Examen du 23 mai 2023

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (résolution d'une modification de rang un d'un système linéaire, 4 points). Soit n un entier naturel non nul, A une matrice réelle inversible d'ordre n et $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux matrices colonnes non nulles de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $1+\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$.

1. Vérifier la formule de Sherman–Morrison :

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top A^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u}}.$$

2. Étant donné une matrice $\boldsymbol{b}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et supposant la factorisation LU de la matrice A connue, expliquer comment résoudre à moindre coût le système linéaire $(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ et donner un ordre du nombre d'opérations arithmétiques nécessaires à cette résolution (on ne prendra pas en compte le coût de la factorisation LU de la matrice A, puisque celle-ci est supposée déjà connue).
3. **(question hors barème)** On veut montrer que la condition $1+\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$ est nécessaire à l'inversibilité de la matrice $A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ en établissant que $\det(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top)=(1+\boldsymbol{v}^\top A^{-1}\boldsymbol{u})\det(A)$ pour toute matrice A inversible.
   (a) Vérifier l'égalité matricielle par blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{v}^\top & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top & \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{0}^\top & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{v}^\top & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n & \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{0} & 1+\boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{u}\end{pmatrix}$$

   et obtenir que $\det(I_n+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top)=1+\boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{u}$.
   (b) Conclure.

Exercice 2 (choix d'une méthode directe, 5 points). Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère le système de n équations linéaires à n inconnues $x_1,\dots,x_n$,

$$(\alpha+2\beta)x_i-\beta(x_{i+1}+x_{i-1})=f_i,\ i=1,\dots,n,$$

dans lequel les coefficients reéls α et β, respectivement positif et strictement positif, et les réels $f_1,\dots,f_n$, x_0 et x_{n+1} sont donnés.

1. Écrire ce système sous la forme matricielle $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, où la matrice colonne $\boldsymbol{x}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour coefficients les inconnues $x_1,\dots,x_n$, A est une matrice réelle d'ordre n et $\boldsymbol{b}$ est une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.
3. Justifier le choix d'une méthode directe efficace pour la résolution du système linéaire et donner un ordre de grandeur du nombre d'opérations arithmétiques qu'elle requiert compte tenu de la structure de la matrice A.

Exercice 3 (relaxation d'une méthode itérative, 6 points). Soit n un entier naturel non nul et A une matrice réelle d'ordre n inversible dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls et $\boldsymbol{b}$ une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Étant fixé un réel ω non nul, on souhaite résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ par une méthode itérative définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}=(I_n-\omega D^{-1}A)\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega D^{-1}\boldsymbol{b},$$

où D est la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux ceux de A, l'initialisation $\boldsymbol{x}^{(0)}$ étant donnée.

1. Montrer que la méthode est complètement consistante avec le système linéaire $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.
2. Exprimer les coefficients de la matrice d'itération $I_n-\omega D^{-1}A$ en fonction de ceux de la matrice A.

3. On suppose dans cette question que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes[1] et que ω appartient à l'intervalle $]0,1]$. Montrer alors que
$$\|I_n - \omega D^{-1}A\|_\infty < 1.$$
4. En déduire que, sous les hypothèses de la question précédente, la méthode itérative considérée est convergente.
5. Quelle méthode itérative retrouve-t-on pour le choix $\omega = 1$?

Exercice 4 (méthode de Richardson instationnaire, 4 points). Pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dont la matrice A est réelle symétrique définie positive, il est possible de choisir de manière optimale la valeur du paramètre de la méthode de Richardson à chaque itération. Pour cela, on pose pour tout entier naturel k, et tant que le résidu $\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}$ est non nul,

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\,\boldsymbol{r}^{(k)} \text{ avec } \alpha^{(k)} = \frac{{\|\boldsymbol{r}^{(k)}\|_2}^2}{(\boldsymbol{r}^{(k)})^\top A\boldsymbol{r}^{(k)}}.$$

1. Montrer qu'à chaque itération la valeur $\alpha^{(k)}$ minimise la valeur de la forme
$$q(x^{(k+1)}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{(k+1)})^\top A\boldsymbol{x}^{(k+1)} - (\boldsymbol{x}^{(k+1)})^\top \boldsymbol{b}$$
parmi les réels α tels que $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\,\boldsymbol{r}^{(k)}$.
2. Modifier le code Python ci-dessous, qui met en œuvre la méthode de Richardson stationnaire, de manière à obtenir une version instationnaire adaptée aux matrices réelles symétriques définies positives, dans laquelle la valeur du paramètre de la méthode est donnée à chaque itération par la formule ci-dessus. On indiquera quelles sont la (ou les) ligne(s) éventuellement modifiée(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code.

```
1  def richardson_stationnaire(A,b,alpha,x0,tol,itermax):
2      m,n=A.shape
3      if n!=m:
4          raise ValueError ('La␣matrice␣doit␣être␣carrée.')
5      if alpha ==0.:
6          raise ValueError ('Le␣paramètre␣ne␣doit␣pas␣être␣nul.')
7      iter=0
8      x=x0.copy()
9      r=b-np.dot(A,x)
10     nr0=np.linalg.norm(r)
11     relnr=np.linalg.norm(r)/nr0
12     while (relnr>tol) & (iter<itermax):
13         iter=iter+1
14         x=x+alpha*r
15         r=b-np.dot(A,x)
16         relnr=np.linalg.norm(r)/nr0
17     if (relnr>tol):
18         print('Nombre␣maximum␣d\'itérations␣atteint.')
19     return [x,iter,relnr]
```

Exercice 5 (déflation avec réduction d'ordre, 6 points). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A une matrice réelle d'ordre n symétrique inversible. On suppose connus une valeur propre λ de A et un vecteur propre associé $\boldsymbol{v}$. Ce vecteur propre étant non nul, au moins un de ses coefficients est non nul. Dans toute la suite, on supposera que le premier coefficient de $\boldsymbol{v}$ est (à une éventuelle permutation près) non nul et égal (à une éventuelle renormalisation près) à 1. On considère alors la matrice

$$\tilde{A} = A - \boldsymbol{v}{\boldsymbol{e_1}}^\top A,$$

où $\boldsymbol{e_1}$ est la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le premier coefficient vaut 1 et les autres sont nuls.

1. Que dire de la première ligne de la matrice $\tilde{A}$?

1. On rappelle qu'une matrice A d'ordre n est dite à diagonale strictement dominante par lignes si et seulement si ses coefficients sont tels que
$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

2. Montrer que $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $\tilde{A}$ associé à 0.
3. Soit $\boldsymbol{w}$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre μ distincte de λ, dont le premier coefficient est supposé non nul et égal (à une éventuelle renormalisation près) à 1.
   (a) Montrer que $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de $\tilde{A}$ associé à μ. Que dire du premier coefficient de ce vecteur propre ?
   (b) Réciproquement, si μ est une valeur propre de $\tilde{A}$ telle que $\mu \neq \lambda$ et si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre associé tel que $\boldsymbol{e_1}^\top A\boldsymbol{u} = \mu - \lambda$ (ceci est possible, à une éventuelle renormalisation près, si $\boldsymbol{e_1}^\top A\boldsymbol{u} \neq 0$), montrer que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de A associé à μ.
4. En déduire que la recherche des valeurs propres de A autres que λ se ramène à la recherche des valeurs propres non nulles d'une matrice d'ordre $n-1$. Cette matrice est-elle symétrique ?