Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
Département MIDO

Méthodes numériques
année 2022/2023

Corrigé (succinct) du contrôle continu du 15 mars 2023

Exercice 1 (une méthode de point fixe). On considère la méthode de point fixe définie par la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}),$$

avec $g(x) = x + (x-1)^2$, l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée.

1. Déterminer le point fixe ξ de la fonction g et montrer que $|g'(\xi)| = 1$.

Tout point fixe ξ de la fonction g vérifie $g(\xi) = \xi$, soit encore $(\xi - 1)^2 = 0$. On a donc $\xi = 1$. La fonction g est polynomiale, donc dérivable en tout point et on a $g'(x) = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$, d'où $g'(\xi) = g'(1) = 1$.

2. Soit k un entier naturel. Montrer que, pour tout réel ε dans l'intervalle $]0,1[$, on a

$$x^{(k)} = 1 - \varepsilon \implies \frac{\left|x^{(k+1)} - 1\right|}{|x^{(k)} - 1|} = 1 - \varepsilon.$$

On a, par définition de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$,

$$x^{(k+1)} - 1 = g(x^{(k)}) - 1 = x^{(k)} + (x^{(k)} - 1)^2 - 1.$$

Si de plus $x^{(k)} = 1 - \varepsilon$, on a alors $x^{(k)} - 1 = \varepsilon$ et $x^{(k+1)} - 1 = -\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)$, dont on déduit le résultat.

3. Montrer que la méthode est convergente si l'initialisation $x^{(0)}$ appartient à l'intervalle $]0,1[$. Que dire de la vitesse de convergence de la méthode dans ce cas ?

Le tableau de variations de la fonction g est le suivant.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0		$+$		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par 1 si l'initialisation $x^{(0)}$ appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1[$, elle est donc convergente. Sa limite est nécessairement un point fixe de g, c'est-à-dire $\xi = 1$, et la méthode est convergente.
Si $x^{(0)}$ appartient à $]0, \frac{1}{2}[$, on a $x^{(1)} = g(x^{(0)})$ qui appartient alors à $]\frac{3}{4}, 1[\subset [\frac{1}{2}, 1[$. On se trouve donc dans le cas précédent (mais à partir du rang un) et la suite converge encore vers ξ.
Ayant établi que la méthode est convergente, on a, d'après les précédentes questions,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|x^{(k+1)} - \xi\right|}{|x^{(k)} - \xi|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\left|x^{(k+1)} - 1\right|}{|x^{(k)} - 1|} = \lim_{\varepsilon\to 0} 1 - \varepsilon = 1.$$

La convergence de la méthode de point fixe est donc sous-linéaire.

Exercice 2 (une variante de la méthode de Newton-Raphson). Soit f une fonction de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et ξ un zéro de f. On fait les hypothèses suivantes :

i) $\xi \in I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$,
ii) $|f(x_0)| \leq \frac{\delta}{2\lambda}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,
iii) $\forall (x,y) \in I^2$, $|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{1}{2\lambda}$,
iv) $\forall x \in I$, $|f'(x)| \geq \frac{1}{\lambda}$.

On définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$x^{(0)}=x_0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})}{f'(y)},$$

où y est un réel arbitrairement choisi dans l'intervalle I.

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a

$$x^{(k+1)}-x_0=x^{(k)}-x_0-\frac{f(x^{(k)})-f(x_0)}{f'(y)}-\frac{f(x_0)}{f'(y)}.$$

En déduire, en raisonnant par récurrence, pour tout entier naturel k, l'itéré $x^{(k)}$ appartient à l'intervalle I.

On a

$$\forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})}{f'(y)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})-f(x_0)+f(x_0)}{f'(y)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})-f(x_0)}{f'(y)}-\frac{f(x_0)}{f'(y)},$$

dont on déduit l'égalité. En effectuant un développement de Taylor-Lagrange de $f(x^{(k)})$ en x_0, on trouve qu'il existe un réel $\eta^{(k)}$, strictement compris entre $x^{(k)}$ et x_0, tel que

$$x^{(k+1)}-x_0=x^{(k)}-x_0-\frac{f'(\eta^{(k)})(x^{(k)}-x_0)}{f'(y)}-\frac{f(x_0)}{f'(y)}.$$

Il vient alors, en se servant des hypothèses et de l'inégalité triangulaire,

$$\left|x^{(k+1)}-x_0\right|\leq\left|1-\frac{f'(\eta^{(k)})}{f'(y)}\right|\left|x^{(k)}-x_0\right|+\left|\frac{f(x_0)}{f'(y)}\right|\leq\frac{\lambda}{2\lambda}\left|x^{(k)}-x_0\right|+\frac{\delta\lambda}{2\lambda}=\frac{1}{2}\left|x^{(k)}-x_0\right|+\frac{\delta}{2}\leq\delta.$$

Cette inégalité et le choix fait pour l'initalisation $x^{(0)}$ permettent de montrer, au moyen d'un raisonnement par récurrence, que la suite des itérés est contenue dans l'intervalle I.

2. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite vérifie

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \left|x^{(k)}-\xi\right|\leq\frac{\delta}{2^k},$$

et qu'elle converge vers ξ au moins linéairement.

Pour tout entier naturel k, en effectuant un développement de Taylor-Lagrange de $f(x^{(k)})$ en ξ, on trouve qu'il existe un réel $\zeta^{(k)}$, strictement compris entre $x^{(k)}$ et ξ, tel que

$$x^{(k+1)}-\xi=x^{(k)}-\xi-\frac{f'(\zeta^{(k)})(x^{(k)}-\xi)}{f'(y)},$$

d'où

$$\left|x^{(k+1)}-\xi\right|\leq\left|1-\frac{f'(\zeta^{(k)})}{f'(y)}\right|\left|x^{(k)}-\xi\right|\leq\frac{\lambda}{2\lambda}\left|x^{(k)}-\xi\right|=\frac{1}{2}\left|x^{(k)}-\xi\right|.$$

En raisonnant par récurrence, il vient alors

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \left|x^{(k)}-\xi\right|\leq\frac{1}{2^k}\left|x^{(0)}-\xi\right|\leq\frac{\delta}{2^k}.$$

On en déduit que la suite est convergente, de limite égale à ξ, puisque $\lim_{k\to+\infty}\frac{\delta}{2^k}=0$. Par ailleurs, on a

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\left|x^{(k+1)}-\xi\right|}{\left|x^{(k)}-\xi\right|}=\lim_{k\to+\infty}\left|1-\frac{f'(\zeta^{(k)})}{f'(y)}\right|=\left|1-\frac{f'(\xi)}{f'(y)}\right|\leq\frac{\lambda}{2\lambda}=\frac{1}{2}<1.$$

La convergence est donc au moins linéaire.

3. On remplace la relation de récurrence donnée plus haut par

$$\forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})}{f'(y^{(k)})},$$

où $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers ξ au moins linéairement et superlinéairement si $\lim_{k\to+\infty}f'(y^{(k)})=f'(\xi)$.

Le remplacement du réel y par la suite de réels $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans la relation de récurrence ne modifie rien dans la preuve de convergence précédente. En revanche, on a à présent

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\left|x^{(k+1)}-\xi\right|}{\left|x^{(k)}-\xi\right|}=\lim_{k\to+\infty}\left|1-\frac{f'(\zeta^{(k)})}{f'(y^{(k)})}\right|,$$

et, si $\lim_{k\to+\infty}f'(y^{(k)})=f'(\xi)$, cette limite vaut $\left|1-\frac{f'(\xi)}{f'(\xi)}\right|=0$. La convergence est alors superlinéaire.

Exercice 3 (la méthode d'Anderson–Björck). La méthode d'Anderson–Björck est une variante de la méthode de la fausse position. Pour la décrire, on supposons qu'à l'étape $k+1$, avec k un entier naturel non nul, un zéro de la fonction f est encadré par les bornes $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$, dont les valeurs respectivement associées $y^{(k)}$ et $y^{(k-1)}$ sont telles que $y^{(k)}y^{(k-1)}<0$. On détermine une nouvelle borne $x^{(k+1)}$ de la même façon que dans la méthode de la fausse position, de valeur asssociée $y^{(k+1)}=f(x^{(k+1)})$. Si $x^{(k+1)}$ se trouve du même côté du zéro que $x^{(k)}$, on fait la mise à jour suivante

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}\text{ et }y^{(k)}=\alpha\,y^{(k-1)},\text{ avec }\alpha=\frac{y^{(k)}-y^{(k+1)}}{y^{(k)}}\text{ si cette quantité est strictement positive ou }\alpha=\frac{1}{2}\text{ sinon,}$$

les deux valeurs restant inchangées sinon. On passe ensuite à l'étape suivante.
Le code Python ci-dessous propose une fonction mettant en œuvre la méthode de la fausse position. Modifier ce code de manière à ce que la fonction mette en œuvre la méthode d'Anderson–Björck. On indiquera, en donnant des explications, quelles sont la (ou les) ligne(s) modifiée(s) ou supprimé(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code.

```
1  def regulafalsi(f,a,b,tol,itermax):
2      ykm1,yk=f(a),f(b)
3      if ykm1*yk>0:
4          raise ValueError('Le␣signe␣de␣la␣fonction␣doit␣différer␣en␣chaque␣borne.')
5      iter=1
6      xkm1,xk=a,b
7      inc=[abs(xk-xkm1)]
8      xkp1=(xk*ykm1-xkm1*yk)/(ykm1-yk)
9      ykp1=f(xkp1)
10     while (abs(ykp1)>=tol and inc[-1]>=tol and iter<=itermax):
11         iter=iter+1
12         if yk*ykp1>0:
13             xk=xkp1
14             yk=ykp1
15         elif yk*ykp1<0:
16             xkm1,xk=xk,xkp1
17             ykm1,yk=yk,ykp1
18         else:
19             return [xkp1,iter,ykp1,inc]
20         inc.append(abs(xk-xkm1))
21         xkp1=(xk*ykm1-xkm1*yk)/(ykm1-yk)
22         ykp1=f(xkp1)
23     if iter>itermax:
24         print('Le␣nombre␣maximum␣d\'itérations␣a␣été␣atteint␣sans␣convergence.')
25     return [xkp1,iter,ykp1,inc]
```

On doit seulement modifier le nom de la fonction à la ligne 1 et ajouter la mise à l'échelle de la valeur associée à la borne restée fixe entre les lignes 12 et 13 (ceci correspond aux nouvelles lignes 13 à 16). On obtient la fonction suivante.

```
1  def anderson_bjorck(f,a,b,tol,itermax):
2      ykm1,yk=f(a),f(b)
3      if ykm1*yk>0:
4          raise ValueError('Le␣signe␣de␣la␣fonction␣doit␣différer␣en␣chaque␣borne.')
5      iter=1
6      xkm1,xk=a,b
7      inc=[abs(xk-xkm1)]
8      xkp1=(xk*ykm1-xkm1*yk)/(ykm1-yk)
9      ykp1=f(xkp1)
10     while (abs(ykp1)>=tol and inc[-1]>=tol and iter<=itermax):
11         iter=iter+1
12         if yk*ykp1>0:
```

```
            reduction_factor=(yk-ykp1)/yk
            if reduction_factor<=0.:
                reduction_factor=0.5
            ykm1=reduction_factor*ykm1
            xk=xkp1
            yk=ykp1
        elif yk*ykp1<0:
            xkm1,xk=xk,xkp1
            ykm1,yk=yk,ykp1
        else:
            return [xkp1,iter,ykp1,inc]
        inc.append(abs(xk-xkm1))
        xkp1=(xk*ykm1-xkm1*yk)/(ykm1-yk)
        ykp1=f(xkp1)
    if iter>itermax:
        print('Le␣nombre␣maximum␣d\'itérations␣a␣été␣atteint␣sans␣convergence.')
    return [xkp1,iter,ykp1,inc]
```

Exercice 4 (convergence d'une interpolation de Lagrange). Soit α un réel strictement supérieur à 1 et f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\frac{1}{x-\alpha}$. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux nœuds $x_i=-1+ih$, $i=0,\dots,n$, où $h=\frac{2}{n}$.

1. En utilisant un résultat du cours, montrer que, si $\alpha>3$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-\Pi_n f\|_\infty=0.$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[-1,1]$. On peut donc utiliser l'estimation d'erreur vue en cours :

$$\forall x\in[-1,1],\ |f(x)-\Pi_n f(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right|}{(n+1)!}\,|\omega_{n+1}(x)|,$$

où ω_{n+1} est le polynôme de Newton associé aux nœuds d'interpolation, $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i)$, et le réel ξ_x appartient à l'intervalle $]-1,1[$ et dépend de x. On a $f^{(n+1)}(\xi_x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(\xi_x-\alpha)^{n+2}}$ et, en observant que $2<|\xi_x-\alpha|<4$, on trouve

$$\forall x\in[-1,1],\ |f(x)-\Pi_n f(x)|<\frac{1}{2}\frac{1}{|\xi_x-\alpha|^{n+1}}\left|\prod_{i=0}^n(x-x_i)\right|<\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha-\xi_x}\right)^{n+1}.$$

On conclut en utilisant que $\frac{2}{\alpha-\xi_x}<\frac{2}{2}=1$ pour passer à la limite.

On utilise à présent une interpolation de Lagrange *par morceaux* pour approcher f. On considère ainsi une suite de fonctions f_n continues, dont les restrictions aux intervalles $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$, sont polynomiales de degré un et telles que $f_n(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$.

2. L'entier n étant supposé fixé, déterminer, pour tout entier naturel i de $\{0,\dots,n-1\}$, l'expression de la restriction $f_{n|_{[x_i,x_{i+1}]}}$.

On fixe un entier i de $\{0,\dots,n-1\}$. Compte tenu de la définition de f_n, la restriction de f_n à l'intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ coïncide avec le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un de f associé aux nœuds x_i et x_{i+1}. On ainsi

$$\forall x\in[x_i,x_{i+1}],\ f_{n|_{[x_i,x_{i+1}]}}(x)=f(x_i)\,\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\,\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{1}{x_i-\alpha}-\frac{x-x_i}{(x_{i+1}-\alpha)(x_i-\alpha)}.$$

3. L'entier n étant supposé fixé, montrer que, pour tout entier naturel i de $\{0,\dots,n-1\}$, on a

$$\forall x\in[x_i,x_{i+1}],\ |f(x)-f_n(x)|\leq\frac{\|f''\|_\infty}{2n^2}.$$

On utilise la question précédente pour appliquer l'estimation d'erreur vue en cours sur chaque sous-intervalle $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$. On a

$$\forall i\in\{0,\dots,n-1\},\ \forall x\in[x_i,x_{i+1}],\ |f(x)-f_n(x)|=\frac{|f''(\xi_i)|}{2}\,|(x-x_i)(x-x_{i+1})|\leq\frac{\|f''\|_\infty}{2}\,\frac{1}{4}\left(\frac{2}{n}\right)^2=\frac{\|f''\|_\infty}{2n^2},$$

avec ξ_i un réel appartenant à $]x_i,x_{i+1}[$ dépendant de x.

4. En déduire la convergence uniforme de cette seconde approximation lorsque n tend vers $+\infty$.

Il découle de la dernière inégalité que

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{\|f''\|_\infty}{2n^2} \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{8n^2}=0.$$

Exercice 5 (propriétés des poids des formules de Newton–Cotes). Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de démontrer deux propriétés des poids d'une formule de quadrature de Newton-Cotes à $n+1$ nœuds $x_0,\dots,x_n$ équirépartis dans un intervalle $[a,b]$ non vide de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\forall i\in\{0,\dots,n\},\ x_i=x_0+i\,h,$$

où le choix des réels x_0 et h dépend du type de la formule.

1. Le but de cette question est de prouver que les poids ne dépendent explicitement que de l'entier n et du réel h. Il peuvent ainsi être calculés *a priori*.
   (a) On considère tout d'abord le cas d'une formule *fermée*, c'est-à-dire que l'on a $x_0=a$ et $h=\frac{b-a}{n}$, l'entier n étant supposé non nul.
      i. Pour tout réel x de $[a,b]$, on pose $x=x_0+t\,h$. Montrer que le réel t appartient à $[0,n]$ et que

$$\forall (i,j)\in\{0,\dots,n\}^2,\ i\neq j,\ \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{t-j}{i-j}.$$

On a

$$a\leq x=x_0+t\,h=a+t\,\frac{b-a}{n}\leq b \iff 0\leq\frac{t}{n}\leq 1 \iff 0\leq t\leq n,$$

le réel t appartient donc à l'intervalle $[0,n]$. Il vient par ailleurs

$$\forall x\in[a,b],\ \forall (i,j)\in\{0,\dots,n\}^2,\ i\neq j,\ \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{x_0+t\,h-(x_0+j\,h)}{x_0+i\,h-(x_0+j\,h)}=\frac{(t-j)h}{(i-j)h}=\frac{t-j}{i-j}.$$

      ii. En déduire l'expression suivante pour les poids de quadrature :

$$\forall i\in\{0,\dots,n\},\ \alpha_i=h\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n\frac{t-j}{i-j}\,\mathrm{d}t.$$

Par définition, les poids de quadrature d'une formule de Newton–Cotes sont donnés par

$$\forall i\in\{0,\dots,n\},\ \alpha_i=\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x,$$

avec $\{l_i\}_{i=0,\dots,n}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux nœuds $x_0,\dots,x_n$. En utilisant l'expression des polynômes de Lagrange, le résultat de la question précédente et un changement de variable dans l'intégrale, on trouve

$$\forall i\in\{0,\dots,n\},\ \alpha_i=\int_a^b\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,\mathrm{d}x=\int_0^n\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n\frac{t-j}{i-j}\right)h\,\mathrm{d}t.$$

   (b) On considère maintenant le cas d'une formule *ouverte* c'est-à-dire que l'on $x_0=a+h$ et $h=\frac{b-a}{n+2}$. Montrer que

$$\forall i\in\{0,\dots,n\},\ \alpha_i=h\int_{-1}^{n+1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n\frac{t-j}{i-j}\,\mathrm{d}t.$$

On procède comme dans la question précédente. On a

$$a \leq x = x_0 + t\,h = a + (t+1)\,\frac{b-a}{n+2} \leq b \iff 0 \leq \frac{t+1}{n+2} \leq 1 \iff -1 \leq t \leq n+1,$$

et le réel t appartient cette fois à l'intervalle $[-1, n+1]$, d'où

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ \alpha_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j} \right) h\,\mathrm{d}t.$$

2. Le but de cette question est de prouver la propriété de symétrie suivante des poids :

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ \alpha_i = \alpha_{n-i}.$$

On ne considérera ici que le cas d'une formule *fermée* (mais la propriété reste vraie pour une formule ouverte).

(a) Montrer que, pour tout réel x de $[a,b]$, on a

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ l_i(x) = l_{n-i}(a+b-x),$$

où les polynômes l_i, $i = 0,\dots,n$, sont les polynômes de Lagrange associés aux nœuds $x_0,\dots,x_n$.

Puisqu'on considère le cas d'une formule fermée, on a $x_0 = a$ et $x_n = b$, d'où

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ l_{n-i}(a+b-x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq n-i}}^{n} \frac{a+b-x-x_j}{x_{n-i}-x_j} = \prod_{\substack{j=0\\j\neq n-i}}^{n} \frac{x_0+x_n-x-x_j}{x_{n-i}-x_j} = \prod_{\substack{j=0\\j\neq n-i}}^{n} \frac{n-t-j}{(n-i)-j} = \prod_{\substack{j=0\\j\neq n-i}}^{n} \frac{t-(n-j)}{i-(n-j)}.$$

En faisant le changement de variable $k = n-j$, on obtient alors

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ l_{n-i}(a+b-x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq n-(n-i)}}^{n} \frac{t-k}{i-k} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} = l_i(x).$$

(b) Conclure.

Par définition des poids de quadrature d'une formule de Newton–Cotes, on a, en utilisant un changement de variable dans l'intégrale et la précédente question,

$$\forall i \in \{0,\dots,n\},\ \alpha_{n-i} = \int_a^b l_{n-i}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a l_{n-i}(a+b-y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b l_i(y)\,\mathrm{d}y = \alpha_i.$$