C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série II *b*, p. 601–606, 2001

Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA [a], Guillaume LEGENDRE [b], Éric LUNÉVILLE [a]

[a] **Laboratoire de Simulation et de Modélisation des phénomènes de Propagation, URA 853 du CNRS, ENSTA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France**

[b] **Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, BP 72, 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon cedex, France**
Courriel : bonnet@ensta.fr; guillaume.legendre@onera.fr; lunevill@ensta.fr

(Reçu le 26 mars 2001, accepté après révision le 19 juin 2001)

Résumé. Nous considérons l'équation de Galbrun, utilisée en acoustique linéaire dans les écoulements. Dans un cas simple (conduit rigide avec écoulement uniforme) et en régime harmonique établi, nous montrons qu'une approche basée sur une formulation variationnelle régularisée du problème permet d'assurer la convergence d'une méthode d'éléments finis nodaux. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

acoustique / acoustique en écoulement / méthode variationnelle / régularisation

Mathematical analysis of Galbrun's equation with uniform flow

Abstract. *We consider Galbrun's equation, used in linear aeroacoustics. For a simple case (rigid duct with uniform flow) in the time harmonic regime, we show that an approach based on a regularized variational formulation of the problem ensures the convergence of a nodal finite-element method. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

acoustics / aeroacoustics / variational method / regularization

Abridged English version

Galbrun's equation (1) is a linear vector wave equation based on the Lagrangian displacement variable $\boldsymbol{\xi}$ [1,2].

The problem is a two-dimensional one, set in the xy plane. A rigid duct of width l and infinite length, which walls are parallel to the x axis, is considered. We suppose that the flow is subsonic and uniform, in the direction x, the static pressure p_0 is uniform, the time regime is harmonic ($\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ with pulsation $\omega > 0$) and an acoustic source $\boldsymbol{f}$ (such that $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 0$) is present. The displacement $\boldsymbol{\xi}$ is then a solution to (2).

As solving a problem set in an unbounded domain requires to model the asymptotic behavior of the solution at infinity (by means of a radiation condition for instance) that would be beyond the scope of this note, we consider the domain $\Omega =]0, L[\times]0, l[$. Galbrun's equation (2) then resumes to (5), where $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = -\mathrm{i}k + M\frac{\partial}{\partial x}$, with k the wave number ($k = \omega/c_0$, where c_0 denotes the sound celerity in the undisturbed medium, $c_0 = 1$) and M the Mach number ($M = v_0/c_0$, $-1 < M < 1$).

In the non-flow case (equation (3)), the solution is irrotational (i.e. $\operatorname{curl} \boldsymbol{\xi} = 0$) and hence satisfies the vector Helmholtz equation (4). This leads to the introduction of a so-called 'regularized' formulation for Galbrun's equation with uniform flow.

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

S1620-7742(01)01373-3/FLA

In the irrotational case, the 'classical' problem (5)–(7) is replaced by an equivalent 'regularized' one, composed of equation (8) and additional boundary conditions (9). We prove this new formulation leads to a well-posed variational problem (of the Fredholm type) in a closed subspace V of $(H^1(\Omega))^2$. As a consequence, the use of standard Lagrange nodal elements to compute a numerical solution by means of a finite element method is allowed.

For the rotational case, we first notice the rotational of the displacement verifies a second-order differential equation, which can be solved if $\operatorname{curl}\boldsymbol{\xi}$ is given on the artificial boundaries of the domain Ω. The 'regularized' formulation introduced before is then used to impose, in a weak sense, the value of $\operatorname{curl}\boldsymbol{\xi}$ in the variational formulation of the problem. Once again, we prove the problem is well-posed in V.

We conclude this paper with some limitations of the method in the case of a nonconvex domain (while the regularized problem is still well-posed, it is no longer equivalent to the initial one) or with nonuniform flow (in which a coupling between acoustic, i.e. irrotational, and hydrodynamic, i.e. rotational, modes occurs and therefore prevents us from determining $\operatorname{curl}\boldsymbol{\xi}$ a priori in Ω).

1. L'équation de Galbrun

L'équation de Galbrun [1,2] est une équation linéaire de propagation des ondes portant sur le vecteur déplacement Lagrangien $\boldsymbol{\xi}$; plus précisement, $\boldsymbol{\xi}$ représente le déplacement d'une particule fluide dans un écoulement perturbé par rapport à sa position dans le même écoulement non perturbé (dit écoulement d'entraînement) et s'exprime en fonction des coordonnées $(\boldsymbol{x},t)$ (représentation mixte Euler–Lagrange).

En l'absence de source de volume ou de force extérieure, cette équation s'écrit :

$$\rho_0\frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{D}t^2}-\boldsymbol{\nabla}\big(\rho_0c_0^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}p_0\big)+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}p_0=\mathbf{0} \tag{1}$$

où $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ est la dérivée convective par rapport à l'écoulement d'entraînement et $\rho_0,\ c_0,\ p_0$ désignent respectivement la masse volumique du fluide parfait, la célérité du son et la pression statique dans le milieu non perturbé.

Nous considérons un conduit rigide bidimensionnel, de largeur l et de longueur infinie. Le problème est posé dans le plan xy, où l'axe x (respectivement y) est parallèle (respectivement orthogonal) aux parois du conduit. L'écoulement est supposé subsonique, de vitesse uniforme v_0 dans la direction x. Nous supposons la pression statique uniforme. Le régime est harmonique, de pulsation ω ($\omega>0$), et une source acoustique $\boldsymbol{f}$ (telle que $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=0$) est présente.

Le champ de déplacement Lagrangien $\boldsymbol{\xi}$ vérifie alors :

$$\begin{aligned}&\rho_0\frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{D}t^2}-\rho_0c_0^2\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{f}\quad\text{pour } x\in\mathbb{R},\ 0<y<l\\&\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}=0\quad\text{pour } x\in\mathbb{R},\ y=0\text{ et } y=l\\&\text{avec}\quad\frac{1}{c_0}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=-\mathrm{i}k+M\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned} \tag{2}$$

où k, le nombre d'onde ($k=\omega/c_0$), et M, le nombre de Mach ($M=v_0/c_0,\ -1<M<1$), ainsi que le champ $\boldsymbol{f}$ sont des données du problème (nous supposerons dans la suite que $\rho_0=1$ et $c_0=1$).

Dans le cas $M=0$, l'équation (2) se réduit à :

$$-k^2\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{f}\quad\text{pour } x\in\mathbb{R},\ 0<y<l \tag{3}$$

Le champ de déplacement solution de (2) est irrotationnel (il suffit de prendre le rotationnel de l'équation). Par conséquent, $\boldsymbol{\xi}$ est solution de l'équation de Helmholtz vectorielle :

$$-k^2\boldsymbol{\xi} - \Delta\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{f} \tag{4}$$

en vertu de la relation $\mathbf{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}) = -\Delta\boldsymbol{\xi}$. Nous retrouvons alors un cadre classique pour l'analyse mathématique et la discrétisation du problème.

La prise en compte de cette propriété d'irrotationnalité de la solution dans le cas sans écoulement joue donc un rôle essentiel dans la résolution numérique de l'équation. Nous montrons comment généraliser cette approche au problème avec écoulement uniforme, en considérant successivement le cas pour lequel la solution est irrotationnelle puis le cas rotationnel.

La résolution en conduit non borné pose des questions liées au comportement de la solution à l'infini (condition de rayonnement notamment) qui n'entrent pas dans le cadre de cette note. C'est pourquoi nous posons à présent le problème sur une portion du guide. Le domaine correspondant au conduit tronqué est désigné par $\Omega =]0, L[\times]0, l[$.

Notre objectif est de montrer que l'on peut reconstituer la solution dans Ω à partir de données sur les frontières artificielles (notées $\Gamma_0 = \{x = 0,\ 0 < y < l\}$ et $\Gamma_L = \{x = L,\ 0 < y < l\}$) que nous préciserons dans la suite.

2. Le cas irrotationnel

Dans le cas où la solution recherchée est irrotationnelle, le problème que nous étudions devient :

$$\frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{D}t^2} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n} \text{ donné sur } \partial\Omega$$

Pour $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, il est possible de déterminer la solution par décomposition modale. Par linéarité, nous nous ramenons alors au problème (5)–(6) avec la condition aux limites homogène :

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{7}$$

Nous introduisons l'équation de Galbrun 'régularisée' suivante :

$$\frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{D}t^2} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}) + s\,\mathbf{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{8}$$

où s est un réel positif. Nous complétons cette équation par la condition aux limites (7), ainsi qu'une condition supplémentaire, nécessaire à l'équivalence avec le problème (5)–(7) :

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{9}$$

L'idée à la base de la construction d'un problème « régularisé », initialement introduite et développée pour les équations de Maxwell (voir, par exemple, [3] ou, plus récemment, [4]), est de faire apparaître un opérateur elliptique dans l'équation. Dans le cadre d'une résolution numérique par éléments finis dans un domaine convexe et régulier, cette méthode constitue une alternative à l'utilisation des éléments finis d'arêtes [5] pour la discrétisation des champs électromagnétiques, puisqu'elle permet l'emploi d'éléments finis standards de type Lagrange.

Nous allons maintenant montrer que le problème régularisé est bien posé et équivalent au problème de départ.

Nous considérons une fonction test régulière $\boldsymbol{\eta}$, telle que $\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, et supposons que $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^2$. En multipliant (8) par $\boldsymbol{\eta}$ et en intégrant sur le domaine Ω, nous avons :

$$\int_\Omega \left(-k^2\boldsymbol{\xi} - 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial x} + M^2\frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial x^2} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}) + s\,\mathbf{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi}) \right) \cdot \overline{\boldsymbol{\eta}}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}}\,\mathrm{d}\Omega$$

Après quelques intégrations par parties et l'utilisation des conditions aux limites, nous sommes conduits à introduire le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver}\quad \boldsymbol{\xi} \in V = \left\{\boldsymbol{u} \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 \;\middle|\; \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \quad \text{tel que} \quad \forall\boldsymbol{\eta}\in V,\\
&\int_\Omega \left(-k^2\boldsymbol{\xi}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}} - 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial x}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}} - M^2\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\overline{\boldsymbol{\eta}}}{\partial x} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}}) + s\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi})(\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{\eta}}) \right)\mathrm{d}\Omega\\
&\quad = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}}\,\mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{Posons}\quad a(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \int_\Omega \left(\boldsymbol{\xi}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}}) + s\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi})(\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{\eta}}) - M^2\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\overline{\boldsymbol{\eta}}}{\partial x} \right)\mathrm{d}\Omega$$

THÉORÈME 2.1. – *Si* $s \geqslant 1$, *la forme bilinéaire* a *est coercive sur* V.

Démonstration. – D'après Costabel (cf. [6], theorem 4.1, p. 539), pour tout $\boldsymbol{\xi}$ de V, nous avons :

$$\int_\Omega \left(|\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}|^2 + s\,|\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi}|^2\right)\mathrm{d}\Omega \geqslant \min(1,s)\int_\Omega \left(|\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}|^2 + |\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi}|^2\right)\mathrm{d}\Omega = \min(1,s)\int_\Omega |\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\xi}|^2\,\mathrm{d}\Omega$$

Le résultat s'en déduit car $M^2 < 1$. □

THÉORÈME 2.2. – *Si* $s \geqslant 1$, *le problème variationnel* (10) *relève de l'alternative de Fredholm.*

Démonstration. – Le problème (10) peut s'écrire sous la forme :

$$a(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) - \int_\Omega \left((k^2+1)\boldsymbol{\xi} + 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial x} \right)\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}}\,\mathrm{d}\Omega$$

Ainsi, la forme bilinéaire est la somme d'un terme coercif (d'après le théorème précédent) et d'un terme compact (ce qui résulte de la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$). □

Nous montrons maintenant l'équivalence entre la formulation variationnelle du problème régularisé et le problème (5)–(7). Nous avons le

THÉORÈME 2.3. – *Si* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} = 0$ *et* $s > s^* = M^2 + (k^2/\pi^2)(1/L^2 + 1/l^2)^{-1}$ *alors toute solution* $\boldsymbol{\xi}$ *de* (10) *est à rotationnel nul.*

Démonstration. – Soit $\varphi \in \{\varphi \in H^3(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{rot}\,\varphi$. On vérifie aisément que $\boldsymbol{\eta} \in V$. En remplaçant dans la formulation variationnelle (10), nous obtenons :

$$\int_\Omega \left(-k^2\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{rot}\,\overline{\varphi} - 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial x}\cdot\mathbf{rot}\,\overline{\varphi} - M^2\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial x}\cdot\frac{\partial(\mathbf{rot}\,\overline{\varphi})}{\partial x} - s\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi})\Delta\overline{\varphi} \right)\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\mathbf{rot}\,\overline{\varphi}\,\mathrm{d}\Omega$$

Nous réalisons ensuite des intégrations par parties pour arriver à :

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\xi}\left(-k^2\overline{\varphi} + 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x} + M^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2} - s\,\Delta\overline{\varphi} \right)\mathrm{d}\Omega = 0$$

Par un résultat de densité (cf. [7], théorème 1.6.2, p. 30), ce résultat est vrai pour toute fonction φ de $D = \{\varphi \in H^2(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Le rotationnel de $\boldsymbol{\xi}$ appartient donc à l'orthogonal dans $L^2(\Omega)$ de l'image de l'opérateur :

$$\mathcal{H}_{k,M,s} = -k^2 I + 2\mathrm{i}kM \frac{\partial}{\partial x} + M^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - s\,\Delta$$

de domaine D. Cet opérateur étant auto-adjoint, $\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}$ est dans le noyau de $\mathcal{H}_{k,M,s}$. Un calcul explicite par séparation de variables permet finalement de montrer que ce noyau est réduit à $\{0\}$, sauf pour des valeurs exceptionnelles de s comprises entre M^2 et s^*. $\square$

La régularisation de la formulation variationnelle du problème par prise en compte, en un sens faible, de la contrainte d'irrotationnalité permet de résoudre deux points sensibles. D'une part, le terme dépendant du nombre de Mach de la forme bilinéaire a est « contrôlé » et le problème est de type Fredholm si $s > s^*$. D'autre part, cette régularisation permet une approximation par éléments finis nodaux conformes à l'espace $H^1(\Omega)$ et nous avons les résultats classiques de convergence.

3. Le cas rotationnel

Nous nous intéressons maintenant aux solutions à rotationnel non nul de l'équation (5). En prenant le rotationnel de cette équation, on vérifie que :

$$-k^2 \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi} - 2\mathrm{i}kM \frac{\partial(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi})}{\partial x} + M^2 \frac{\partial^2(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi})}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{11}$$

Il est donc possible de déterminer analytiquement $\psi = \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}$, solution de l'équation différentielle (11), à partir de sa donnée (supposée régulière) sur Γ_0 et Γ_L. Remarquons que la prise en compte d'une source $\boldsymbol{f}$ à rotationnel non nul ne poserait pas de difficulté supplémentaire.

Nous introduisons le problème régularisé suivant :

$$\frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{D}t^2} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi}) + s\,\mathbf{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi} - \psi) = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{12}$$

muni des conditions aux limites (7) et :

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi} = \psi|_{\partial\Omega} \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{13}$$

La formulation variationnelle du problème est identique à (10), excepté pour le second membre, qui devient :

$$\int_\Omega \big(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{\eta}} + s\,\psi(\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{\eta}})\big)\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\{\Gamma_0\cup\Gamma_L\}} M^2\psi(\overline{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{e_y})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e_x})\,\mathrm{d}S$$

À nouveau, ce problème variationnel relève de l'alternative de Fredholm. Nous montrons son équivalence avec le problème fort.

Soit $\varphi \in \{\varphi \in H^3(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{rot}\,\varphi$. ψ étant solution de l'équation (11) pour le rotationnel de $\boldsymbol{\xi}$, nous avons :

$$\int_\Omega \psi\bigg(-k^2\overline{\varphi} + 2\mathrm{i}kM\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x} + M^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2}\bigg)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\{\Gamma_0\cup\Gamma_L\}} M^2\psi\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e_x})\,\mathrm{d}S \tag{14}$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 2.3 et en utilisant (14), nous obtenons :

$$\int_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi} - \psi)(\mathcal{H}_{k,M,s}\overline{\varphi})\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

Le résultat de densité précédemment cité permet de conclure que le champ $\boldsymbol{\xi}$ solution du problème variationnel régularisé vérifie $\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi} = \psi$.

4. Conclusion

En conclusion, nous avons obtenu pour le problème considéré (écoulement uniforme et domaine rectangulaire) une formulation mathématique de l'équation de Galbrun qui se prête à une discrétisation par éléments finis nodaux.

Notons qu'en présence d'écoulement, la donnée du déplacement normal sur le bord du domaine ne suffit plus à la détermination de $\boldsymbol{\xi}$ et doit être complétée par la donnée du rotationnel de $\boldsymbol{\xi}$ sur les frontières transverses à l'écoulement.

La généralisation de cette approche (autre géométrie ou écoulement non uniforme) soulève de nouvelles difficultés :

– si le domaine Ω est à coins rentrants (en présence d'une plaque plane dans le conduit par exemple), la formulation régularisée reste mathématiquement bien posée. En revanche, elle n'est plus équivalente au problème initial car l'ensemble D n'est plus égal au domaine de $\mathcal{H}_{k,M,s}$;
– dans le cas d'un écoulement non uniforme, un couplage existe entre les modes acoustiques (irrotationnels) et hydrodynamiques (rotationnels) et il n'est plus possible de déterminer a priori $\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}$ dans le domaine.

Références bibliographiques

[1] Galbrun H., Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
[2] Poirée B., Les équations de l'acoustique linéaire et non linéaire dans un écoulement de fluide parfait, Acustica 57 (1985) 5–25.
[3] Werner P., On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields, J. Math. Anal. Appl. 7 (1963) 348–396.
[4] Hazard C., Lenoir M., On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations, SIAM J. Math. Anal. 27 (1996) 1597–1630.
[5] Nédélec J.-C., Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$, Numer. Math. 35 (1980) 315–341.
[6] Costabel M., A coercive bilinear form for Maxwell's equations, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991) 527–541.
[7] Grisvard P., Singularities in Boundary Value Problems, Masson, Paris, 1992.