{n-2} \dots P_2P_1AP_1P_2 \dots P_{n-2}$ soit tridiagonale, symétrique et semblable à A.