Contrôle continu du 21 mars 2024

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (factorisation LDM$^{\mathrm{T}}$, 3 points). La factorisation LDM$^{\mathrm{T}}$ d'une matrice carrée A consiste en son écriture sous la forme d'un produit $A = LDM^{\top}$, dans lequel L et M sont des matrices triangulaires inférieures dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et D est une matrice diagonale. Dans tout l'exercice, on suppose que A est une matrice réelle carrée d'ordre n, avec n un entier naturel non nul.

1. Si A est inversible et admet une factorisation LDM$^{\mathrm{T}}$ qui est connue, expliquer comment résoudre un système linéaire associé à A et donner le coût (en termes d'opérations arithmétiques [1]) de cette résolution.
2. On suppose dans cette question que tous les mineurs principaux
$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \det(A_k) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$
de A sont non nuls. Montrer que A admet une unique factorisation LDM$^{\mathrm{T}}$. Quel est le coût de cette factorisation ?
3. On suppose dans cette question que la matrice A est symétrique définie positive. Montrer que A admet une unique factorisation LDM$^{\mathrm{T}}$ dans laquelle $L = M$.

Exercice 2 (facteur d'amplification de l'élimination de Gauss, 3 points). Soit n un entier naturel non nul et A la matrice d'ordre n dont les coefficients sont donnés par
$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i > j, \\ 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que la matrice A admet une unique factorisation LU et déterminer les coefficients diagonaux de la matrice U. En déduire que $\det(A) = 2^{n-1}$.
2. Calculer le facteur d'amplification de l'élimination de Gauss associé à la matrice A, défini par $R = \frac{\max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |u_{ij}|}{\max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |a_{ij}|}$.
3. Quelle serait la valeur de R si une stratégie de pivot partiel était utilisée lors de la factorisation de A ?

Exercice 3 (méthodes de point fixe, 4 points). On cherche à approcher l'unique solution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ contenue dans l'intervalle $[1,2]$ par la méthode des approximations successives. On considère pour cela deux choix possibles pour la fonction de point fixe g.

1. Expliquer pourquoi le choix $g(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 1)$ n'est pas judicieux.
2. Que dire du choix $g(x) = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$?

On fournit les données numériques suivantes : $4^{\frac{1}{3}} \approx 1,5874$, $7^{\frac{1}{3}} \approx 1,9129$ et $16^{-\frac{1}{3}} \approx 0,39685$.

Exercice 4 (analyse de convergence de la méthode de la sécante, 10 points). Le but de cet exercice est de prouver le résultat de convergence locale superlinaire relatif à la méthode de la sécante donné en cours. On rappelle que cette méthode d'approximation d'un zéro d'une fonction réelle f d'une variable réelle est définie par la relation de récurrence
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}),$$

---

1. Les opérations arithmétiques seront comptabilisées de la même façon quelle que soit leur nature.

les initialisations $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ étant données et distinctes. On rappelle également que la fonction f est supposée être de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que le réel ξ est un zéro simple de f, c'est-à-dire que $f(\xi)=0$ et $f'(\xi)\neq 0$.

1. On va tout d'abord montrer la convergence locale de la méthode.
   (a) Montrer qu'il existe un réel δ strictement positif tel que, si les itérés $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$ appartiennent à $[\xi-\delta,\xi+\delta]\setminus\{\xi\}$ et sont distincts, l'itéré $x^{(k+1)}$ est bien défini et distinct de $x^{(k)}$. Dans la suite, on notera I_δ l'intervalle $[\xi-\delta,\xi+\delta]$.
   (b) Montrer ensuite qu'on a
$$x^{(k+1)}-\xi=\left(1-\frac{f(x^{(k)})-f(\xi)}{x^{(k)}-\xi}\,\frac{x^{(k)}-x^{(k-1)}}{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}\right)(x^{(k)}-\xi),$$
   puis qu'il existe des réels $\zeta^{(k)}$ et $\eta^{(k)}$ appartenant à l'intervalle I_δ tels que
$$x^{(k+1)}-\xi=\left(1-\frac{f'(\zeta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}\right)(x^{(k)}-\xi).$$
   (c) Montrer alors que, quitte à éventuellement réduire δ, on a
$$\left|x^{(k+1)}-\xi\right|\leq\frac{1}{2}\left|x^{(k)}-\xi\right|$$
   si les itérés $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$ appartiennent à $I_\delta\setminus\{\xi\}$.
   (d) En raisonnant par récurrence, montrer enfin que la méthode de la sécante est convergente si les initialisations $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ appartiennent à l'intervalle I_δ.

2. On va à présent montrer que l'ordre de convergence de la méthode est au moins égal au nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour cela, on utilise une égalité suivante, démontrée pour la méthode de la fausse position et valable (à des changements de notation près) pour la méthode de la sécante, **sous les hypothèses établies dans la question précédente** :
$$\forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)}-\xi=\frac{1}{2}\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}(x^{(k)}-\xi)(x^{(k-1)}-\xi),$$
   où $\theta^{(k)}$ et $\eta^{(k)}$ sont des réels strictement compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$.
   (a) Montrer que
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}=\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$
   et en déduire que la suite de terme général $\left|\frac{1}{2}\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}\right|$ est bornée. On note M un majorant de cette suite.

   On pose $E^{(-1)}=M\left|x^{(-1)}-\xi\right|$, $E^{(0)}=M\left|x^{(0)}-\xi\right|$ et, pour tout entier naturel k, $E^{(k+1)}=E^{(k)}E^{(k-1)}$.
   (b) Établir que, pour tout entier naturel k, $M\left|x^{(k)}-\xi\right|\leq E^{(k)}$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel positif δ', strictement inférieur à δ, tel que, si les initialisations $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ appartiennent à l'intervalle $I_{\delta'}$, la suite $(E^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.
   (d) Donner une relation de récurrence à trois termes satisfaite par la suite $(\ln(E^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la forme générale des termes de cette suite est
$$\forall k\in\mathbb{N}\cup\{-1\},\ \ln(E^{(k)})=\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1},$$
   où α et β sont des constantes dépendant de $E^{(-1)}$ et $E^{(0)}$.
   (e) En déduire qu'il existe des réels A et B strictement positifs, avec $B<1$, tels que
$$\forall k\in\mathbb{N},\ E^{(k)}\leq AB^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}.$$
   (f) En conclure que l'ordre de convergence de la méthode de la sécante est au moins égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On pourra pour cela faire appel à la définition « étendue » donnée en cours.

   On fournit la donnée numérique suivante : $\sqrt{5}\approx 2,236$.

Exercice 5 (procédé de Gram–Schmidt modifié, 2 points). Lorsque les calculs sont effectués en virgule flottante, le procédé de Gram–Schmidt, utilisé pour orthonormaliser une famille libre de vecteurs $\{\boldsymbol{u_i}\}_{i=1,\dots,m}$ par rapport à un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (de norme associée notée $\|\cdot\|$), présente des problèmes de stabilité numérique pouvant conduire à des défauts d'orthogonalité de la famille de vecteurs produite$\{\boldsymbol{q_i}\}_{i=1,\dots,m}$. Pour y pallier, on utilise la version modifiée suivante de son algorithme :

$$\boldsymbol{q_1}=\frac{\boldsymbol{u_1}}{\|\boldsymbol{u_1}\|},\ \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k+1}}^{(0)}=\boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k+1}}^{(i)}=\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k+1}}^{(i-1)}-\left\langle\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k+1}}^{(i-1)},\boldsymbol{q_i}\right\rangle\boldsymbol{q_i},\ i=1,\dots,k,\ \boldsymbol{q}_{k+1}=\frac{\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k+1}}^{(k)}}{\|\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k+1}}^{(k)}\|},\ k=1,\dots,m-1.$$

Le code Python ci-dessous propose une fonction mettant en œuvre la forme classique du procédé de Gram–Schmidt pour le produit scalaire euclidien, avec pour argument d'entrée un tableau dont les colonnes les m vecteurs de la famille libre et pour argument de sortie un tableau dont les colonnes sont les m vecteurs de la famille orthonormale. Modifier ce code de manière à ce que la fonction mette en œuvre la version modifiée du procédé. On indiquera, en donnant des explications, quelles sont la (ou les) ligne(s) modifiée(s) ou supprimé(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code.

```
 1 def gramschmidt(A):
 2     n,m=A.shape
 3     Q=np.zeros((n,m))
 4     for k in range(m):
 5         Q[:,k]=A[:,k]
 6         for i in range(k):
 7             Q[:,k]=Q[:,k]-np.dot(Q[:,i],A[:,k])*Q[:,i]
 8         norme=np.linalg.norm(Q[:,k],2)
 9         if norme<1e-14:
10             raise ValueError('La␣famille␣n\'est␣apparemment␣pas␣libre.')
11         else:
12             Q[:,k]=Q[:,k]/norme
13     return Q
```