Contrôle continu du 15 mars 2023

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (une méthode de point fixe, 4 points). On considère la méthode de point fixe définie par la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),$$

avec $g(x) = x + (x-1)^2$, l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée.

1. Déterminer le point fixe ξ de la fonction g et montrer que $|g'(\xi)| = 1$.
2. Soit k un entier naturel. Montrer que, pour tout réel ε dans l'intervalle $]0,1[$, on a

$$x^{(k)} = 1-\varepsilon \implies \frac{\left|x^{(k+1)}-1\right|}{|x^{(k)}-1|} = 1-\varepsilon.$$

3. Montrer que la méthode est convergente si l'initialisation $x^{(0)}$ appartient à l'intervalle $]0,1[$. Que dire de la vitesse de convergence de la méthode dans ce cas ?

Exercice 2 (une variante de la méthode de Newton-Raphson, 6 points). Soit f une fonction de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et ξ un zéro de f. On fait les hypothèses suivantes :

i) $\xi \in I = [x_0-\delta, x_0+\delta]$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$,
ii) $|f(x_0)| \leq \frac{\delta}{2\lambda}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,
iii) $\forall (x,y) \in I^2,\ |f'(x)-f'(y)| \leq \frac{1}{2\lambda}$,
iv) $\forall x \in I,\ |f'(x)| \geq \frac{1}{\lambda}$.

On définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$x^{(0)} = x_0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(y)},$$

où y est un réel arbitrairement choisi dans l'intervalle I.

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a

$$x^{(k+1)} - x_0 = x^{(k)} - x_0 - \frac{f(x^{(k)})-f(x_0)}{f'(y)} - \frac{f(x_0)}{f'(y)}.$$

   En déduire, en raisonnant par récurrence, pour tout entier naturel k, l'itéré $x^{(k)}$ appartient à l'intervalle I.

2. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|x^{(k)}-\xi\right| \leq \frac{\delta}{2^k},$$

   et qu'elle converge vers ξ au moins linéairement.

3. On remplace la relation de récurrence donnée plus haut par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(y^{(k)})},$$

   où $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers ξ au moins linéairement et superlinéairement si $\lim_{k\to+\infty} f'(y^{(k)}) = f'(\xi)$.

Exercice 3 (la méthode d'Anderson–Björck, 2 points). La méthode d'Anderson–Björck est une variante de la méthode de la fausse position. Pour la décrire, on supposons qu'à l'étape $k+1$, avec k un entier naturel non nul, un zéro de la fonction f est encadré par les bornes $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$, dont les valeurs respectivement associées $y^{(k)}$ et $y^{(k-1)}$ sont telles que $y^{(k)}y^{(k-1)} < 0$. On détermine une nouvelle borne $x^{(k+1)}$ de la même façon que dans la méthode de la fausse position, de valeur asssociée $y^{(k+1)} = f(x^{(k+1)})$. Si $x^{(k+1)}$ se trouve du même côté du zéro que $x^{(k)}$, on fait la mise à jour suivante

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} \text{ et } y^{(k)} = \alpha\, y^{(k-1)}, \text{ avec } \alpha = \frac{y^{(k)} - y^{(k+1)}}{y^{(k)}} \text{ si cette quantité est strictement positive ou } \alpha = \frac{1}{2} \text{ sinon,}$$

les deux valeurs restant inchangées sinon. On passe ensuite à l'étape suivante.
Le code Python ci-dessous propose une fonction mettant en œuvre la méthode de la fausse position. Modifier ce code de manière à ce que la fonction mette en œuvre la méthode d'Anderson–Björck. On indiquera, en donnant des explications, quelles sont la (ou les) ligne(s) modifiée(s) ou supprimé(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code.

```
1  def regulafalsi(f,a,b,tol,itermax):
2      ykm1,yk=f(a),f(b)
3      if ykm1*yk>0:
4          raise ValueError('Le signe de la fonction doit différer en chaque borne.')
5      iter=1
6      xkm1,xk=a,b
7      inc=[abs(xk-xkm1)]
8      xkp1=(xk*ykm1-xkm1*yk)/(ykm1-yk)
9      ykp1=f(xkp1)
10     while (abs(ykp1)>=tol and inc[-1]>=tol and iter<=itermax):
11         iter=iter+1
12         if yk*ykp1>0:
13             xk=xkp1
14             yk=ykp1
15         elif yk*ykp1<0:
16             xkm1,xk=xk,xkp1
17             ykm1,yk=yk,ykp1
18         else:
19             return [xkp1,iter,ykp1,inc]
20         inc.append(abs(xk-xkm1))
21         xkp1=(xk*ykm1-xkm1*yk)/(ykm1-yk)
22         ykp1=f(xkp1)
23     if iter>itermax:
24         print('Le nombre maximum d\'itérations a été atteint sans convergence.')
25     return [xkp1,iter,ykp1,inc]
```

Exercice 4 (convergence d'une interpolation de Lagrange, 4 points). Soit α un réel strictement supérieur à 1 et f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \frac{1}{x-\alpha}$. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux nœuds $x_i = -1 + i\,h$, $i = 0,\dots,n$, où $h = \frac{2}{n}$.

1. En utilisant un résultat du cours, montrer que, si $\alpha > 3$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \Pi_n f\|_\infty = 0.$$

On utilise à présent une interpolation de Lagrange *par morceaux* pour approcher f. On considère ainsi une suite de fonctions f_n continues, dont les restrictions aux intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,n-1$, sont polynomiales de degré un et telles que $f_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\dots,n$.

2. L'entier n étant supposé fixé, déterminer, pour tout entier naturel i de $\{0,\dots,n-1\}$, l'expression de la restriction $f_n|_{[x_i,x_{i+1}]}$.
3. L'entier n étant supposé fixé, montrer que, pour tout entier naturel i de $\{0,\dots,n-1\}$, on a
$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}],\ |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2n^2}.$$
4. En déduire la convergence uniforme de cette seconde approximation lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (propriétés des poids des formules de Newton–Cotes, 4 points). Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de démontrer deux propriétés des poids d'une formule de quadrature de Newton-Cotes à $n+1$ nœuds $x_0,\dots,x_n$ équirépartis dans un intervalle $[a,b]$ non vide de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ x_i = x_0 + i\,h,$$

où le choix des réels x_0 et h dépend du type de la formule.

1. Le but de cette question est de prouver que les poids ne dépendent explicitement que de l'entier n et du réel h. Il peuvent ainsi être calculés *a priori*.
   (a) On considère tout d'abord le cas d'une formule *fermée*, c'est-à-dire que l'on a $x_0 = a$ et $h = \frac{b-a}{n}$, l'entier n étant supposé non nul.
      i. Pour tout réel x de $[a, b]$, on pose $x = x_0 + t\,h$. Montrer que le réel t appartient à $[0, n]$ et que
      $$\forall (i,j) \in \{0,\dots,n\}^2,\ i \neq j,\ \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{t-j}{i-j}.$$
      ii. En déduire l'expression suivante pour les poids de quadrature :
      $$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ \alpha_i = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,\mathrm{d}t.$$
   (b) On considère maintenant le cas d'une formule *ouverte* c'est-à-dire que l'on $x_0 = a + h$ et $h = \frac{b-a}{n+2}$. Montrer que
   $$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ \alpha_i = h \int_{-1}^{n+1} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,\mathrm{d}t.$$

2. Le but de cette question est de prouver la propriété de symétrie suivante des poids :
   $$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ \alpha_i = \alpha_{n-i}.$$
   On ne considérera ici que le cas d'une formule *fermée* (mais la propriété reste vraie pour une formule ouverte).
   (a) Montrer que, pour tout réel x de $[a, b]$, on a
   $$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ l_i(x) = l_{n-i}(a+b-x),$$
   où les polynômes l_i, $i = 0,\dots,n$, sont les polynômes de Lagrange associés aux nœuds $x_0,\dots,x_n$.
   (b) Conclure.