Corrigé (succinct) du contrôle continu du 21 mars 2024

Exercice 1 (factorisation LDM$^\mathrm{T}$). La factorisation LDM$^\mathrm{T}$ d'une matrice carrée A consiste en son écriture sous la forme d'un produit $A = LDM^\top$, dans lequel L et M sont des matrices triangulaires inférieures dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et D est une matrice diagonale. Dans tout l'exercice, on suppose que A est une matrice réelle carrée d'ordre n, avec n un entier naturel non nul.

1. Si A est inversible et admet une factorisation LDM$^\mathrm{T}$ qui est connue, expliquer comment résoudre un système linéaire associé à A et donner le coût (en termes d'opérations arithmétiques [1]) de cette résolution.

Pour résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ connaissant la factorisation LDM$^\mathrm{T}$ de A, il faut tout d'abord résoudre le système linéaire triangulaire inférieur $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, puis le système linéaire diagonal $D\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ et enfin le système linéaire triangulaire supérieur $M^\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$. La résolution de chaque système triangulaire nécessite *a priori* $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ multiplications et $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ soustractions, celle du système linéaire diagonal n divisions, soit $n(2n-1)$ opérations arithmétiques au total.

2. On suppose dans cette question que tous les mineurs principaux

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \det(A_k) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

de A sont non nuls. Montrer que A admet une unique factorisation LDM$^\mathrm{T}$. Quel est le coût de cette factorisation ?

Sous cette hypothèse et d'après un résultat du cours, la matrice A admet une unique factorisation LU, les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire supérieure U étant non nuls. Soit D la matrice diagonale d'ordre n ayant pour coefficients diagonaux ceux de U. Cette matrice est inversible et l'on a : $A = LU = LDD^{-1}U$. La matrice produit $D^{-1}U$ est par construction triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux égaux à 1. Il suffit alors de poser $M^\top = D^{-1}U$, soit encore $M = U^\top D^{-1}$. L'unicité de cette factorisation découle de celle de la factorisation LU et son coût est égal (à $\frac{1}{2}n(n-1)$ divisions près) à celui de la factorisation LU, soit de l'ordre de $\frac{2}{3}n^3$ opérations arithmétiques.

3. On suppose dans cette question que la matrice A est symétrique définie positive. Montrer que A admet une unique factorisation LDM$^\mathrm{T}$ dans laquelle $L = M$.

La matrice A étant supposée réelle symétrique définie positive, le critère de Sylvester implique que tous ses mineurs principaux sont strictement positifs et A admet donc une unique factorisation LDM$^\mathrm{T}$ en utilisant la réponse à la question précédente. En utilisant la symétrie de A, il vient $LDM^\top = A = A^\top = MD^\top L^\top = MDL^\top$, d'où $M^{-1}L = (LM^{-1})^\top = I_n$ et donc $L = M$.

Exercice 2 (facteur d'amplification de l'élimination de Gauss). Soit n un entier naturel non nul et A la matrice d'ordre n dont les coefficients sont donnés par

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i > j, \\ 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que la matrice A admet une unique factorisation LU et déterminer les coefficients diagonaux de la matrice U. En déduire que $\det(A) = 2^{n-1}$.

Déterminons la suite de matrices $A^{(k)}$, $k = 0,\dots,n-1$ produite par le procédé d'élimination de Gauss sans échange. On a $A^{(0)} = A$. La matrice $A^{(1)}$ est alors obtenue en ajoutant la première ligne de $A^{(0)}$ à chacune des suivantes et l'on a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Les opérations arithmétiques seront comptabilisées de la même façon quelle que soit leur nature.

On observe que le bloc d'ordre $n-1$ extrait de $A^{(1)}$ en considérant les $n-1$ dernières lignes et les $n-1$ dernières colonnes possède la même structure que A, à l'exception de la dernière colonne dans laquelle la valeur des coefficients a doublé. Ceci amène à poser l'hypothèse de récurrence suivante : les coefficients de la matrice $A^{(k)}$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} -1 & \text{si } i > j \text{ et } k+1 \leq j \leq n-1, \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } 1 \leq i \leq n-1, \\ 2^{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq k \text{ et } j = n, \\ 2^k & \text{si } k+1 \leq i \leq n \text{ et } j = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'initialisation du raisonnement par récurrence ayant été faite, il reste à démontrer l'hérédité. Pour un entier naturel k inférieur ou égal à $n-2$, on considère la matrice $A^{(k)}$ dans laquelle on doit éliminer les coefficients sous-diagonaux de la $k+1$e colonne. Pour cela, on ajoute la $k+1$e ligne à chacune des suivantes pour arriver à la matrice $A^{(k+1)}$. Dans cette dernière, les autres coefficients demeurent inchangés, sauf dans la dernière colonne, où ils sont inchangés jusqu'à la $k+1$e ligne, mais égaux à $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ pour les lignes restantes.
Il découle de ce raisonnement que

$$U = A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

et le déterminant de A vaut alors $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 1 \times \dots 1 \times 2^{n-1}$.

2. Calculer le facteur d'amplification de l'élimination de Gauss associé à la matrice A, défini par $R = \frac{\max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |u_{ij}|}{\max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |a_{ij}|}$.

Il est clair que $\max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |a_{ij}| = 1$ et que $\max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |u_{ij}| = 2^{n-1}$, d'où $R = 2^{n-1}$.

3. Quelle serait la valeur de R si une stratégie de pivot partiel était utilisée lors de la factorisation de A ?

Les coefficients de la $k+1$e à la dernière ligne de la $k+1$e colonne de chaque matrice $A^{(k)}$ valent 1 ou -1, ils sont donc égaux à 1 en valeur absolue. L'application d'une stratégie de pivot partiel de ne changerait donc rien dans l'élimination et la valeur du facteur d'amplification serait encore 2^{n-1}.

Exercice 3 (méthodes de point fixe). On cherche à approcher l'unique solution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ contenue dans l'intervalle $[1,2]$ par la méthode des approximations successives. On considère pour cela deux choix possibles pour la fonction de point fixe g.

1. Expliquer pourquoi le choix $g(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 1)$ n'est pas judicieux.

La fonction g est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1,2]$. Elle est donc continue sur cet intervalle et l'on a par ailleurs $g(2) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3} > 2$, ce qui implique que l'intervalle $[1,2]$ n'est pas stable par g. De plus, la dérivée de g est $g'(x) = x^2$, d'où $\max\limits_{x\in[1,2]} |g'(x)| = 4 > 1$. La fonction g ne définit clairement pas une contraction et le théorème de point fixe ne peut donc s'appliquer.

2. Que dire du choix $g(x) = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$?

L'application $x \mapsto 3x+1$ est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$, et strictement positive sur l'intervalle $[1,2]$. La fonction g est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1,2]$, de dérivée égale à $g'(x) = (3x+1)^{-\frac{2}{3}}$. On en déduit que g est strictement croissante sur l'intervalle et que $[g(1), g(2)] = [4^{\frac{1}{3}}, 7^{\frac{1}{3}}] \subset [1,2]$, d'après les données numériques de l'énoncé. On a enfin

$$1 \leq x \leq 2 \iff 4 \leq 3x+1 \leq 7 \iff \frac{1}{7^{\frac{2}{3}}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}},$$

la fonction $|g'|$ est donc strictement majorée par 1 sur $[1,2]$. La fonction g est donc une contraction sur l'intervalle $[1,2]$ et le théorème de point fixe vu en cours garantit que la méthode des approximations successives associée converge vers l'unique point fixe de g dans l'intervalle, pour tout choix d'initialisation choisie dans l'intervalle.

On fournit les données numériques suivantes : $4^{\frac{1}{3}} \approx 1,5874$, $7^{\frac{1}{3}} \approx 1,9129$ et $16^{-\frac{1}{3}} \approx 0,39685$.

Exercice 4 (analyse de convergence de la méthode de la sécante). Le but de cet exercice est de prouver le résultat de convergence locale superlinaire relatif à la méthode de la sécante donné en cours. On rappelle que cette méthode d'approximation d'un zéro d'une fonction réelle f d'une variable réelle est définie par la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}),$$

les initialisations $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ étant données et distinctes. On rappelle également que la fonction f est supposée être de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que le réel ξ est un zéro simple de f, c'est-à-dire que $f(\xi)=0$ et $f'(\xi)\neq 0$.

1. On va tout d'abord montrer la convergence locale de la méthode.

   (a) Montrer qu'il existe un réel δ strictement positif tel que, si les itérés $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$ appartiennent à $[\xi-\delta,\xi+\delta]\setminus\{\xi\}$ et sont distincts, l'itéré $x^{(k+1)}$ est bien défini et distinct de $x^{(k)}$. Dans la suite, on notera I_δ l'intervalle $[\xi-\delta,\xi+\delta]$.

   La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$, les fonctions f et f' sont continues et, puisque $f'(\xi)\neq 0$, il existe un voisinage de ξ sur lequel la fonction f' ne s'annule pas et sur lequel f est donc strictement monotone. En choisissant le réel δ de manière à ce que l'intervalle $[\xi-\delta,\xi+\delta]$ soit contenu dans ce voisinage, on en déduit, par injectivité de f, que pour tous réels $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$ distincts dans l'intervalle $[\xi-\delta,\xi+\delta]$, on a $f(x^{(k-1)})\neq f(x^{(k)})$ et l'itéré $x^{(k+1)}$ est donc bien défini. Par le même argument, on a aussi que $f(x^{(k)})\neq 0$ si $x^{(k)}\neq\xi$, et donc $x^{(k+1)}\neq x^{(k)}$.

   (b) Montrer ensuite qu'on a

   $$x^{(k+1)}-\xi=\left(1-\frac{f(x^{(k)})-f(\xi)}{x^{(k)}-\xi}\,\frac{x^{(k)}-x^{(k-1)}}{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}\right)(x^{(k)}-\xi),$$

   puis qu'il existe des réels $\zeta^{(k)}$ et $\eta^{(k)}$ appartenant à l'intervalle I_δ tels que

   $$x^{(k+1)}-\xi=\left(1-\frac{f'(\zeta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}\right)(x^{(k)}-\xi).$$

   On obtient l'égalité en soustrayant le réel ξ dans chaque membre de l'égalité définissant l'itéré $x^{(k+1)}$, en utilisant que $f(\xi)=0$ et en factorisant $x^{(k)}-\xi$ dans le membre de droite. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I_δ, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\zeta^{(k)}$, strictement compris entre $x^{(k)}$ et ξ, tel que $\frac{f(x^{(k)})-f(\xi)}{x^{(k)}-\xi}=f'(\zeta^{(k)})$ et d'un réel $\eta^{(k)}$, strictement compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$, tel que $\frac{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}{x^{(k)}-x^{(k-1)}}=f'(\eta^{(k)})$.

   (c) Montrer alors que, quitte à éventuellement réduire δ, on a

   $$\left|x^{(k+1)}-\xi\right|\leq\frac{1}{2}\left|x^{(k)}-\xi\right|$$

   si les itérés $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$ appartiennent à $I_\delta\setminus\{\xi\}$.

   En observant que l'on a $1-\frac{f'(\xi)}{f'(\xi)}=0$, il découle de la continuité de f' qu'il existe un voisinage de ξ tel que, pour tous réels x et y appartenant à ce voisinage, $\left|1-\frac{f'(x)}{f'(y)}\right|\leq\frac{1}{2}$. Quitte à réduire δ pour que l'intervalle I_δ soit contenu dans ce voisinage, on obtient que $\left|1-\frac{f'(\zeta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}\right|\leq\frac{1}{2}$ et l'estimation attendue se déduit alors de la précédente égalité. On en déduit que l'itéré $x^{(k+1)}$ appartient à I_δ.

   (d) En raisonnant par récurrence, montrer enfin que la méthode de la sécante est convergente si les initialisations $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ appartiennent à l'intervalle I_δ.

   Les questions (a) à (c) sont les étapes de la preuve de l'hérédité dans un raisonnment par récurrence pour montrer que, si les initialisations $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ appartiennent à I_δ, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie, contenue dans I_δ et telle que

   $$\forall k\in\mathbb{N},\ \left|x^{(k)}-\xi\right|\leq\frac{1}{2^k}\left|x^{(0)}-\xi\right|,$$

   ce qui implique la convergence de la méthode.

2. On va à présent montrer que l'ordre de convergence de la méthode est au moins égal au nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour cela, on utilise une égalité suivante, démontrée pour la méthode de la fausse position et valable (à des changements de notation près) pour la méthode de la sécante, **sous les hypothèses établies dans la question précédente** :

   $$\forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)}-\xi=\frac{1}{2}\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}(x^{(k)}-\xi)(x^{(k-1)}-\xi),$$

   où $\theta^{(k)}$ et $\eta^{(k)}$ sont des réels strictement compris entre $x^{(k-1)}$ et $x^{(k)}$.

   (a) Montrer que

   $$\lim_{k\to+\infty}\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}=\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

   et en déduire que la suite de terme général $\left|\frac{1}{2}\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}\right|$ est bornée. On note M un majorant de cette suite.

La suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ étant convergente de limite ξ, les suites $(\theta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\eta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sont également convergentes et ont pour limite ξ en vertu du théorème des gendarmes. On obtient alors la limite par continuité de f' et f''. Cette limite est finie puisque $f'(\xi)$ est supposée non nulle et l'on en déduit par conséquent que la suite considérée est bornée.

On pose $E^{(-1)} = M\left|x^{(-1)} - \xi\right|$, $E^{(0)} = M\left|x^{(0)} - \xi\right|$ et, pour tout entier naturel k, $E^{(k+1)} = E^{(k)}E^{(k-1)}$.

(b) Établir que, pour tout entier naturel k, $M\left|x^{(k)} - \xi\right| \leq E^{(k)}$.

L'inégalité est vérifiée aux rangs -1 et 0 en vertu des égalités définissant $E^{(-1)}$ et $E^{(0)}$. Supposons la vérifiée jusqu'au rang k, l'entier k appartenant à $\mathbb{N}$. D'après la précédent question, on a

$$\left|x^{(k+1)} - \xi\right| \leq M\left|x^{(k)} - \xi\right|\left|x^{(k-1)} - \xi\right|,$$

et, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$E^{(k+1)} = E^{(k)}E^{(k-1)} \geq M\left|x^{(k)} - \xi\right| M\left|x^{(k-1)} - \xi\right| \geq M\left|x^{(k+1)} - \xi\right|.$$

(c) Montrer qu'il existe un réel positif δ', strictement inférieur à δ, tel que, si les initialisations $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ appartiennent à l'intervalle $I_{\delta'}$, la suite $(E^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.

Soir δ' un réel strictement positif tel que $\delta' < \delta$ et $\delta' M < 1$. On a d'une part que $I_{\delta'} \subset I_\delta$ et d'autre part que $E^{(-1)} < 1$ et $E^{(0)} < 1$ si $x^{(-1)}$ et $x^{(0)}$ appartiennent à $I_{\delta'}$. En raisonnant par récurrence, on montre alors facilement que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E^{(k+1)} = E^{(k)}E^{(k-1)} < E^{(k)}$$

et la suite est donc strictement décroissante. Elle est de plus minorée par 0, donc convergente. Sa limite ℓ est telle que $\ell < 1$ et $\ell = \ell^2$, d'où $\ell = 0$.

(d) Donner une relation de récurrence à trois termes satisfaite par la suite $(\ln(E^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la forme générale des termes de cette suite est

$$\forall k \in \mathbb{N}\cup\{-1\},\ \ln(E^{(k)}) = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1},$$

où α et β sont des constantes dépendant de $E^{(-1)}$ et $E^{(0)}$.

Par la définition de la suite, on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ln(E^{(k+1)}) = \ln(E^{(k)}E^{(k-1)}) = \ln(E^{(k)}) + \ln(E^{(k-1)}).$$

L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence à trois termes est $x^2 - x - 1 = 0$, qui a pour solutions $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. On en déduit la forme générale annoncée des termes de la suite, les constantes α et β étant solutions du système linéaire constitué des équations $\alpha + \beta = \ln(E^{(-1)})$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta = \ln(E^{(0)})$.

(e) En déduire qu'il existe des réels A et B strictement positifs, avec $B < 1$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E^{(k)} \leq AB^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}.$$

On observe tout d'abord que $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, d'où

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \leq |\alpha|.$$

Ceci implique que

$$\forall k \in \mathbb{N}\cup\{-1\},\ \ln(E^{(k)}) \leq |\alpha| + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1},$$

et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}\cup\{-1\},\ E^{(k)} \leq e^{|\alpha|}e^{\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}.$$

Il suffit poser $A = e^{|\alpha|}$ et $B = e^{\beta}$. On a montré dans la question (c) que $E^{(k)} < 1$ pour tout entier k appartenant à $\mathbb{N}\cup\{-1\}$ donc $\ln(E^{(k)}) < 0$. Ceci entraîne que $\beta < 0$ et donc $B = e^{\beta} < 1$.

(f) En conclure que l'ordre de convergence de la méthode de la sécante est au moins égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On pourra pour cela faire appel à la définition « étendue » donnée en cours.

Par l'intermédiaire de la suite $(E^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, on a majoré la suite des erreurs absolues par la suite $(\varepsilon^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ayant pour terme général $\varepsilon^{(k)} = \frac{A}{M}B^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}$. Puisque $0 < B < 1$, cette dernière suite est convergente, de limite nulle, et l'on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\left(\varepsilon^{(k)}\right)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{A}{M}B^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}}{\left(\frac{A}{M}B^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}\right)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \left(\frac{M}{A}\right)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

On en déduit que la méthode est convergente avec un ordre au moins égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On fournit la donnée numérique suivante : $\sqrt{5} \approx 2,236$.

Exercice 5 (procédé de Gram–Schmidt modifié). Lorsque les calculs sont effectués en virgule flottante, le procédé de Gram–Schmidt, utilisé pour orthonormaliser une famille libre de vecteurs $\{\boldsymbol{u_i}\}_{i=1,\dots,m}$ par rapport à un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (de norme associée notée $\|\cdot\|$), présente des problèmes de stabilité numérique pouvant conduire à des défauts d'orthogonalité de la famille de vecteurs produite$\{\boldsymbol{q_i}\}_{i=1,\dots,m}$. Pour y pallier, on utilise la version modifiée suivante de son algorithme :

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|},\ \boldsymbol{q}_{k+1}^{(0)} = \boldsymbol{u}_{k+1},\ \boldsymbol{q}_{k+1}^{(i)} = \boldsymbol{q}_{k+1}^{(i-1)} - \left\langle \boldsymbol{q}_{k+1}^{(i-1)}, \boldsymbol{q}_i \right\rangle \boldsymbol{q}_i,\ i = 1,\dots,k,\ \boldsymbol{q}_{k+1} = \frac{\boldsymbol{q}_{k+1}^{(k)}}{\|\boldsymbol{q}_{k+1}^{(k)}\|},\ k = 1,\dots,m-1.$$

Le code Python ci-dessous propose une fonction mettant en œuvre la forme classique du procédé de Gram–Schmidt pour le produit scalaire euclidien, avec pour argument d'entrée un tableau dont les colonnes les m vecteurs de la famille libre et pour argument de sortie un tableau dont les colonnes sont les m vecteurs de la famille orthonormale. Modifier ce code de manière à ce que la fonction mette en œuvre la version modifiée du procédé. On indiquera, en donnant des explications, quelles sont la (ou les) ligne(s) modifiée(s) ou supprimé(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code.

```
1  def gramschmidt(A):
2      m=A.shape[1]
3      Q=A.copy()
4      for k in range(m):
5          for i in range(k):
6              Q[:,k]=Q[:,k]-np.dot(A[:,k],Q[:,i])*Q[:,i]
7          norme=np.linalg.norm(Q[:,k],2)
8          if norme<1e-14:
9              raise ValueError('La famille n\'est apparemment pas libre.')
10         else:
11             Q[:,k]=Q[:,k]/norme
12     return Q
```

On modifie le nom de la fonction à la ligne 1. On observe que l'orthogonalisation de chaque vecteur restant de la famille libre est faite au fur et à mesure que les vecteurs de la famille orthonormée sont obtenus par le procédé. On peut stocker les vecteurs « intermédiaires » résultants dans le tableau `Q`, qui contient initialement les vecteurs de la famille libre. Il suffit alors de déplacer les lignes 5 et 6 aux lignes 10 et 11, de modifier la boucle à la ligne 10 (anciennement 5) pour que l'orthogonalisation des vecteurs restants soit réalisée en remplaçant le tableau `A` dans le calcul du produit scalaire à la ligne 11 (anciennement 6) par le tableau `Q` et en échangeant les entiers `i` et `k`. On obtient le code suivant.

```
1  def gramschmidt_modifie(A):
2      m=A.shape[1]
3      Q=A.copy()
4      for k in range(m):
5          norme=np.linalg.norm(Q[:,k],2)
6          if norme<1e-14:
7              raise ValueError('La famille n\'est apparemment pas libre.')
8          else:
9              Q[:,k]=Q[:,k]/norme
10         for i in range(k+1,m):
11             Q[:,i]=Q[:,i]-np.dot(Q[:,i],Q[:,k])*Q[:,k]
12     return Q
```