

Corrigé (succinct) de l'examen du 23 mai 2023

Exercice 1 (résolution d'une modification de rang un d'un système linéaire). Soit n un entier naturel non nul, A une matrice réelle inversible d'ordre n et \mathbf{u} et \mathbf{v} deux matrices colonnes non nulles de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $1 + \mathbf{v}^\top A^{-1} \mathbf{u} \neq 0$.

1. Vérifier la formule de Sherman–Morrison :

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}}.$$

Posons $B = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}}$. Par définition de l'inverse d'une matrice carrée, il suffit de vérifier que $(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top)B = I_n$. On a

$$\begin{aligned} (A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top)B &= AA^{-1} - \frac{AA^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}} \\ &= I_n - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1} - \frac{(\mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}} \\ &= I_n - \frac{(1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

2. Étant donné une matrice \mathbf{b} de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et supposant la factorisation LU de la matrice A connue, expliquer comment résoudre à moindre coût le système linéaire $(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et donner un ordre du nombre d'opérations arithmétiques nécessaires à cette résolution (on ne prendra pas en compte le coût de la factorisation LU de la matrice A , puisque celle-ci est supposée déjà connue).

Le calcul de la solution du système se résume à l'évaluation de la formule

$$A^{-1}\mathbf{b} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{b}}{1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}}.$$

La factorisation LU de la matrice A étant connue, le calcul des matrices colonnes $A^{-1}\mathbf{b}$ et $A^{-1}\mathbf{u}$ se fait par la résolution de systèmes triangulaires, ce qui requiert $2n(n-1)$ soustractions, $2n(n-1)$ multiplications et $2n$ divisions. Il faut encore calculer les scalaires $\mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{b}$ et $\mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u}$ connaissant $A^{-1}\mathbf{b}$ et $A^{-1}\mathbf{u}$, ce qui nécessite $2(n-1)$ additions et $2n$ multiplications, et enfin former le vecteur solution pour un coût d'une addition, de n soustractions, de n multiplications et d'une division. Au total, on a besoin de l'ordre de $4n^2$ opérations.

3. On veut montrer que la condition $1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u} \neq 0$ est nécessaire à l'inversibilité de la matrice $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top$ en établissant que $\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top) = (1 + \mathbf{v}^\top A^{-1}\mathbf{u})\det(A)$ pour toute matrice A inversible.

(a) Vérifier l'égalité matricielle par blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & 1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

et obtenir que $\det(I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top) = 1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{u}$.

La vérification se fait en effectuant deux produits matriciels. Les matrices étant carrées, le déterminant du terme à gauche de l'égalité est le produit des déterminants des trois matrices, deux d'entre étant égaux à 1 puisque les matrices sont triangulaires à coefficients diagonaux égaux à 1. Le calcul des déterminants des deux matrices triangulaires par blocs restantes conduit alors à

$$\det(I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top) \times 1 = \det(I_n)(1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{u}) = 1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{u}.$$

(b) Conclure.

Pour toute matrice A d'ordre n inversible, on a alors, d'après la précédente question,

$$\det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top) = \det(A(I_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\top)) = \det(A)\det(I_n + (A^{-1}\mathbf{u})\mathbf{v}^\top) = \det(A)(1 + \mathbf{v}^\top(A^{-1}\mathbf{u})).$$

Exercice 2 (choix d'une méthode directe). Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2. On considère le système de n équations linéaires à n inconnues x_1, \dots, x_n ,

$$(\alpha + 2\beta)x_i - \beta(x_{i+1} + x_{i-1}) = f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dans lequel les coefficients réels α et β , respectivement positif et strictement positif, et les réels f_1, \dots, f_n , x_0 et x_{n+1} sont donnés.

- Écrire ce système sous la forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où la matrice colonne \mathbf{x} de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour coefficients les inconnues x_1, \dots, x_n , A est une matrice réelle d'ordre n et \mathbf{b} est une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On trouve

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & -\beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\beta & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} f_1 + \beta x_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \beta x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

- Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.

Il est clair que A est symétrique. Soit \mathbf{x} un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} &= (\alpha + 2\beta)x_1^2 - \beta x_1 x_2 + \sum_{i=2}^{n-1} ((\alpha + 2\beta)x_i - \beta(x_{i+1} + x_{i-1}))x_i + (\alpha + 2\beta)x_n^2 - \beta x_{n-1}x_n \\ &= (\alpha + \beta)x_1^2 + \beta(x_1 - x_2)x_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\alpha x_i + \beta(x_i - x_{i+1}) + \beta(x_i - x_{i-1}))x_i + (\alpha + \beta)x_n^2 + \beta(x_n - x_{n-1})x_n \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})x_i + \beta \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})x_i + \beta(x_1^2 + x_n^2) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})x_i + \beta \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)x_{j+1} + \beta(x_1^2 + x_n^2) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + \beta(x_1^2 + x_n^2), \end{aligned}$$

la forme quadratique associée à A est donc positive. Supposons que $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = 0$. Le coefficient β étant strictement positif, ceci implique que $x_1 = x_n = 0$ et que $x_i = x_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, d'où $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Une autre possibilité de preuve est basée sur l'utilisation du critère de Sylvester et un raisonnement par récurrence. Notons $|A_k|$ le mineur principal dominant d'ordre k de A , $k \in \{1, \dots, n\}$. On observe tout d'abord que

$$|A_1| = \alpha + 2\beta > 0 \quad \text{et} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} \alpha + 2\beta & -\beta \\ -\beta & \alpha + 2\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + 4\alpha\beta + 3\beta^2 > 0.$$

Les deux premiers mineurs principaux dominants de la matrice A sont donc strictement positifs. Faisons à présent l'hypothèse que, pour un entier k entre 3 et n , les mineurs $|A_{k-2}|$ et $|A_{k-1}|$ sont tous deux strictement positifs. En effectuant successivement deux développements de déterminant par rapport à la première colonne, on trouve

$$|A_k| = (\alpha + 2\beta)|A_{k-1}| + \beta^2|A_{k-2}|,$$

et $|A_k|$ est donc strictement positif, ce qui achève le raisonnement par récurrence.

- Justifier le choix d'une méthode directe efficace pour la résolution du système linéaire et donner un ordre de grandeur du nombre d'opérations arithmétiques qu'elle requiert compte tenu de la structure de la matrice A .

La matrice A étant réelle symétrique définie positive, la méthode directe à privilégier est la factorisation de Cholesky. Compte tenu de la structure tridiagonale de A , le nombre d'opérations nécessaires se trouve considérablement réduit par rapport au cas général. Le calcul de la factorisation de Cholesky nécessite ainsi $n - 1$ soustractions, $n - 1$ multiplications, $n - 1$ divisions et n extractions de racine carrée, soit de l'ordre de $4n$ opérations. Les résolutions des deux systèmes triangulaires pour obtenir la solution nécessitent quand à elles $2(n - 1)$ soustractions, $2(n - 1)$ multiplications et $2n$ divisions, soit de l'ordre de $6n$ opérations.

Exercice 3 (relaxation d'une méthode itérative). Soit n un entier naturel non nul et A une matrice réelle d'ordre n inversible dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls et \mathbf{b} une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Étant fixé un réel ω non nul, on souhaite résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par une méthode itérative définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{x}^{(k+1)} = (I_n - \omega D^{-1}A)\mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1}\mathbf{b},$$

où D est la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux ceux de A , l'initialisation $\mathbf{x}^{(0)}$ étant donnée.

1. Montrer que la méthode est complètement consistante avec le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Le paramètre ω étant non nul, on a

$$\mathbf{x} = (I_n - \omega D^{-1}A)\mathbf{x} + \omega D^{-1}\mathbf{b} \iff \omega D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

2. Exprimer les coefficients de la matrice d'itération $I_n - \omega D^{-1}A$ en fonction de ceux de la matrice A .

Posons $B_{JOR}(\omega) = I_n - \omega D^{-1}A$. On a alors

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (B_{JOR}(\omega))_{ij} = \begin{cases} 1 - \omega & \text{si } i = j \\ -\omega \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On suppose dans cette question que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes¹ et que ω appartient à l'intervalle $]0, 1]$. Montrer alors que

$$\|I_n - \omega D^{-1}A\|_\infty < 1.$$

On a, d'après la question précédente, l'hypothèse sur ω et par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|I_n - \omega D^{-1}A\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left(1 - \omega + \frac{\omega}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right).$$

La matrice A étant à diagonale strictement dominante par lignes, on a par ailleurs

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

d'où

$$\|I_n - \omega D^{-1}A\|_\infty < 1 - \omega + \omega = 1.$$

4. En déduire que, sous les hypothèses de la question précédente, la méthode itérative considérée est convergente.

Par un résultat donné en cours, on a

$$\rho(I_n - \omega D^{-1}A) \leq \|I_n - \omega D^{-1}A\|_\infty.$$

Le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode est donc strictement plus petit que 1 sous les hypothèses de la question précédente et la méthode itérative, dont on a montré qu'elle est complètement consistante, est alors convergente.

5. Quelle méthode itérative retrouve-t-on pour le choix $\omega = 1$?

1. On rappelle qu'une matrice A d'ordre n est dite à diagonale strictement dominante par lignes si et seulement si ses coefficients sont tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

On retrouve la méthode de Jacobi. Cette relaxation de la méthode de Jacobi est la *méthode de sur-relaxation simultanée*.

Exercice 4 (méthode de Richardson instationnaire). Pour la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ dont la matrice A est réelle symétrique définie positive, il est possible de choisir de manière optimale la valeur du paramètre de la méthode de Richardson à chaque itération. Pour cela, on pose pour tout entier naturel k , et tant que le résidu $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ est non nul,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} r^{(k)} \text{ avec } \alpha^{(k)} = \frac{\|r^{(k)}\|_2^2}{(r^{(k)})^\top A r^{(k)}}.$$

1. Montrer qu'à chaque itération la valeur $\alpha^{(k)}$ minimise la valeur de la forme

$$q(x^{(k+1)}) = \frac{1}{2}(x^{(k+1)})^\top A x^{(k+1)} - (x^{(k+1)})^\top b$$

parmi les réels α tels que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r^{(k)}$.

La fonction $\alpha \mapsto \frac{1}{2}(r^{(k)})^\top A r^{(k)} \alpha^2 + (r^{(k)})^\top (A x^{(k)} - b) \alpha + \frac{1}{2}(x^{(k)})^\top A x^{(k)} - (x^{(k)})^\top b$ est quadratique, le coefficient de son terme de plus haut degré étant strictement positif (la matrice A étant réelle symétrique définie positive et le résidu $r^{(k)}$ étant supposé non nul). Elle admet donc un unique minimum au point

$$-\frac{(r^{(k)})^\top (A x^{(k)} - b)}{\frac{2}{2}(r^{(k)})^\top A r^{(k)}} = \frac{\|r^{(k)}\|_2^2}{(r^{(k)})^\top A r^{(k)}}.$$

2. Modifier le code Python ci-dessous, qui met en œuvre la méthode de Richardson stationnaire, de manière à obtenir une version instationnaire adaptée aux matrices réelles symétriques définies positives, dans laquelle la valeur du paramètre de la méthode est donnée à chaque itération par la formule ci-dessus. On indiquera quelles sont la (ou les) ligne(s) éventuellement modifiée(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code.

```

1 def richardson_stationnaire(A,b,alpha,x0,tol,itermax):
2     m,n=A.shape
3     if n!=m:
4         raise ValueError('La matrice doit être carrée.')
5     if alpha ==0.:
6         raise ValueError('Le paramètre ne doit pas être nul.')
7     iter=0
8     x=x0.copy()
9     r=b-np.dot(A,x)
10    nr0=np.linalg.norm(r)
11    relnr=np.linalg.norm(r)/nr0
12    while (relnr>tol) & (iter<itermax):
13        iter=iter+1
14        x=x+alpha*r
15        r=b-np.dot(A,x)
16        relnr=np.linalg.norm(r)/nr0
17    if (relnr>tol):
18        print('Nombre maximum d\'itérations atteint.')
19    return [x,iter,relnr]
```

Les modifications à faire sont les suivantes :

- On remplace la ligne 1 par `def richardson_instationnaire(A,b,x0,tol,itermax):` pour modifier le nom de la fonction et supprimer le paramètre α en entrée.
- On supprime les ligne 5 et 6 car le test sur le paramètre α est à présent sans objet.
- On ajoute après la ligne 13 la ligne `alpha=np.linalg.norm(r)**2/np.dot(r,np.dot(A,r))` pour le calcul de $\alpha^{(k)}$.

On peut éventuellement tester si la matrice est symétrique, mais pas si elle est définie positive (ce dernier test serait bien trop coûteux).

Exercice 5 (déflation avec réduction d'ordre). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A une matrice réelle d'ordre n symétrique inversible. On suppose connus une valeur propre λ de A et un vecteur propre associé v . Ce vecteur propre étant non nul, au moins un de ses coefficients est non nul. Dans toute la suite, on supposera que le premier coefficient de v est (à une éventuelle permutation près) non nul et égal (à une éventuelle renormalisation près) à 1. On considère alors la matrice

$$\tilde{A} = A - v e_1^\top A,$$

où e_1 est la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le premier coefficient vaut 1 et les autres sont nuls.

1. Que dire de la première ligne de la matrice \tilde{A} ?

La première ligne de \tilde{A} est la matrice ligne $\mathbf{e}_1^\top \tilde{A} = \mathbf{e}_1^\top A - \mathbf{e}_1^\top \mathbf{v} \mathbf{e}_1^\top A$. La matrice d'ordre 1 $\mathbf{e}_1^\top \mathbf{v}$ ayant pour coefficient le premier coefficient de \mathbf{v} , c'est-à-dire 1 par hypothèse, on en déduit que cette ligne est nulle.

2. Montrer que \mathbf{v} est un vecteur propre de \tilde{A} associé à 0.

On a

$$\tilde{A}\mathbf{v} = A\mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{e}_1^\top A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{e}_1^\top (\lambda \mathbf{v}) = (1 - \mathbf{e}_1^\top \mathbf{v}) \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

3. Soit \mathbf{w} un vecteur propre de A associé à une valeur propre μ distincte de λ , dont le premier coefficient est supposé non nul et égal (à une éventuelle renormalisation près) à 1.

(a) Montrer que $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ est un vecteur propre de \tilde{A} associé à μ . Que dire du premier coefficient de ce vecteur propre ?

D'après la précédente question, on a

$$\tilde{A}(\mathbf{w} - \mathbf{v}) = A\mathbf{w} - \mathbf{v} \mathbf{e}_1^\top A \mathbf{w} = \mu \mathbf{w} - \mathbf{v} \mathbf{e}_1^\top (\mu \mathbf{w}) = \mu(\mathbf{w} - (\mathbf{e}_1^\top \mathbf{w}) \mathbf{v}) = \mu(\mathbf{w} - \mathbf{v}),$$

par hypothèse sur le premier coefficient de \mathbf{w} . Les premiers coefficients respectifs de \mathbf{w} et \mathbf{v} étant tous deux égaux à 1, on en déduit que le premier coefficient du vecteur propre $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ est nul.

(b) Réciproquement, si μ est une valeur propre de \tilde{A} telle que $\mu \neq \lambda$ et si \mathbf{u} est un vecteur propre associé tel que $\mathbf{e}_1^\top A \mathbf{u} = \mu - \lambda$ (ceci est possible, à une éventuelle renormalisation près, si $\mathbf{e}_1^\top A \mathbf{u} \neq 0$), montrer que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ est un vecteur propre de A associé à μ .

On a

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \tilde{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v} \mathbf{e}_1^\top A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mu \mathbf{u} + \mathbf{v} \mathbf{e}_1^\top (A\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) = \mu \mathbf{u} + (\mathbf{e}_1^\top A \mathbf{u} + \lambda) \mathbf{v} = \mu \mathbf{u} + (\mu - \lambda + \lambda) \mathbf{v} = \mu(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

4. En déduire que la recherche des valeurs propres de A autres que λ se ramène à la recherche des valeurs propres non nulles d'une matrice d'ordre $n - 1$. Cette matrice est-elle symétrique ?

On a montré que la recherche des valeurs propres de A distinctes de λ se ramène à la recherche des valeurs propres non nulles de \tilde{A} . La première ligne de cette dernière matrice et le premier coefficient des vecteurs propres associés étant nuls, on ramène le calcul de ces valeurs propres à celui pour la matrice extraite de \tilde{A} d'ordre $n - 1$ obtenue par suppression de la première ligne et de la première colonne de \tilde{A} . La matrice \tilde{A} n'étant pas nécessairement symétrique malgré le fait que A le soit, cette matrice n'est *a priori* pas symétrique.