Département MIDO

Méthodes numériques
année 2022/2023

Examen d'appel du 28 juin 2023

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation. En particulier, des points pourront être perdus si des parties de la copie sont jugées illisibles.

Durée : 2 heures

Exercice 1 (résolution numérique de l'équation de Kepler, 4 points). En astronomie, l'équation de Kepler

$$x - e\sin(x) = M,$$

lie l'anomalie excentrique x, servant à calculer la position d'un astre dont le mouvement suit une orbite képlérienne, à l'excentricité e et l'anomalie moyenne M. On s'intéresse dans cet exercice à la résolution numérique de l'équation lorsque l'orbite est elliptique et périodique, c'est-à-dire quand e et M sont donnés et appartiennent respectivement à $]0,1[$ et $[0,2\pi[$.

1. Montrer que l'équation de Kepler admet une unique solution ξ contenue entre $M-e$ et $M+e$.
2. Montrer la méthode de point fixe basée sur la relation de récurrence
$$\forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)} = e\ \sin(x^{(k)}) + M,$$
converge globalement vers ξ, c'est-à-dire quel que soit le choix de l'initialisation $x^{(0)}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Donner la relation de récurrence de la méthode de Newton–Raphson pour la résolution de l'équation de Kepler et proposer (en la justifiant) une valeur pertinente pour l'initialisation de cette méthode lorsque la valeur de l'excentricité e est proche de 0.

Exercice 2 (règle du trapèze pour l'intégrale d'une fonction convexe, 4 points). Soit $[a,b]$ un intervalle borné et non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et convexe sur $[a,b]$. On souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer [1] que l'on a
$$\forall x\in[a,b],\ f(x)\leq \Pi_1 f(x),$$
où $\Pi_1 f$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f associé aux nœuds $x_0=a$ et $x_1=b$.
2. En se servant de cette observation, expliquer pourquoi la règle du trapèze composée fournira toujours, c'est-à-dire quel que soit le nombre de sous-intervalles utilisés pour subdiviser $[a,b]$, une approximation par excès de la valeur de $I(f)$.
3. On choisit $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$ et $b=2$. Obtenir une approximation de $\ln(2)$ en appliquant la règle du trapèze composée à deux sous-intervalles au calcul approché de $I(f)$.

Soit m un entier naturel non nul. On rappelle que, si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$, on rappelle que l'erreur de quadrature de la règle du trapèze composée à m sous-intervalles a pour expression

$$E_{m,1}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12\,m^2}f''(\xi),\ \text{avec } \xi\in]a,b[.$$

4. Donner une estimation du nombre de sous-intervalles à utiliser pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ de précision inférieure ou égale à 10^{-8}.

---

1. On rappelle que la courbe représentative d'une fonction convexe sur un intervalle réel se trouve au dessous de tout segment du plan joignant deux points de cette courbe.

Exercice 3 (une méthode itérative de résolution de système linéaire, 9 points). Soit n un entier naturel non nul. Le but de cet exercice est d'étudier une méthode de résolution numérique d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec A une matrice réelle symétrique définie positive d'ordre n que l'on suppose pouvoir écrire

$$A = M - N = P - Q,$$

les matrices M et P étant inversibles. À partir d'une initialisation $\boldsymbol{x}^{(0)}$ arbitraire, on considère la méthode itérative définie par les relations de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M\,\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = N\,\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b},\ P\,\boldsymbol{x}^{(k+1)} = Q\,\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} + \boldsymbol{b}.$$

Dans la suite, on pose

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = M^{-1}A\boldsymbol{e}^{(k)},\ \boldsymbol{e}^{(k+\frac{1}{2})} = \boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} - \boldsymbol{x} \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+\frac{1}{2})} = M^{-1}A\boldsymbol{e}^{(k+\frac{1}{2})},$$

et l'on désigne par $\|\cdot\|_A$ la norme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire défini par la matrice A, *i.e.*

$$\forall \boldsymbol{u} \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {\|\boldsymbol{u}\|_A}^2 = \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle\,,$$

avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les matrices $M + N^\top$ et $P + Q^\top$ sont symétriques.
2. Vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \boldsymbol{e}^{(k)} - \boldsymbol{e}^{(k+\frac{1}{2})}$.
3. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, ${\|\boldsymbol{e}^{(k+\frac{1}{2})}\|_A}^2 - {\|\boldsymbol{e}^{(k)}\|_A}^2 = -\left\langle (M + N^\top)\,\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right\rangle$.
4. En déduire que l'on a aussi, $\forall k \in \mathbb{N}$, ${\|\boldsymbol{e}^{(k+1)}\|_A}^2 - {\|\boldsymbol{e}^{(k+\frac{1}{2})}\|_A}^2 = -\left\langle (P + Q^\top)\,\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+\frac{1}{2})}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+\frac{1}{2})}\right\rangle$.

On suppose à partir de maintenant que les matrices symétriques $M + N^\top$ et $P + Q^\top$ sont définies positives.

5. Montrer que la suite $\left({\|\boldsymbol{e}^{(k)}\|_A}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.
6. En déduire que la suite $\left({\|\boldsymbol{e}^{(k+\frac{1}{2})}\|_A}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite égale à ℓ.
7. En déduire que la suite $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul.
8. En conclure que la méthode est convergente.

Exercice 4 (mise en œuvre de la méthode de sur-relaxation successive, 3 points).

1. Rappeler la relation de récurrence définissant la méthode de sur-relaxation successive pour la résolution d'un système linéaire de matrice A et de second membre $\boldsymbol{b}$.
2. Modifier le code Python de la fonction ci-dessous, qui met en œuvre la méthode de Gauss–Seidel, de manière à ce qu'elle mette en œuvre la méthode de sur-relaxation successive. On indiquera, en donnant des explications, quelles sont la (ou les) ligne(s) modifiée(s) ou supprimé(s) et la position relative de toute ligne éventuellement ajoutée en utilisant la numérotation des lignes de code.

```
1  def gaussseidel(A,b,x0,tol,itermax):
2      m,n=A.shape
3      if n!=m:
4          raise ValueError('La␣matrice␣doit␣être␣carrée.')
5      iter=0
6      x=x0.copy()
7      r=b-dot(A,x)
8      nr0=norm(r)
9      relnr=norm(r)/nr0
10     while (relnr>tol) & (iter<itermax):
11         iter=iter+1
12         for i in range(n):
13             r[i]=r[i]/A[i,i]
14             for j in range(i+1,n):
15                 r[j]=r[j]-A[j,i]*r[i]
16             x[i]=x[i]+r[i]
17         r=b-dot(A,x)
18         relnr=norm(r)/nr0
19     if (relnr>tol):
20         print('Nombre␣maximum␣d\'itérations␣atteint.')
21     return x,iter
```